Eine Menge heißt *äußerst schwach eindimensional*, wenn ihr erster Dimensionsteil abzählbar ist. Betrachten wir die n-te Potenz eines äußerst schwach eindimensionalen Raumes, so sind die n F_σ-Mengen, in welche wir eben den ersten Dimensionsteil der n-ten Potenz zerlegt haben, offenbar paarweise homöomorph und der erste Dimensionsteil kann dann offenbar in abzählbarviele schwach-eindimensionale relativ abgeschlossene Mengen zerlegt werden, von denen jede mit der $(n-1)$-ten Potenz der äußerst schwach eindimensionalen Menge homöomorph ist.

Bezeichnen wir den Raum R im Punkte p als *höchstens leicht n-dimensional*, wenn p in beliebig kleinen Umgebungen mit höchstens schwach $(n-1)$-dimensionalen Begrenzungen enthalten ist, und nennen wir *höchstens leicht n-dimensional* einen Raum, der in jedem seiner Punkte höchstens leicht n-dimensional ist, so gilt offenbar der

Satz. *Das Produkt von n schwach eindimensionalen Räumen ist höchstens leicht n-dimensional.*

Sei nämlich p ein vorgelegter Punkt des Produktes P. Wir stellen dasselbe nach dem obigen Verfahren als Summe der $n+1$ nulldimensionalen Mengen P_k dar. Ist p in P_0 enthalten, so ist P in p nulldimensional. Ist p in P_i enthalten $(i \neq 0)$, so liegt, da P_i nulldimensional ist, p in beliebig kleinen Umgebungen, deren Begrenzungen zu P_i fremd sind, deren Begrenzungen daher in der Summe der n übrigen Mengen P_k enthalten und demnach höchstens schwach $(n-1)$-dimensional sind. Also ist P in p höchstens leicht n-dimensional.

Wenn die obere Hälfte des Produktsatzes für beliebige separable Räume gelten sollte, dann existieren also für jedes n schwach n-dimensionale Räume, da es nach Sierpiński einen schwach (und sogar äußerst schwach) eindimensionalen Raum gibt. Dann existieren ferner für jedes n stark n-dimensionale Räume, welche Summe sind von n schwach n-dimensionalen relativen F_σ-Mengen und daher von abzählbarvielen schwach n-dimensionalen relativ abgeschlossenen Mengen, welche zudem als paarweise homöomorph angenommen werden können (z. B. die erste Dimensionsteil der Potenzen der Sierpiński'schen Menge). Unabhängig vom Produktsatz hat Mazurkiewicz für jedes n schwach n-dimensionale Räume konstruiert und hat einen stark eindimensionalen Raum konstruiert, welcher Summe sogar von bloß zwei relativ abgeschlossenen schwach eindimensionalen Mengen ist.

Über verallgemeinerte projektive Geometrie

(O uogólnionej geometrji rzutowej)

von

Stanisław Gołąb (Kraków).

Einleitung.

Seitdem F. Klein in seiner Arbeit „Über Liniengeometrie und metrische Geometrie" (1871)[1] die Beziehungen zwischen den projektiven und konformen Eigenschaften in der euklidischen Geometrie klargestellt hatte, bilden die Untersuchungen in der projektiven und in der konformen Geometrie zwei parallele Reihen, die in ihren wichtigsten Punkten zeitlich nur geringe Differenzen aufweisen.

1918 entdeckte Weyl die sogenannte Konformkrümmungsgröße einer Riemannschen Übertragung und bewies, daß das Verschwinden dieser Größe notwendig dafür ist, daß eine gegebene Riemannsche Geometrie durch eine konforme Transformation in eine euklidische übergeführt werden kann[2]. 1921 zeigte Schouten sodann, daß das Verchwinden der Konformkrümmungsgröße auch eine hinreichende Bedingung darstellt[3]. Dieses Resultat veranlaßte Weyl zur Bildung der sogenannten Projektivkrümmungsgröße und zum Beweise des Satzes, daß das Verschwinden dieser Größe notwendig und hinreichend dafür ist, daß eine gegebene nichteuklidische affine Gemetrie durch eine bahntreue Transformation in eine euklidische übergeführt werden kann[4]. In dieser Weylschen Arbeit findet sich zum ersten Mal der Begriff der bahntreuen oder projektiven Transformation einer affinen Übertragung. Sind $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$ die Parameter einen affinen Übertragung in einer X_n, so sind die Parameter $'\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$ jeder affinen Übertragung mit denselben geodätischen Linien gegeben durch die Gleichung

$$(1) \qquad '\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} = \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} + A^{\nu}_{\lambda} p_{\mu} + A^{\nu}_{\mu} p_{\lambda}, \quad (A^{\nu}_{\lambda} = \text{Einheitsaffinor})$$

wo p_λ ein beliebiges kovariantes Vektorfeld ist. Projektiv heißt nun eine

[1]) 1871, 1. [2]) 1918, 1. [3]) 1921, 1. [4]) 1921, 2.

Eigenschaft, wenn sie sowohl bei Transformationen der Urvariablen als bei den Transformationen (1) invariant ist. Die projektive Geometrie wurde in diesem verallgemeinerten Sinne zuerst (1922) von L. P. Eisenhart und O. Veblen aufgefasst und weiter entwickelt[5]). Ihr Ausgangspunkt bildet ein System von Bahnkurven (paths) in der X_n, gegeben durch die Gleichungen:

$$\frac{d^2\xi^\nu}{ds^2}+\Gamma^\nu_{\lambda\mu}\frac{d\xi^\lambda}{ds}\frac{d\xi^\mu}{ds}=0 \tag{2}$$

und es handelt sich um die Geometrie dieser Differentialgleichungen (geometry of paths). Von diesen Autoren wurde kein Versuch gemacht, der neuen Geometrie irgend eine Übertragung in eineindeutiger Weise zuzuordnen. Dieser Gedanke stammt erst von Cartan[6]). Cartan ordnete dazu jedem Punkte der gegeben Mannigfaltigkeit X_n eine lokale ebene Mannigfaltigkeit zu, und bildete dann die benachbarten lokalen Mannigfaltigkeiten projektiv statt affin aufeinander ab. Dieser Gedanke sowie der entsprechende ebenfalls von Cartan herrührende für die konforme Geometrie wurde ausgearbeitet von Cartan (1924)[7]) und Schouten (1924)[8]) und für den projektiven Fall gelang es beiden unabhängig voneinander, jeder bis auf bahntreue Transformationen gegebenen affinen Übertragung eine solche projektive Übertragung in eineindeutiger Weise zuzuordnen. Die Methode wurde von J. A. Schouten (1926) noch weiter ausgearbeitet und in Beziehung gesetzt zum Erlanger Programm[9]).

Eine ganz andere Behandlung gab T. Y. Thomas (1925). Es hatte sich als unmöglich herausgestellt, den Übertragungen (1) in eineindeutiger Weise eine *affine* Übertragung zuzuordnen, die sowohl bei Transformationen der Urvariablen als bei (1) invariant wäre. T. Y. Thomas entdeckte nun[10]), daß die durch die Gleichungen

$$\overset{*}{\Gamma}{}^\nu_{\lambda\mu}=\Gamma^\nu_{\lambda\mu}-\frac{1}{n+1}(A^\nu_\lambda\Gamma^\alpha_{\alpha\mu}+A^\nu_\mu\Gamma^\alpha_{\alpha\lambda}) \tag{3}$$

definierten Parameter $\overset{*}{\Gamma}{}^\nu_{\lambda\mu}$ bei (1) invariant sind, sich aber bei allgemeinen Transformationen der Urvariablen nicht wie die Parameter einer affinen Übertragung transformieren. Nur in dem besonderen Falle wo die Gruppe der equimodularen Transformationen der Urvariablen zu Grunde gelegt wird, können die $\overset{*}{\Gamma}{}^\nu_{\lambda\mu}$ als Parameter einer affinen Übertragung dienen („equiprojective geometry" von T. Y. Thomas)[11]). Ausgehend von den $\overset{*}{\Gamma}{}^\nu_{\lambda\mu}$ gelang es ihm sodann den Übertragungen (1) in eineindeutiger Weise eine $(n+1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit mit einer affinen Übertragung und mit einer beschränkten Transformationsgruppe der Urvariablen zuzuordnen, wobei die $(n+1)$-te adjungierte Urvariable natürlich eine spezielle Rolle spielte. In dieser $(n+1)$-

[5]) 1922, 1—5; 1923, 1—3. [6]) 1922, 6. [7]) 1924, 4. [8]) 1924, 5.
[9]) 1926, 3. [10]) 1925, 1. [11]) 1925, 1; 1925, 5.

dimensionalen A_{n+1} sind spezielle Vektoren, die „projektiven", ausgezeichnet, und es gelang Thomas für diese projektiven Vektoren eine kovariante „projektive Ableitung" zu definieren[12]). Allerdings entspricht dieser Ableitung *kein* kovariantes Differential und es entsteht somit keine projektive Übertragung, da eine Übertragung eben erst zu stande kommt, wenn eine in irgendeinem Punkte definierte Größe irgendwelcher Art vermöge der Forderung, daß das kovariante Differential verschwinden soll, nach einem Nachbarpunkte verpflanzt wird.

Eine dritte Methode der Behandlung gab Veblen (1928)[13]). Es gelang ihm mit Hilfe der Transformationsdeterminante die Transformation der Urvariablen in der Umgebung von jedem Punkte zu schreiben als Quotient von zwei Reihenentwicklungen. Den Gliedern nullter und erster Ordnung entnahm er dann die Koeffizienten die zur Definition der „projektiven Vektoren" dienen. Die Veblenschen „projektiven Vektoren" sind nicht identisch mit den Thomasschen, sie besitzen aber wie diese eine kovariante Ableitung und kein kovariantes Differential.

Die Beziehungen zwischen den Veblenschen und Thomasschen projektiven Vektoren sowie zwischen den zugehörigen projektiven Ableitungen ließen sich in recht durchsichtiger Weise aufstellen[14]). Die Beziehungen zwischen den Thomasschen und Veblenschen projektiven Vektoren und Ableitungen zu den bei Cartan und Schouten auftretenden Punktgrößen und ihren „projektiven Übertragungen" blieben aber noch ungeklärt. Auf das Wünschenswerte ihrer Klarstellung wurde von Veblen in seinem Vortrag auf dem internationalen mathematischen Kongresse in Bologna 1928 ausdrücklich hingewiesen[14a]).

In einer vom Verfasser gemeinschaftlich mit Prof. Schouten geschriebenen Arbeit, die unter dem Titel „Über projektive Übertragungen und Ableitungen" in der Mathematischen Zeitschrift (1930) erschienen ist[15]) wurde nun u. a. gezeigt, daß bei einer etwas schärferen Fassung der Cartan-Schoutenschen Methode, die sich besonders dadurch auszeichnet, daß sie eine gewisse Konstante c vorläufig noch unbestimmt läßt, die bei dieser Methode verwendeten Punkte für $c=1$ bzw. $-\frac{1}{n+1}$ identisch sind mit den projektiven Vektoren von Veblen bzw. Thomas. Es wurde dabei auch klar, warum diesen Vektoren nur eine kovariante Ableitung zukommen kann und nur den Vektordichten vom Gewicht $\frac{1}{n+1}$, also den Cartan-Schoutenschen Punkten auch ein kovariantes Differential und damit eine Übertragung. Die gewünschte Klärung war damit erreicht.

[12]) 1926, 6. [13]) 1928, 3. [14]) 1928, 3, Fußnote 4, S. 166.
[14a]) 1929, 6, S. 187. [15]) 1930, 1.

Inzwischen hatte Veblen (1929)[16]) von einem anderen Standpunkte ausgehend den Begriff seiner projektiven Ableitung verallgemeinert. Über die Beziehungen zwischen seiner Methode und der von Cartan und Schouten enthält diese Arbeit aber nichts.

1929 wurde das Problem angegriffen von Weyl[17]). In dieser Arbeit wird im Wesentlichen die Cartansche Idee der projektiven Abbildung benachbarter lokaler Mannigfaltigkeiten entwickelt, aber unter Verwendung nichthomogener, statt homogener Koordinaten. Durch diese überraschende Wendung gelang es Weyl in manchen Punkten wesentlich Neues zu erreichen. Was aber den Übergang zu der Thomas-Veblenschen Methode betrifft, begnügte sich Weyl in dieser hochinteressanten aber leider zu kurz gehaltenen Arbeit nur mit einigen Andeutungen, ohne zu einer expliziten Darstellung überzugehen. Eine ausführliche Darstellung der Weylschen Methode und ihre Beziehungen zu dem Standpunkte unserer oben zitierten Arbeit wird Gegenstand einer noch nicht erschienenen Arbeit von denselben Verfassern[18]). Infolgedessen wird die Weylsche Arbeit hier außeracht gelassen. Die vorgenannte Arbeit ist aber als eine notwendige Ergänzung der vorliegenden zu betrachten.

Das hauptsächlichste Ziel der vorliegenden Arbeit ist in systematischer Weise zu zeigen, wie die einzelnen Theorien spezielle Fälle eines Ganzen werden, welches vom Cartan-Schoutenschen Ausgangspunkt aus aufgebaut werden kann.

Zur Erleichterung des Lesens geht ein Abschnitt über die verwendeten Bezeichnungen voran. In diesem Abschnitt sind alle die Vereinfachungen und Verbesserungen der Ricci-Symbolik die von Schouten seit dem Erscheinen seines Ricci-Kalküls vorgeschlagen und verwendet sind, und die sich zur Zeit nur zerstreut in verschiedenen Arbeiten finden, zu einem einheitlichen Ganzen vereinigt.

Im Paragraphen 1 und 2[19]) werden sodann die Begriffe der Punktgrössendichten und ihrer Übertragung für den allgemeinen Fall eingeführt.

Im Par. 3 werden die Punktgrößendichten spezialisiert, wodurch es möglich wird, eine der Hauptfragen zu erledigen, nämlich den durch (1) charakterisierten Übertragungen in eineindeutiger Weise (bis auf eine Konstante c, über welche erst später verfügt wird) eine Übertragung von Punktgrößendichten vom Gewicht $\dfrac{1}{n+1}$ zuzuordnen. Im Wesentlichen wird in diesem Par. also die Cartan-Schoutensche Methode in schärferer Fassung und unter Berücksichtigung aller rechnerischen Einzelheiten durchgeführt.

[16]) 1929, 5. [17]) 1929, 4.

[18]) J. A. Schouten und S. Gołąb, *Über projektive Übertragungen und Ableitungen II.*

[19]) Der Inhalt der Paragraphen 1—9 bildet im Wesentlichen den Gegenstand der unter [15]) zitierten Arbeit.

Der Par. 4 bringt den Begriff der projektiven kovarianten Ableitung für Punktdichten vom Gewicht $\dfrac{1}{n+1}$. Unter Verwendung eines Gedankens von Veblen gelingt es sodann die projektive Ableitung für Skalardichten und somit auch für Punktdichten von beliebigem Gewicht und im besonderen auch für Punkte zu definieren (Par. 5). Dabei zeigt sich dann aber, daß es im allgemeinen zu dieser projektiven Ableitung kein zugehöriges kovariantes Differential gibt.

Im Par. 6 wird eine affine Übertragung in einem adjungierten $(n+1)$-dimensionalen Raume eingeführt, welche der im Par. 3 abgeleiteten Punktdichtenübertragung und somit auch den durch (1) charakterisierten Übertragungen in der X_n in eineindeutiger Weise zugeordnet ist. Für $c=-\dfrac{1}{n+1}$ bekommen wir die Parameter der Übertragung der Thomasschen adjungierten Mannigfaltigkeit.

Im Par. 7 wird die Frage erörtert ob die im Par. 3 abgeleitete Abbildung der lokalen projektiven Mannigfaltigkeiten P_n auch eine Abbildung der lokalen affinen Mannigfaltigkeiten E_n mit sich bringt. Die Antwort auf diese Frage fällt negativ aus. Es zeigt sich nämlich, daß für die Festlegung der Abbildung der benachbarten E_n bei gegebener Abbildung benachbarter P_n eine extra gegebene Punktdichte vom Gewicht $\dfrac{1}{n+1}$ notwendig ist. Wollen wir also die Abbildung der E_n in einer von der speziellen Wahl von p_λ in (1) unabhängigen Weise festlegen, so müßte sich aus den Parametern der Punktdichtenübertragung eine Punktdichte in invarianter Weise ableiten lassen, was aber auf Grund des Par. 5 im Allgemeinen ausgeschlossen ist.

Der Par. 8 ist der Thomasschen Methode gewidmet. Es stellt sich heraus, daß durch die Annahme $c=-\dfrac{1}{n+1}$ die Punkte des Par. 2 identisch werden mit den projektiven Vektoren von T. Y. Thomas und die Parameter der projektiven Ableitung der Punkte mit den Parametern der projektiven Ableitung der Thomasschen Vektorgrößen.

Im Par. 9 wird die Veblenschen Methode kurz skizziert. Es zeigt sich, daß für $c=1$ die Punkte des Par. 2 identisch werden mit den Veblenschen projektiven Vektoren. Veblen legt die Parameter seiner projektiven Ableitung nicht fest und stellt nur einige Forderungen auf, die aber zur eindeutigen Bestimmung dieser Parameter nicht hinreichend sind. Die Veblenschen Forderungen werden in diesem Paragraphen so ergänzt, daß eine eindeutige Bestimmung erreicht wird und zwar diejenige, die der unseren für $c=1$ entspricht. Die geometrische Deutung dieser Forderungen ist erörtert im Par. 10, der sich ausführlich mit den geometrischen Eigenschaften der $(n+1)$-dimensionalen adjungierten Mannigfaltigkeit des Par. 6 beschäftigt.

Der Par. 10 schließt mit einem Satz, der die hinreichenden Bedingungen dafür bringt, daß die Übertragung in der adjungierten A_{n+1} genau dieselben Parameter hat, die sich im Par. 5 für die Parameter der projektiven Ableitung der Punkte ergaben.

Im Par. 11 wird der Fall untersucht, wo die Übertragung in der A_{n+1} eine Riemannsche ist Es wird gezeigt, daß dies eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür darstellt, daß es unter den durch (1) charakterisierten affinen Übertragungen eine Einsteinsche Übertragung gibt.

Im Par. 12 wird der Fall betrachtet, wo die A_{n+1} total geodätische Hyperflächen zuläßt. Dies erweist sich als notwendig und hinreichend dafür, daß es unter den durch (1) charakterisierten Übertragungen eine Übertragung von der Eigenschaft gibt, daß ihr Ricci-Affinor identisch verschwindet.

Der Par. 13 ist dem Falle gewidmet, wo die Übertragung in der A_{n+1} eine euklidische ist. Dies ist dann und nur dann der Fall, wenn die durch (1) charakterisierten Übertragungen projektiv-euklidisch sind. Es ergibt sich dabei natürlich auch ein Beweis für den bekannten Weylschen Satz.

Es soll bemerkt werden, daß die Methode sich sehr einfach auch für nichtsymmetrische Übertragungen verallgemeinern läßt, wodurch man zu einer projektiven Übertragung mit Torsion (im Sinne von Cartan) gelangt[20].

Die Anregung zu dieser Arbeit verdanke ich Herrn Prof. J. A. Schouten, der mich auch bei ihrer Ausführung gütigst durch Rat und Tat unterstützte. Ich danke ihm an dieser Stelle herzlichst für seine Mitarbeit, die für mich von unschätzbarem Wert war.

Auch Herrn Dr. E. R. van Kampen, der das Manuskript las und auf dessen Rat hin die Darstellung in manchen Punkten vereinfacht wurde, bin ich zu Dank verpflichtet.

Bezeichnungen.

Wir werden im folgenden im wesentlichen die Schreibweise verwenden die in dem Schoutenschen Buch „Der Ricci-Kalkül"[21]) festgestellt ist. Da aber der Verfasser dieses Buches in den letzten Jahren diesen Kalkül in mancher Hinsicht verbessert und von Inkonsequenzen befreit hat, soll diesen Verbesserungen Rechnung getragen werden. Die dadurch entstehenden Abweichungen sind in diesem ersten Abschnitt zu einem übersichtlichen Ganzen vereinigt[22]).

[20]) Vgl. [18]). Nähere Untersuchung wird Gegenstand einer späteren Arbeit.

[21]) 1924, 1. *Im Folgenden wird dieses Buch stets mit R. K. zitiert.*

[22]) Wir benutzten namentlich die beiden Arbeiten:
J. A. Schouten: Über nichtholonome Übertragungen in einer L_n, Math. Zeitschr. 30 (1929) 149—172,

Urvariablen, transformierende Indizes. Unter einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit X_n verstehen wir die Gesamtheit aller Werte, die n Variablen annehmen können. Die Variablen heißen die Urvariablen und ein bestimmtes System von Werten heißt *Punkt.* Die Urvariablen sollen mit dem Kernbuchstaben ξ bezeichnet, und unterschieden werden durch *rechts oben* geschriebene Indizes $\xi^\nu\,(\alpha,\ldots,\omega = 1,\ldots,n)$. $\alpha,\ldots,\omega$ heißen *laufende* Indizes; die Zeichen aus der cursiv gedruckten Zeichenreihe $1,\ldots,n$ sind die diesen laufenden Indizes zugeordneten *festen* Indizes[23]). Im Gegensatz zu später einzuführenden anderen Indizes sollen die laufenden sowohl als die festen Indizes *transformierend* genannt werden. Wir legen alle diejenigen Transformationen der Urvariablen zu Grunde, welche im betrachteten Gebiete analytisch und regulär sind und eine nicht verschwindende Determinante besitzen. Beim Übergang zu einem neuen Koordinatensystem benutzen wir *denselben* Kernbuchstaben ξ, und ändern nur die Indizes, indem wir für laufende Indizes Buchstaben einer anderen Buchstabenreihe verwenden und dieser Buchstabenreihe eine andere Reihe von festen Indizes zuordnen. Für diese andere Buchstabenreihe kann z. B. das große griechische Alphabet gewählt werden und für die zugehörigen festen Indizes die cursiv gedruckte Zeichenreihe: $\bar{1},\ldots,\bar{n}$. Das Koordinatensystem sei im Text durch einen eingeklammerten Buchstaben der zugehörigen Buchstabenreihe charakterisiert, also (ν), (N). Der Übergang von (ν) zu (N) (oder anders gesagt, die Transformation der Urvariablen) ist gegeben durch Gleichungen von der Form:

$$\xi^{\mathrm{N}} = \xi^{\mathrm{N}}(\xi^\nu), \qquad \Delta = \left|\frac{\partial \xi^{\mathrm{N}}}{\partial \xi^\nu}\right| \neq 0. \tag{1}$$

Der Übergang von (N) zu (ν) durch die reziproke Transformation

$$\xi^\nu = \xi^\nu(\xi^{\mathrm{N}}), \qquad \Delta^{-1} = \left|\frac{\partial \xi^\nu}{\partial \xi^{\mathrm{N}}}\right| \neq 0. \tag{2}$$

J. A. Schouten und V. Hlavatý, Zur Theorie der allgemeinen linearen Übertragung, Math. Zeitschr. 30 (1929) 414—432,
die Schoutenschen Vorlesungen über Differentialgeometrie in Leiden in den Jahren 1928 und 1929 und
ein Manuskript einer noch nicht erschienenen Arbeit von den Herren Schouten und van Kampen über die Krümmungstheorie einer V_n^m in V_n.

[23]) Es tut also nichts zur Sache, daß die Zeichen $1,\ldots,n$ Zahlen sind, für uns kommt nur in Betracht, daß die n Zeichen verschieden und unterscheidbar sind. Nur aus typographischen Rücksichten werden Zahlen und nicht z. B. irgendwelche Figuren oder farbige Punkte verwendet.

Lokale Variablen, lokale Gruppe. Jedem Punkte der X_n seien jetzt mehrere zu diesem Punkte gehörige Mannigfaltigkeiten X_N, $X_{N'}, \ldots$ zugeordnet. N, $N', \ldots$ brauchen nicht gleich n sein. Für die Transformationen der Urvariablen in einer X_N, die wir *lokale* Variablen nennen wollen, werden nur Transformationen aus einer von vornherein festgelegten Gruppe, der zu diesen Variablen gehörigen *lokalen* Gruppe, zugelassen. Im Gegensatz zur Transformation der ξ^ν nennen wir die Transformation einer lokalen Gruppe eine *lokale Transformation.* Es ist möglich, daß eine Transformation der ξ^ν in jedem Punkte in eindeutiger Weise eine lokale Transformation bestimmt, eine lokale Transformation kann aber auch vollständig unabhängig sein von der Transformation der ξ^ν.

Geometrische Objekte. Im Folgenden treten einem bestimmten Punkte der X_n zugeordnete Systeme von Zahlen auf, die in bezug auf ein oder auch mehrere Systeme von lokalen Variablen gegeben sind und die charakteristische Eigenschaft haben, daß sie beim Übergang zu anderen Systemen von lokalen Variablen übergehen in ein neues System, dessen Zahlen sich als Funktionen der Zahlen des alten Systems schreiben lassen; diese Funktionen hängen von den verwendeten lokalen Transformationen ab. Ein solches System soll ein „*geometrisches Objekt*" heißen, und die Zahlen *Bestimmungszahlen* des Objektes in bezug auf die gewählten Systeme von lokalen Variablen. Ist das Objekt in einem endlichen Teil der X_n definiert, so spricht man von einem *Feld.* Das einfachste Beispiel eines Feldes ist das System der ξ^ν selbst, die lokalen Variablen fallen dabei mit den ξ^ν zusammen. Für die Bestimmungszahlen dieser geometrischen Objekte wird dasselbe Bezeichnungssystem verwendet, das oben für die Urvariablen eingeführt wurde. Jedes Objekt bekommt einen Kernbuchstaben, der sich niemals ändert und einen oder mehrere *laufende* Indizes und es werden dabei soviele verschiedene Buchstabenreihen für die Indizes verwendet als es lokale Gruppen gibt, die bei der Transformation der Bestimmungszahlen eine Rolle spielen. Zu jeder Buchstabenreihe gehört eine bestimmte Reihe von festen Indizes. Werden für jeden laufenden Index nacheinander sämtliche zu seiner Buchstabenreihe gehörigen festen Indizes eingesetzt, so entstehen alle Bestimmungszahlen des Objektes. Wird dieses Verfahren auf sämtliche Terme einer Gleichung angewandt, so entsteht das System von Gleichungen, das durch die Gleichung mit den laufenden Indizes in abgekürzter Weise zum Ausdruck gebracht wird. Die *transformierenden* Indizes, d. i. laufende und feste Indizes werden, beide mit einer einzigen Ausnahme, stets *rechts oben* oder *unten* vom Kernbuchstaben geschrieben. Die Ausnahme bezieht sich auf die Objekte, die nur eine einzige Bestimmungszahl besitzen und aus diesem Grunde keinen Index zur Unterscheidung der verschiedenen Bestimmungszahlen brauchen. Ist diese Bestimmungszahl invariant, so heißt das Objekt ein *Skalar* und es entsteht keine Schwierigkeit, ist sie aber nicht invariant,

so muß dem Kernbuchstaben in irgendeiner Weise ein Zeichen angehängt werden, das das Bezugssystem angibt. Dies wird erreicht indem *unter* dem Kernbuchstaben ein *eingeklammerter* Buchstabe aus der zum Bezugssystem gehörigen Buchstabenreihe geschrieben wird. Es bedeutet also z. B. $\underset{(\nu)}{\varphi}$ und $\underset{(\mathrm{N})}{\varphi}$ die Bestimmungszahl in bezug auf das Bezugssystem dem die kleinen bzw. großen griechischen Buchstaben zugeordnet sind. Wir wollen diese Bezugssysteme in derselben Weise wie oben in Text mit (ν) bzw. (N) bezeichnen. Es ist klar, daß es bei Indizes dieser Art überhaupt keinen Sinn hätte, ν durch $1, \ldots, n$ zu ersetzen.

Wahl der Kernbuchstaben. Es ist üblich lateinische Kernbuchstaben ausschließlich für die weiter unten zu definierenden besonderen geometrischen Objekte, die wir *Größen* nennen, zu verwenden. Gothische Buchstaben sollen im Folgenden nur für *Dichten* verwendet werden und große griechische Buchstaben nur zur Bezeichnung solcher Objekte, die eine *Übertragung* oder eine *Ableitung* darstellen. Der Gebrauch der kleinen griechischen Buchstaben bleibe vollständig frei.

Unterscheidende Indizes. Neben den *transformierenden* Indizes gibt es *unterscheidende* Indizes, die dem Kernbuchstaben angehängt werden um denselben Kernbuchstaben für verschiedene Objekte verwenden zu können. Wir unterscheiden auch hier *laufende* Indizes, die einer bestimmten Buchstabenreihe entnommen sind und *feste* Indizes, die einer dieser Buchstabenreihe zugeordneten Zeichenreihe entstammen und für die laufenden Indizes eingesetzt werden dürfen. Unterscheidende Indizes sollen *niemals* an den Stellen der transformierenden Indizes geschrieben werden, sondern stets *über* oder *unter* dem Kernbuchstaben. Aus historischen Gründen sei eine einzige Ausnahme zugelassen. Das in allen Buchstabenreihen darstellbare *Kroneckersche Symbol*

$$\delta^\nu_\lambda,\ \delta^{\mathrm{N}}_{\Lambda},\ \delta^k_i,\ \delta^K_I, \ldots \tag{3}$$

das bekanntlich ein quadratisches Schema von Zahlen darstellt, die 1 oder 0 sind:

$$\delta^\nu_\lambda = \begin{cases} 1, & \nu = \lambda \\ 0, & \nu \neq \lambda \end{cases}, \qquad \delta^{\mathrm{N}}_{\Lambda} = \begin{cases} 1, & \mathrm{N} = \Lambda \\ 0, & \mathrm{N} \neq \Lambda \end{cases} \tag{4}$$

müßte eigentlich geschrieben werden $\overset{\nu}{\underset{\lambda}{\delta}}, \overset{\mathrm{N}}{\underset{\Lambda}{\delta}}, \overset{k}{\underset{i}{\delta}}, \overset{K}{\underset{I}{\delta}}, \ldots$, soll aber seine althergebrachte Form behalten.

Verallgemeinerte Kroneckersche Symbole. Es soll außerdem ein Symbol mit Kernbuchstaben δ definiert werden für Indizes, die zu zwei verschiedenen Buchstabenreihen gehören. Wir setzen:

$$\delta^\nu_\Lambda = \delta^\Lambda_\nu = \begin{cases} 1, & \Lambda = \bar{\nu} \\ 0, & \Lambda \neq \bar{\nu} \end{cases}; \qquad \nu = 1, \ldots, n; \quad \Lambda = \bar{1}, \ldots, \bar{n}. \tag{5}$$

Das Symbol bedeutet also 1 oder 0, je nachdem die für die laufenden Indizes eingesetzten festen Indizes ein jeder in seiner eigenen Zeichenreihe korrespondierende Stellen einnehmen oder nicht. Man überzeugt sich leicht, daß folgende Identitäten gelten:

$$\delta^{\nu}_{N}\,\delta^{N}_{\lambda} = \delta^{\nu}_{\lambda}, \qquad \delta^{N}_{\lambda}\,\delta^{\lambda}_{\Lambda} = \delta^{N}_{\Lambda}. \tag{6}$$

Definition der (Vektor-) Größen. Der einfachste Fall entsteht indem man, ausgehend von den Gleichungen:

$$\begin{cases} d\xi^{N} = (\partial_{\lambda}\xi^{N})\,d\xi^{\lambda} \;^{24)}, \\ d\xi^{\nu} = (\partial_{\Lambda}\xi^{\nu})\,d\xi^{\Lambda}, \end{cases} \tag{7}$$

als lokale Gruppe die lineare homogene Gruppe der durch $\partial_{\lambda}\xi^{N}$ vermittelten linearen homogenen Transformationen wählt. Die lokale Transformation hängt dann also von der Transformation der Urvariablen ab. Jedem Punkt der X_n wird dadurch eine E_n zugeordnet [25]). Kontravariante und kovariante Vektoren werden dann in der üblichen Weise definiert als Systeme von Bestimmungszahlen v^{ν} bzw. w_{λ} mit der Transformationsformel

$$\begin{cases} v^{N} = v^{\nu}\,\partial_{\nu}\xi^{N}, \\ w_{\Lambda} = w_{\lambda}\,\partial_{\Lambda}\xi^{\lambda}, \end{cases} \tag{8}$$

und (Vektor-) Größen oder (Vektor-) Affinoren höheren Grades als Systeme von Bestimmungszahlen mit mehreren Indizes, die sich je nach ihrer Stellung ko- bzw. kontravariant transformieren, z. B.

$$v^{N\cdot}_{\cdot K\Lambda} = v^{\nu}_{\cdot\varkappa\lambda}\,\partial_{\nu}\xi^{N}\,\partial_{K}\xi^{\varkappa}\,\partial_{\Lambda}\xi^{\lambda}. \tag{9}$$

Eine Größe höheren Grades läßt sich stets als Summe von Produkten von Vektoren schreiben. Die schon oben definierten *Skalare* werden als Größen nullten Grades zu den Größen gerechnet.

Maßvektoren. Die sogenannten Maßvektoren $\underset{\lambda}{e}^{\nu}$, $\overset{\nu}{e}_{\lambda}$, definiert durch die Gleichungen

$$\underset{\lambda}{e}^{\nu} \overset{*}{=} \overset{\nu}{e}_{\lambda} \overset{*}{=} \delta^{\nu}_{\lambda}, \tag{10}$$

bilden das *lokale Bezugssystem*, das wir also im Text mit (ν) andeuten. Das Zeichen $\overset{*}{=}$ soll stets angeben, daß eine Gleichung *nicht kovariant* ist, d. h. daß sie nur für das verwendete Bezugssystem gilt und ihre Gültigkeit verliert bei einer lokalen Transformation.

Zu den ξ^{N} gehört ein anderes lokales Bezugssystem (N), das aus den Maßvektoren

$$\underset{\Lambda}{e}^{N} \overset{*}{=} \overset{N}{e}_{\Lambda} \overset{*}{=} \delta^{N}_{\Lambda} \tag{11}$$

[24]) Im folgenden steht ∂_{λ} stets für $\partial/\partial\xi^{\lambda}$. Das Summenzeichen wird — wie üblich — weggelassen.

[25]) Unter E_n verstehen wir eine X_n mit einer euklidisch-affinen Geometrie.

besteht. Die alten Maßvektoren haben in bezug auf (N) die Bestimmungszahlen

$$\underset{\lambda}{e}^{N} = \underset{\lambda}{e}^{\nu}\,\partial_{\nu}\xi^{N}. \tag{12}$$

Es ist natürlich nicht nötig, daß alle Indizes einer Größe sich auf dasselbe lokale Bezugssystem beziehen. Das einfachste Beispiel liefert der *Einheitsaffinor*:

$$A^{\nu}_{\lambda} = \overset{\mu}{e}_{\lambda}\,\underset{\mu}{e}^{\nu} \overset{*}{=} \delta^{\nu}_{\lambda} \tag{13}$$

mit der charakteristischen Eigenschaft

$$A^{\nu}_{\lambda} v^{\lambda} = v^{\nu}, \qquad A^{\nu}_{\lambda} w_{\nu} = w_{\lambda}. \tag{14}$$

Geht man nämlich nur für den oberen Index zu (N) über, so entstehen die Bestimmungszahlen

$$A^{N}_{\lambda} = \overset{\mu}{e}_{\lambda}\,\underset{\mu}{e}^{N} = \overset{\mu}{e}_{\lambda}\,\underset{\mu}{e}^{\nu}\,\partial_{\nu}\xi^{N} = \partial_{\lambda}\xi^{N}, \tag{15}$$

so daß sich die Definitionsgleichungen (8) jetzt auch schreiben lassen:

$$v^{N} = A^{N}_{\nu} v^{\nu}, \qquad w_{\Lambda} = A^{\lambda}_{\Lambda} w_{\lambda} \tag{16}$$

und damit bis auf die Wahl der Bezugssysteme gleichbedeutend werden mit (14). Die nachstehende Tabelle bringt in übersichtlicher Weise den Unterschied zwischen der Transformationsweise der Maßvektoren, des Einheitsaffinors und des Kroneckerschen Symbols zum Ausdruck

(17)

	Transf. des kontrav. Ind.	Transf. des kov. Ind.	Kombiniert
$\underset{\lambda}{e}^{\nu}$	$\underset{\lambda}{e}^{N}$	$\underset{\lambda}{e}^{\nu}$	$\underset{\lambda}{e}^{N}$
$\overset{\nu}{e}_{\lambda}$	$\overset{\nu}{e}_{\lambda}$	$\overset{\nu}{e}_{\Lambda}$	$\overset{\nu}{e}_{\Lambda}$
A^{ν}_{λ}	A^{N}_{λ}	A^{ν}_{Λ}	A^{N}_{Λ}
δ^{ν}_{λ}	δ^{ν}_{λ}	δ^{ν}_{λ}	δ^{ν}_{λ}

Die Kupplung der lokalen Transformation an der Transformation der Urvariablen läßt sich aufheben, indem man ein beliebiges lokales Bezugssystem (k) einführt, bestehend aus beliebigen linear unabhängigen Vektoren $\underset{i}{e}^{\nu}$, $\overset{k}{e}_{\lambda}$; $h, \ldots, m = 1, \ldots, n$ und dieses in beliebiger, nicht von der Transformation der Urvariablen abhängiger Weise, ersetzt durch ein ebensolches System (K)

bestehend aus Vektoren $\underset{I}{e^\nu}$, $\overset{K}{e_\lambda}$; $H, \ldots, M = \overline{1}, \ldots, \overline{n}$. Für die Bestimmungszahlen in bezug auf (k) gilt dann

$$(18)\qquad \begin{cases} v_k = A^k_\lambda v^\lambda, \quad w_i = A^\nu_i w_\nu; \\ A^k_\lambda = \overset{j}{e_\lambda} \underset{j}{e^k} \overset{*}{=} \overset{k}{e_\lambda}; \quad A^\nu_i = \underset{j}{e^\nu} \overset{j}{e_i} \overset{*}{=} \underset{i}{e^\nu} \end{cases}$$

und für die Transformation von (k) auf (K)

$$(19)\qquad \begin{cases} v^K = A^K_i v^i, \quad w_I = A^k_I w_k; \\ A^K_i = A^K_\mu A^\mu_i = A^{K\mu}_{\mu i}; \quad A^k_I = A^k_\mu A^\mu_I = A^{k\mu}_{\mu I} \end{cases}$$ [26].

Auch Bestimmungszahlen mit Indizes, die sich zum Teil auf (ν), zum Teil auf (k) beziehen, können vorkommen; die A^k_λ bilden ein Beispiel.

Holonomer und nicht holonomer Fall. Bekanntlich sind die Bestimmungszahlen von $d\xi$ in bezug auf (k) dann und nur dann vollständige Differentiale, wenn

$$(20)\qquad \partial_{[\mu} \overset{k}{e_{\lambda]}} = 0.$$

Wir nennen diesen Fall den *holonomen.* Im nichtholonomen Falle schreiben wir nicht $d\xi^k$ sonder $(d\xi)^k$. Die ξ^k sind dann, was man in der Mechanik nichtholonome Parameter nennt, d. h. sie haben für sich keine Bedeutung und nur ihren Differentialen kommt eine Bedeutung zu.

Dichten. Unter einer Skalardichte vom Gewicht $\mathfrak{k}$ wird ein Objekt verstanden mit einer einzigen Bestimmungszahl $\underset{(\nu)}{\mathfrak{p}}$, die sich folgendermaßen transformiert:

$$(21)\qquad \underset{(k)}{\mathfrak{p}} = \underset{(\nu)}{\mathfrak{p}}\, |A^k_\lambda|^{-\mathfrak{k}}.$$

Die Definition der kontra- und kovarianten Vektordichte vom Gewicht $\mathfrak{k}$ ist niedergelegt in den Formeln:

$$(22)\qquad \begin{cases} \mathfrak{v}^k = \mathfrak{v}^\nu A^k_\nu\, |A^k_\lambda|^{-\mathfrak{k}}, \\ \mathfrak{w}_i = \mathfrak{w}_\lambda A^\lambda_i\, |A^k_\lambda|^{-\mathfrak{k}}. \end{cases}$$

(Vektor-) Größendichten höheren Grades tragen mehrere Indizes, die sich, je nach ihrer Stellung, kontra- oder kovariant nach (22) transformieren. Zu jedem Index gehört ein Gewicht und die Summe aller dieser Gewichte ist das Gewicht der (Vektor-) Größendichte.

Nach Einführung der Größen und der Dichten soll jetzt der Name geometrisches Objekt nur noch verwendet werden für geometrische Objekte, die weder Größen noch Dichten sind.

[26]) Im Folgenden schreiben wir den Kernbuchstaben A stets nur einmal, also z. B. $A^{k\mu}_{\mu I}$ statt $A^k_\mu A^\mu_I$.

Das Skelett. Betrachtet man eine beliebige kovariante Gleichung z. B.:

$$(23)\qquad v^\nu_{\cdot\lambda\varkappa} = u^\nu_{\cdot\mu} w^\mu_{\cdot\lambda\varkappa},$$

so kann man einen oder mehrere Indizes in beliebiger Weise transformieren, z. B.:

$$(24)\qquad \begin{cases} v^k_{\cdot\lambda\varkappa} = u^k_{\cdot\mu} w^\mu_{\cdot\lambda\varkappa}, \\ v^\nu_{\cdot\lambda\varkappa} = u^\nu_{\cdot j} w^j_{\cdot\lambda\varkappa}, \\ v^\nu_{\cdot\lambda K} = u^\nu_{\cdot j} w^j_{\cdot\lambda K}, \end{cases}$$

ohne daß sich die geometrische Bedeutung der Gleichung ändert. Diese Bedeutung ist also vollständig unabhängig von den Indizes und nur abhängig von dem *Skelett* jedes Termes, worunter wir den Inbegriff verstehen von Kernbuchstaben, Stellung der Indizes und Stellung der vorgenommenen Überschiebungen.

Lineare Übertragung. Wird jetzt in der X_n eine lineare Übertragung festgelegt mit Hilfe der Parameter $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$ [27]):

$$(25)\qquad \nabla_\mu v^\nu = \partial_\mu v^\nu + \Gamma^\nu_{\lambda\mu} v^\lambda; \quad \nabla_\mu w_\lambda = \partial_\mu w_\lambda - \Gamma^\nu_{\lambda\mu} w_\nu$$ [28]),

so bilden die $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$ ein Beispiel eines geometrischen Objektes, das keine Größe ist. Beim Übergang zu den beliebigen lokalen Bezugssystemen (k) sind die neuen Bestimmungszahlen Γ^k_{ij}, die nach unserer Verabredung wieder denselben Kernbuchstaben bekommen, gegeben durch die Gleichung

$$(26)\qquad \Gamma^k_{ij} = A^{k\lambda\mu}_{\nu ij} \Gamma^\nu_{\lambda\mu} + A^k_\lambda \partial_j A^\lambda_i; \quad \partial_j = A^\mu_j \partial_\mu.$$

Die $\Gamma_\lambda = \Gamma^\nu_{\nu\lambda}$ mit der Transformationsweise

$$(27)\qquad \Gamma_i = A^\lambda_i \Gamma_\lambda - \partial_i \log |A^k_\lambda|$$

bilden ein zweites Beispiel eines geometrischen Objektes, das keine Größe ist. Eine Gleichung von der Form

$$(28)\qquad \Gamma_\lambda = 0$$

kann also keinen Sinn haben, da beide Seiten sich nicht in derselben Weise transformieren. Dagegen kann die Gleichung

$$(29)\qquad \Gamma_\lambda \overset{*}{=} 0$$

bestehen; sie sagt bekanntlich aus, daß die Übertragung inhaltstreu ist und gerade das Parallelepiped der Maßvektoren des Systems (ν) in sich überführt.

[27]) Eine X_n mit einer solchen Übertragung heißt L_n; ist $\Gamma^\nu_{[\lambda\mu]} = 0$, so heißt sie A_n (affine Übertragung).

[28]) Es ist ***nicht*** erlaubt eine ***nicht*** kovariante Gleichung kovariant zu differenzieren. Wir haben z. B. $e^\nu \overset{*}{=} A^\nu_\lambda$ und $\nabla_\mu \underset{\lambda}{e^\nu} \overset{*}{=} \Gamma^\nu_{\lambda\mu}$, $\nabla_\mu A^\nu_\lambda = 0$, während im allgemeinen $\Gamma^\nu_{\lambda\mu} \overset{*}{\neq} 0$.

Abdrosselung. Aus den Urvariablen ξ^ν lassen sich n Skalarfelder $\overset{\nu}{\xi}$ bilden, die den ξ^ν numerisch gleich sind. Beim Übergang zu neuen Urvariablen bleiben die $\overset{\nu}{\xi}$ also als Skalare invariant, während die ξ^ν in ξ^{N} übergehen. Wir bringen dies zum Ausdruck durch die Gleichung

$$\overset{\nu}{\xi} \stackrel{*}{=} \xi^\nu . \tag{30}$$

Es ist klar, daß die kovarianten Maßvektoren $\overset{\nu}{e}_\lambda$ aus den $\overset{\nu}{\xi}$ entstehen durch die kovariante Operation der Gradientbildung

$$\overset{\nu}{e}_\lambda = \partial_\lambda \overset{\nu}{\xi} \tag{α}$$

und daß die kontravarianten Maßvektoren $\underset{\lambda}{e}^\nu$ entstehen, indem der Vektor $d\xi^\nu$ durch die Skalare $d\overset{\lambda}{\xi}$ dividiert wird

$$\underset{\lambda}{e}^\nu = \frac{\partial \xi^\nu}{\partial \overset{\lambda}{\xi}} . \tag{β}$$

Dividiert man schließlich die Skalare $d\overset{\nu}{\xi}$ durch die Skalare $d\overset{\lambda}{\xi}$, so entstehen die n^2 Skalare des Kronecker'schen Symbols:

$$\delta^\nu_\lambda = \frac{\partial \overset{\nu}{\xi}}{\partial \overset{\lambda}{\xi}} . \tag{γ}$$

Die drei Gleichungen (α, β, γ) zeigen zusammen mit

$$A^\nu_\lambda = \frac{\partial \xi^\nu}{\partial \xi^\lambda} \tag{δ}$$

den Unterschied zwischen den vier in der Gleichung

$$\underset{\lambda}{e}^\nu \stackrel{*}{=} \overset{\nu}{e}_\lambda \stackrel{*}{=} A^\nu_\lambda \stackrel{*}{=} \delta^\nu_\lambda \tag{31}$$

auftretenden Symbolen, deren Transformationsweise in der Tabelle (17) von S. 101 übersichtlich dargestellt wurde.

Den Übergang von ξ^ν zu $\overset{\nu}{\xi}$ nennen wir *Abdrosseln* des Index ν. In derselben Weise nennen wir den Übergang von einer Größe oder einem geometrischen Objekt mit p Indizes zu den Skalaren, die den Bestimmungszahlen in bezug auf die zu diesen Indizes gehörigen Bezugssysteme gleich sind, *Abdrosseln* der Indizes in bezug auf diese Systeme und geben diese Abdrosselung an durch Überführung der betreffenden Indizes nach den Stellen oben und unter dem Kernbuchstaben, z. B.

$$\begin{aligned} \underset{\lambda\mu}{\overset{\nu}{\Gamma}} &\stackrel{*}{=} \Gamma^\nu_{\lambda\mu}, \\ \underset{\lambda}{\overset{\nu}{A}} &= \delta^\nu_\lambda \stackrel{*}{=} A^\nu_\lambda, \\ \underset{\lambda}{\overset{\nu}{e}} &= \delta^\nu_\lambda \stackrel{*}{=} \overset{\nu}{e}_\lambda \stackrel{*}{=} \underset{\lambda}{e}^\nu. \end{aligned} \tag{32}$$

Es ist klar, daß Abdrosselung der Indizes bei einer *Größe* erreicht werden kann durch Überschiebung mit allen möglichen Kombinationen von geeignet gewählten Maßvektoren, z. B.

$$\underset{\lambda}{\overset{\nu\mu}{v}} = v_\alpha{}^{\cdot\gamma\beta}\, \overset{\alpha}{e}_\lambda\, \underset{\gamma}{e}^\nu\, \underset{\beta}{e}^\mu \tag{33}$$

und rückgängig gemacht werden kann durch Multiplikation der gewonnenen Skalare mit geeigneten Maßvektoren und Addition, z. B.

$$v_\alpha{}^{\cdot\gamma\beta} = \underset{\lambda}{\overset{\nu\mu}{v}}\, \overset{\lambda}{e}_\alpha\, \underset{\nu}{e}^\gamma\, \underset{\mu}{e}^\beta . \tag{34}$$

Von diesem Umstande kann man Gebrauch machen, um für *Größen* die Abdrosselung eines einzigen oder einiger Indizes zu definieren. Darunter wird dann verstanden die Überschiebung jedes abzudrosselnden kontra- bzw. kovarianten Index mit den n ko- bzw. kontravarianten Maßvektoren, die den Urvariablen des Index angehören, z. B.

$$\overset{\nu\mathrm{M}}{v_\lambda{}^{\cdot\cdot}} = v_\lambda{}^{\cdot\mu\mathrm{K}}\, \overset{\nu}{e}_\mu\, \overset{\mathrm{M}}{e}_{\mathrm{K}} . \tag{35}$$

Daraus geht hervor, daß

$$\overset{\nu}{A}_\lambda = \overset{\nu}{e}_\lambda ; \quad \underset{\lambda}{A}^\nu = \underset{\lambda}{e}^\nu . \tag{36}$$

Auch diese Abdrosselung läßt sich rückgängig machen, z. B.

$$v_\lambda{}^{\cdot\nu\mathrm{K}} = \overset{\mu\mathrm{M}}{v_\lambda{}^{\cdot\cdot}}\, \underset{\mu}{e}^\nu\, \underset{\mathrm{M}}{e}^{\mathrm{K}} . \tag{37}$$

Es ist klar, daß eine kovariante Gleichung bei Abdrosselung eines oder einiger Indizes, die Eigenschaft des Kovariantseins behält.

Verwendete Indizes. Wir geben hier schließlich noch eine Übersicht über die verwendeten Buchstabenreihen und Zeichenreihen fur die laufenden bzw. die ihnen zugehörigen festen Indizes:

$$\left\{ \begin{array}{cc} \text{laufende Indizes:} & \text{feste Indizes:} \\ \alpha, \ldots, \omega & \mathit{1}, \ldots, n \\ \mathrm{A}, \ldots, \Omega & \bar{\mathit{1}}, \ldots, \bar{n} \\ h, \ldots, m & \mathrm{1}, \ldots, \mathrm{n} \\ H, \ldots, M & \bar{\mathrm{1}}, \ldots, \bar{\mathrm{n}} \\ a, \ldots, g & 0,\ \mathrm{1}, \ldots, \mathrm{n}\ ^{29)} \\ A, \ldots, G & \odot,\ \bar{\mathrm{1}}, \ldots, \bar{\mathrm{n}} \end{array} \right. \tag{38}$$

[29]) Bei den meisten Untersuchungen wird eine X_m in einer X_n eingebettet. Es emp-

Theoretisch ist man natürlich vollständig frei in der Wahl der laufenden Indizes innerhalb der angenommenen Buchstabenreihe. Die Lesbarkeit der Formeln, und die Wahrscheinlichkeit Fehler nicht zu machen oder doch noch zeitig zu entdecken, werden aber sehr erhöht, wenn man diese Freiheit, die für besondere Fälle natürlich aufrecht erhalten werden muß, für sehr oft vorkommende Fälle etwas einschränkt. Es empfiehlt sich dabei, im griechischen Alphabet ν zu bevorzugen für den kontravarianten Index, λ für den kovarianten, μ für die erste kovariante Differentiation, ω für die zweite, und ξ für die dritte. Man schreibt also z. B.

$$\nabla_\mu v^\nu = \partial_\mu v^\nu + \Gamma^\nu_{\lambda\mu} v^\lambda \tag{39}$$

und nicht etwa

$$\nabla_\nu v^\lambda = \partial_\nu v^\lambda + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} v^\mu \tag{40}$$

was an sich natürlich ebenso richtig wäre, aber zu vielen Verwirrungen und Druckfehlern Anlaß geben würde. Die entsprechenden Indizes in den anderen Buchstabenreihen ergeben sich aus folgender Tabelle:

(41)

	kontr.	kov.	1e Diff.	2e Diff.	3e Diff.
(ν)	ν	λ	μ	ω	ξ
(N)	N	Λ	M	Ω	Ξ
(k)	k	i	j	l	h
(K)	K	I	J	L	M
(c)	c	a	b	d	e
(C)	C	A	B	D	E

§ 1. Punktgrößen in einer X_n.

In jedem Punkte einer X_n legen wir in einer, von der Koordinatenwahl vollständig freien Weise ein System von n linear unabhängigen kontravarianten Maßvektoren $\underset{i}{e}^\nu$ und das zugehörige reziproke System $\overset{k}{e}_\lambda$; $(h,\dots,m = 1,\dots,\mathrm{n})$ und bezeichnen die Bestimmungszahlen in bezug auf dieses System mit den kleinen lateinischen Indizes $h, i, \dots, m$. Dieses System sei mit (k) bezeichnet. Beim Übergang zu einem neuen System $\underset{I}{e}^\nu$, $\overset{K}{e}_\lambda$ bezeichnen wir dieses mit (K); $(H,\dots,M = 1,\dots,\bar{\mathrm{n}})$ und die zugehörigen Bestimmungszahlen mit den großen

fiehlt sich da $a,\dots,g$ die festen Indizes $1,\dots,\mathrm{m}$ und $p,\dots,w$ die festen Indizes $\mathrm{m}+1,\dots,\mathrm{n}$ zuzuordnen. Da wir aber im Folgenden stets mit einer X_n in X_{n+1} arbeiten, ist eine andere Zuordnung gewählt worden.

lateinischen Indizes. Im allgemeinen ist das System (k) *nicht holonom* [30]), d. h. es gibt kein System von Koordinaten $\xi^\varkappa$, zu welchen dieses System gehören könnte. Das Kriterium der Holonomität ist bekanntlich:

$$\partial_{[\mu} \overset{k}{e}_{\lambda]} = 0. \tag{42}$$

Es sollen jetzt in der X_n neben Vektoren und Affinoren auch Punktgrößen definiert werden. Dazu ordnen wir jedem Punkte P der X_n eine P_n [31]) zu und betrachten das $(n+1)$-eder gebildet durch den Punkt P selbst, den wir mit $\underset{0}{\mathfrak{u}}$ bezeichnen, und durch n in der örtlichen P_n beliebig, aber allgemein gewählten Punkten $\underset{i}{\mathfrak{u}}$. Dieses Punktsystem soll mit (c) angedeutet werden. Beim Übergang zu einem neuen Punktsystem (C) nennen wir die neuen Maßpunkte $\underset{\odot}{\mathfrak{u}}$, $\underset{I}{\mathfrak{u}}$. Über die gegenseitige Lage der Vektoren $\underset{i}{e}$ und der Punkte $\underset{i}{\mathfrak{u}}$ machen wir vorläufig keine Voraussetzungen. Jeder Punkt $\mathfrak{v}$ in einer örtlichen P_n läßt sich in der bekannten Möbius'schen Weise linear in die Maßpunkte ausdrücken. Dabei ist es nötig, die Bestimmungszahlen selbst, und nicht nur ihre Verhältnisse, als wesentlich aufzufassen, und somit jedem Punkte ein Möbius'sches Gewicht beizulegen, da sonst die Addition von Punkten keine Bedeutung haben würde. Ändert man das Gewicht eines Punktes durch Multiplikation mit einer Potenz der Determinante der Transformation, die (k) in (K) überführt, so entsteht eine Größe, die wir „Punktdichte" nennen können. Vorläufig wollen wir alle Punkte, auch die bisher zur Sprache gebrachten, „*Punktdichten*" nennen, um die Möglichkeit offen zu behalten, die Transformation durch Multiplikation mit einer Potenz der erwähnten Determinante zu vereinfachen und sodann die Größen, die dieser vereinfachten Transformation unterliegen, „*Punkte*" zu nennen [32]).

Sind $\mathfrak{v}^c$ die alten, $\mathfrak{v}^C$ die neuen Bestimmungszahlen einer kontravarianten Punktdichte $\mathfrak{v}$, so hat die Transformationsformel die Form

$$\mathfrak{v}^C = \mathfrak{A}^C_a \mathfrak{v}^a; \qquad \begin{array}{l} a,\dots,g = 0, 1,\dots,\mathrm{n} \\ A,\dots,G = \odot, \bar{1},\dots,\bar{\mathrm{n}} \end{array}. \tag{43}$$

Die „kovarianten Punktdichten" sind geometrisch als Hyperebenen zu denken und ihre Bestimmungszahlen transformieren sich folgendermaßen:

$$\mathfrak{w}_A = \mathfrak{A}^c_A \mathfrak{w}_c. \tag{44}$$

Die Definition der zu den Punktdichten gehörigen kovarianten, kontravarian-

[30]) Vergl. J. A. Schouten, 1929, 1.

[31]) Unter P_n verstehen wir eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit einer gewöhnlichen projektiven Geometrie.

[32]) Dementsprechend sind die Punktdichten mit gothischen Kernbuchstaben bezeichnet, während die später auftretenden Punkte lateinische Kernbuchstaben bekommen.

ten und gemischten Punktgrößendichten höheren Grades unterscheidet sich nun von der Definition der Affinoren dadurch, daß sie die Gleichung (43) statt der Transformationsformel der kontravarianten Vektoren als Ausgangspunkt nimmt. Alle Punktgrößendichten sollen mit einem gothischen Kernbuchstaben angegeben werden. Auch für Vektor- und Affinordichten verwenden wir, wie üblich gothische Kernbuchstaben. Die Größe zweiten Grades $\mathfrak{E}_a^c$ ist die zu den in (43) und (44) definierten Punktdichten zugehörige *Einheitsgröße.* Sie spielt dieselbe Rolle wie der Einheitsaffinor A_λ^ν für Vektorgrößen und genügt offenbar den Gleichungen:

$$(45)\qquad \left|\begin{array}{l} \mathfrak{E}_{a\,A}^{C\,a} = \mathfrak{E}_A^C \overset{*}{=} \begin{cases} 1, & C = A \\ 0, & C \neq A \end{cases} \\[2ex] \mathfrak{E}_{A\,a}^{c\,A} = \mathfrak{E}_a^c \overset{*}{=} \begin{cases} 1, & c = a \\ 0, & c \neq a. \end{cases} \end{array}\right.$$

Infolge unserer Voraussetzung bezüglich $\underset{0}{\mathfrak{u}}$ und $\underset{\odot}{\mathfrak{u}}$ ist

$$(46)\qquad \mathfrak{E}_\odot^k \overset{*}{=} 0, \qquad \mathfrak{E}_0^K \overset{*}{=} 0,$$

aber im allgemeinen

$$(47)\qquad \mathfrak{E}_0^\odot \neq 0, \qquad \mathfrak{E}_\odot^0 = 1/\mathfrak{E}_0^\odot \neq 0.$$

Einfachheitshalber sei außerdem Unimodularität der Transformation angenommen:

$$(48)\qquad |\mathfrak{E}_a^C| = 1.$$

Die Wahl der *Lage* der neuen Grundpunktdichten wird dadurch offenbar *nicht* eingeschränkt.

§ 2. Punktdichtenübertragungen.

Eine lineare Punktdichtenübertragung ist gegeben durch Gleichungen von der Form

$$(49)\qquad \left\{\begin{array}{l} \delta \mathfrak{v}^c = d\mathfrak{v}^c + \Lambda_{a\mu}^c\, \mathfrak{v}^a\, d\xi^\mu \\ \delta \mathfrak{w}_a = d\mathfrak{w}_a - \Lambda_{a\mu}^c\, \mathfrak{w}_c\, d\xi^\mu. \end{array}\right.$$

Die griechischen Indizes beziehen sich auf das Koordinatensystem (ν) in X_n, die lateinischen dagegen auf das System (c) der Grundpunktdichten. Geometrisch bedeutet dies, daß die lokale P_n in irgendeinem Punkte P der X_n sich projektiv auf die lokale P_n in jedem Nachbarpunkte Q abbildet. Diese Idee geht auf Cartan zurück [33]).

[33]) E. Cartan, 1922, 6; vgl. 1924, 4, S. 214.

Beim Übergang zu dem neuen System von Maßvektoren (N) in der X_n und festgehaltenen Grundpunktdichten in den lokalen P_n transformieren sich die $\Lambda_{a\mu}^c$ folgendermaßen

$$(50)\qquad \Lambda_{a\mathrm{M}}^c = \Lambda_{a\mu}^c A_{\mathrm{M}}^\mu,$$

während beim Übergang zu dem neuen System (C) und festgehaltenen Maßvektoren in den lokalen E_n folgende Transformationsformel gilt

$$(51)\qquad \Lambda_{A\mu}^C = \mathfrak{E}_{cA}^{Ca} \Lambda_{a\mu}^c + \mathfrak{E}_b^C\, \partial_\mu \mathfrak{E}_A^b; \qquad \partial_\mu = \partial/\partial\xi^\mu$$

oder ausgeschrieben unter Berücksichtigung von (46):

$$(52)\qquad \left\{\begin{array}{ll} (\alpha) & \Lambda_{I\mu}^K = \mathfrak{E}_{kI}^{Ki} \Lambda_{i\mu}^k + \mathfrak{E}_{kI}^{K0} \Lambda_{0\mu}^k + \mathfrak{E}_j^K\, \partial_\mu \mathfrak{E}_I^j \\ (\beta) & \Lambda_{\odot\mu}^K = \mathfrak{E}_{k\odot}^{K0} \Lambda_{0\mu}^k \\ (\gamma) & \Lambda_{I\mu}^\odot = \mathfrak{E}_{k\,I}^{\odot\,i} \Lambda_{i\mu}^k + \mathfrak{E}_{0I}^{\odot i} \Lambda_{i\mu}^0 + \mathfrak{E}_i^\odot\, \partial_\mu \mathfrak{E}_I^i + \mathfrak{E}_0^\odot\, \partial_\mu \mathfrak{E}_I^0 + \mathfrak{E}_{k\,I}^{\odot\,0} \Lambda_{0\mu}^k \\ (\delta) & \Lambda_{\odot\,\mu}^\odot = \mathfrak{E}_{0\odot}^{\odot 0} \Lambda_{0\mu}^0 + \mathfrak{E}_{k\odot}^{\odot 0} \Lambda_{0\mu}^k + \mathfrak{E}_0^\odot\, \partial_\mu \mathfrak{E}_\odot^0. \end{array}\right.$$

Man bekommt die Transformationsformeln der $\Lambda_{a\mu}^c$ in der üblichen Weise (wie für die Parameter einer linearen Vektorübertragung) indem man von der Tatsache ausgeht, daß die Abbildung der P_n in P auf die P_n in Q vom Koordinatensystem unabhängig ist. Aus $(52, \beta)$ geht hervor, daß sich die $\Lambda_{0\mu}^k$ linear homogen transformieren. Da das System von Vektoren $\overset{k}{e}_\mu$ bisjetzt noch nicht festgelegt ist, kann es, vorausgesetzt, daß die Determinante von $\Lambda_{0\mu}^k$ nicht verschwindet, festgelegt werden durch die Forderung

$$(53)\qquad \overset{k}{e}_\mu = \frac{1}{c} \Lambda_{0\mu}^k,$$

wo c eine (von Null verschiedene) *Konstante* ist, über welche erst später verfügt werden wird. Aus $(52, \beta)$ folgt dann die Gleichung:

$$(54)\qquad \mathfrak{E}_{i\odot}^{K0} = A_i^K.$$

Man kann nun die Frage stellen, wann zwei verschiedene Punktdichtenübertragungen mit Parametern $\Lambda_{a\mu}^c$ und $'\Lambda_{a\mu}^c$ (die auf dieselben Grundpunktdichten bezogen sind) dieselbe Abbildung der P_n aufeinander erzeugen, wenn es sich nur um die Lage der abgebildeten Punkte handelt und von den Gewichten abgesehen wird. Offenbar ist dies dann und nur dann der Fall, wenn die

$$(55)\qquad \mathfrak{v}^c - {'\Lambda}_{a\mu}^c \mathfrak{v}^a\, d\xi^\mu$$

proportional zu den

$$(56)\qquad \mathfrak{v}^c - \Lambda_{a\mu}^c \mathfrak{v}^a\, d\xi^\mu$$

sind für jede beliebige Punktdichte $\mathfrak{v}^c$ und jeden beliebigen Vektor $d\xi^\mu$. Dies ist aber dann und nur dann der Fall, wenn es einen Skalar q gibt, sodaß

(57) $$('\Lambda^c_{a\mu} - \Lambda^c_{a\mu})\, d\xi^\mu = \mathfrak{E}^c_a\, q.$$

q muß sich linear homogen durch $d\xi^\mu$ ausdrücken lassen $q = w_\mu\, d\xi^\mu$, und als notwendige und hinreichende Bedingung ergibt sich also, daß es einen kovarianten Vektor w_μ geben muß, so daß

(58) $$'\Lambda^c_{a\mu} - \Lambda^c_{a\mu} = \mathfrak{E}^c_a\, w_\mu.$$

Die Gleichung

(59) $$'\Lambda^c_{a\mu} = \Lambda^c_{a\mu} + \mathfrak{E}^c_a\, w_\mu$$

mit beliebigem Vektor w_μ liefert uns also die allgemeine Formel für alle Übertragungen $'\Lambda^c_{a\mu}$, die — abgesehen von den Gewichten — dieselbe Punktübertragung erzeugen wie die $\Lambda^c_{a\mu}$. Da wir im Folgenden als wesentlich verschieden nur zwei solche Punktdichtenübertragungen betrachten werden, bei welchen nicht nur die Gewichte sondern auch die Lage der übertragenen Punktdichten verschieden ist, so können wir Vereinfachungen herbeiführen, indem wir eine gegebene Übertragung durch eine der durch (59) gegebenen Übertragungen ersetzen. Wir nutzen diese Möglichkeit aus, indem wir, ausgehend von einer beliebigen gegebenen Punktdichtenübertragung mit den Parametern $'\Lambda^c_{a\mu}$, diese ersetzen durch eine neue mit den Parametern $\Lambda^c_{a\mu}$, die außer der Formel (59) noch folgender Gleichung genügen

(60) $$\Lambda^c_{c\mu} = 0.$$

Der Vektor w_μ ist durch diese Forderungen eindeutig bestimmt:

(61) $$w_\mu = \frac{1}{n+1}\, '\Lambda^c_{c\mu}.$$

Aus (51) und (48) folgt

(62) $$\Lambda^C_{C\mu} = \Lambda^c_{c\mu} + \mathfrak{E}^C_b\, \partial_\mu \mathfrak{E}^b_C = \Lambda^c_{c\mu} - \partial_\mu \log|\mathfrak{E}^C_a| = \Lambda^c_{c\mu}.$$

Daraus geht hervor, daß die Forderung (60) einen invarianten Charakter hat, und daß es also belanglos ist, welches System von Grundpunktdichten wir bei der Berechnung der bevorzugten Übertragung mit Hilfe von (59) zugrunde gelegt haben.

Nun versuchen wir noch die Grundpunktdichten $\underset{a}{\mathfrak{u}}$ so zu wählen, daß auch $\Lambda^0_{0\mu}$ verschwindet. Aus der Transformationsformel (52, δ) folgt, daß es stets möglich ist, die Grundpunktdichten (C) so zu wählen, daß die Gleichung

(63) $$\Lambda^{\odot}_{\odot\mu} = 0$$

erhalten bleibt. Dazu ist notwendig und hinreichend, daß

(64) $$\mathfrak{E}^{\odot 0}_{k\odot}\, \Lambda^k_{0\mu} + \mathfrak{E}^{\odot}_0\, \partial_\mu \mathfrak{E}^0_{\odot} = 0$$

ist, oder infolge (53):

(65) $$\mathfrak{E}^{\odot}_k\, A^k_\mu + \mathfrak{E}^{\odot}_0\, \partial_\mu \log \mathfrak{E}^0_{\odot} \overset{*}{=} 0.$$

Schreiben wir jetzt

(66) $$\Delta = |A^K_i|,$$

so ergibt sich aus (54):

(67) $$\Delta = |\mathfrak{E}^{0\,K}_{\odot\, i}| = (\mathfrak{E}^0_{\odot})^n\, |\mathfrak{E}^K_i|,$$

woraus unter Berücksichtigung von (46), (47) und (48) des Par. 1 folgt

(68) $$\mathfrak{E}^0_{\odot} = \Delta^{1/n+1}.$$

Aus (65) lassen sich jetzt die $\mathfrak{E}^{\odot}_i$ berechnen und aus (54) die $\mathfrak{E}^K_i$. Schreiben wir jetzt kurz $\mathfrak{n} = \frac{1}{n+1}$, so läßt sich das Resultat samt Umkehrung in folgender Tabelle zusammenfassen

(69) $$\left\{\begin{array}{ll|l} & \mathfrak{E}^C_A \overset{*}{=} \delta^C_A & \mathfrak{E}^c_a \overset{*}{=} \delta^c_a \\ & \mathfrak{E}^{\odot}_0 \overset{*}{=} \Delta^{-\mathfrak{n}} & \mathfrak{E}^0_{\odot} \overset{*}{=} \Delta^{\mathfrak{n}} \\ & \mathfrak{E}^{\odot}_i \overset{*}{=} -\frac{\mathfrak{n}}{c}\Delta^{-\mathfrak{n}}\, \partial_i \log\Delta & \mathfrak{E}^0_I \overset{*}{=} \frac{\mathfrak{n}}{c}\Delta^{\mathfrak{n}}\, \partial_I \log\Delta \\ & \mathfrak{E}^K_0 \overset{*}{=} 0 & \mathfrak{E}^k_{\odot} \overset{*}{=} 0 \\ & \mathfrak{E}^K_i \overset{*}{=} \Delta^{-\mathfrak{n}} A^K_i & \mathfrak{E}^k_I \overset{*}{=} \Delta^{\mathfrak{n}} A^k_I \\ \multicolumn{3}{l}{\quad \mathfrak{n} = \frac{1}{n+1}, \quad \partial_i = A^\mu_i\, \partial_\mu, \quad \partial_I = A^\mu_I\, \partial_\mu, \quad \Delta = |A^K_i|.} \end{array}\right.$$

Die Transformation der Grundpunktdichten in P_n ist jetzt mit der Transformation $(k) \to (K)$ der Bezugssysteme in der X_n fest gekuppelt, d. h. jedem System von $\underset{k}{e^\nu}$ in X_n entspricht ein bestimmtes System von Grundpunktdichten in P_n.

Hier ist nun der Ort, wo die oben offengehaltene Möglichkeit der Vereinfachung der Transformationsformeln zur Verwendung gelangt. Als *kontra-* bzw. *kovariante Punkte* wollen wir Größen definieren mit der Transformationsformel

(70) $$v^C = E^C_a\, v^a$$

bzw.

(71) $$w_A = E^c_A\, w_c,$$

wo

$$E^C_a = \mathfrak{E}^C_a\, \Delta^{\mathfrak{n}}, \qquad E^c_A = \mathfrak{E}^c_A\, \Delta^{-\mathfrak{n}},$$

oder ausgeschrieben

$$(72)\qquad \left\{\begin{array}{l|l} E_0^{\odot} \overset{*}{=} 1 & E_{\odot}^{0} \overset{*}{=} 1 \\ E_i^{\odot} \overset{*}{=} -\frac{\mathfrak{n}}{c}\,\partial_i \log \Delta & E_I^{0} \overset{*}{=} \frac{\mathfrak{n}}{c}\,\partial_I \log \Delta \\ E_0^{K} \overset{*}{=} 0 & E_{\odot}^{k} \overset{*}{=} 0 \\ E_i^{K} \overset{*}{=} A_i^{K} & E_I^{k} \overset{*}{=} A_I^{k}. \end{array}\right.$$

Dagegen verstehen wir unter einer kontravarianten Punktdichte $\overset{\mathfrak{k}}{\mathfrak{v}}{}^c$ vom Gewicht $\mathfrak{n}+\mathfrak{k}$ bzw. einer kovarianten Punktdichte $\overset{-\mathfrak{k}}{\mathfrak{w}}{}_a$ vom Gewicht $-\mathfrak{n}-\mathfrak{k}$ Größen, die der Transformatioasformel

$$(73)\qquad \overset{\mathfrak{k}}{\mathfrak{v}}{}^C = \Delta^{-\mathfrak{n}-\mathfrak{k}}\, E_a^C\, \overset{\mathfrak{k}}{\mathfrak{v}}{}^a$$

bzw.

$$(74)\qquad \overset{-\mathfrak{k}}{\mathfrak{w}}{}_A = \Delta^{\mathfrak{n}+\mathfrak{k}}\, E_A^c\, \overset{-\mathfrak{k}}{\mathfrak{w}}{}_c$$

genügen. E_a^c ist die zu den Punktgrößen zugehörige Einheitsgröße, die sich in bezug auf c bzw. a wie ein kontra- bzw. kovarianter Punkt transformiert. Dagegen transformiert sich dię Größe $\mathfrak{E}_a^c$ in bezug auf c bzw. a wie eine kontra- bzw. kovariante Punktdichte von Gewicht $\mathfrak{n}$ bzw. $-\mathfrak{n}$, und es ist also sowohl $E_a^c \overset{*}{=} \delta_a^c$, $E_A^C \overset{*}{=} \delta_A^C$ als $\mathfrak{E}_a^c \overset{*}{=} \delta_a^c$, $\mathfrak{E}_A^C \overset{*}{=} \delta_A^C$. Schreiben wir für die Maßpunkte $\underset{a}{a}{}^c$ und für die reziproken kovarianten Maßpunkte $\overset{c}{a}{}_a$, so ist $E_a^c = \overset{b}{a}{}_a\, \underset{b}{a}{}^c$, $\mathfrak{E}_a^c = \overset{b}{\mathfrak{u}}{}_a\, \underset{b}{\mathfrak{u}}{}^c$.

Aus (72) folgt für die Transformation der kontra- und kovarianten Punkte:

$$(75)\qquad \left\{\begin{array}{l|l} v^K = A_i^K v^i & w_I = \frac{\mathfrak{n}}{c}\, w_0\, \partial_I \log \Delta + A_I^k w_k \\ v^{\odot} = v^0 - \frac{\mathfrak{n}}{c}\, v^i\, \partial_i \log \Delta & w_{\odot} = w_0, \end{array}\right.$$

aus welchen Formeln wir folgende Eigenschaften ablesen:

1. Jedem Punkt v^c ist in eindeutiger Weise ein kontravarianter Vektor mit den Bestimmungszahlen v^k zugeordnet, jeder Punktdichte vom Gewicht $\mathfrak{k}$, also eine kontravariante Vektordichte vom Gewicht $\mathfrak{k}$. Jeder von P ausgehenden Richtung in der örtlichen P_n entspricht in eineindeutiger Weise eine von P ausgehende Richtung in der örtlichen E_n.

2. Jedem Skalar p ist in umkehrbar eindeutiger Weise der 0-Punkt mit der Bestimmungszahl p zugeordnet.

3. Jedem kovarianten Punkt (Hyperebene) w_a ist in eindeutiger Weise ein Skalar mit der Bestimmungszahl w_0 zugeordnet.

4. Jedem kovarianten Vektor w_i ist in umkehrbar eindeutiger Weise ein kovarianter Punkt w_a mit den Bestimmungszahlen w_i, $w_0 = 0$ zugeordnet,

jeder kovarianten Vektordichte vom Gewicht $\mathfrak{k}$ also eine kovariante Punktdichte vom Gewicht $\mathfrak{k}$.

Wir lassen die in dieser Weise eingeführten einfacheren Punktgrößen vorläufig außer Spiel und fahren fort mit der Behandlung der Übertragung, der durch (43) und (44) definierten Punktgrößendichten vom Gewicht $\mathfrak{n}$ bzw. $-\mathfrak{n}$. Einfachheitshalber schreiben wir kontravariante Punktdichten vom Gewicht $\mathfrak{n}$ bzw. kovariante Punktdichten vom Gewicht $-\mathfrak{n}$ kurz $\mathfrak{v}^c$ bzw. $\underset{a}{\mathfrak{w}}$ statt $\mathfrak{v}^c$ bzw. $\mathfrak{w}_a$.

Wird jetzt auch das Linienelement $d\xi^\nu$ in Bezug auf das System (k) angegeben, so tritt an Stelle von (49)

$$(76)\qquad \left\{\begin{array}{l} \delta \mathfrak{v}^c = d\mathfrak{v}^c + \Lambda_{aj}^c\, \mathfrak{v}^a (d\xi)^j \\ \delta \mathfrak{w}_a = d\mathfrak{w}_a - \Lambda_{aj}^c\, \mathfrak{w}_c (d\xi)^j \end{array}\right. ; \qquad (d\xi)^j = A_\mu^j\, d\xi^\mu,$$

wo

$$(77)\qquad \Lambda_{aj}^c = \Lambda_{a\mu}^c\, A_j^\mu$$

und statt (50, 51) kommt

$$(78)\qquad \Lambda_{AJ}^C = \mathfrak{E}_{cA}^{Ca}\, A_J^j\, \Lambda_{aj}^c + \mathfrak{E}_b^C\, \partial_J\, \mathfrak{E}_A^b$$

oder ausgeschrieben, unter Berücksichtigung von (69):

$$(79)\qquad \Lambda_{\odot J}^{\odot} = 0,$$

$$(80)\qquad \Lambda_{\odot J}^{K} = c\, \overset{K}{e}{}_J \overset{*}{=} c A_J^K,$$

$$(81)\qquad \Lambda_{IJ}^K \overset{*}{=} A_{kIJ}^{Kij}\, \Lambda_{ij}^k + A_l^K\, \partial_J A_I^l + \mathfrak{n}\,(A_I^K\, \partial_J \log \Delta + A_J^K\, \partial_J \log \Delta),$$

$$(82)\qquad \Lambda_{IJ}^{\odot} \overset{*}{=} A_{IJ}^{ij}\, \Lambda_{ij}^0 - \mathfrak{n}\, A_{IJ}^{ij}\, \Lambda_{ij}^k\, \partial_k \log \Delta + \mathfrak{n}\, \partial_J \partial_I \log \Delta - \mathfrak{n}(\partial_l \log \Delta)\, \partial\; A_I^l - \\ - \mathfrak{n}^2 (\partial_I \log \Delta)\, \partial_J \log \Delta.$$

Es verdient Beachtung, daß c weder in (81) noch in (82) auftritt.

§ 3. Spezialisierung der Punktdichtenübertragungen und verallgemeinerte projektive Geometrie.

Es sei jetzt in der X_n eine affine (d. h. symmetrische lineare) Übertragung bis auf bahntreue Transformationen gegeben. Wäre die Übertragung projektiv-euklidisch [34]), so läge der Fall der gewöhnlichen n-dimensionalen projektiven Geometrie vor. Wir haben also mit einer verallgemeinerten projektiven Differentialgeometrie zu tun. Analytisch bedeutet die aufgestellte Forderung, daß in der Gleichung

$$(83)\qquad \delta v^\nu = dv^\nu + \Gamma_{\lambda\mu}^\nu\, v^\lambda\, d\xi^\mu$$

[34]) D. i. durch bahntreue Transformation in eine euklidische überführbar.

die $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$ nur bis auf Transformationen der Form

$$(84) \qquad {}'\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} = \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} + A^{\nu}_{\lambda} p_{\mu} + A^{\nu}_{\mu} p_{\lambda},$$

wo p_λ ein beliebiges Vektorfeld ist, festliegen. Man kann dieselbe Übertragung in bezug auf das System (k) geben; (83) ist dann gleichwertig mit

$$(85) \qquad \delta v^k = dv^k + \Gamma^k_{ij} v^i (d\xi)^j,$$

wo

$$(86) \qquad \Gamma^k_{ij} = A^{k\lambda\mu}_{\nu i j} \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} + A^k_{\lambda} \partial_j A^{\lambda}_i,$$

woraus hervorgeht, daß (84) gleichwertig ist mit

$$(87) \qquad {}'\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} + A^k_i p_j + A^k_j p_i.$$

Bekanntlich ist Γ^k_{ij} dann und nur dann symmetrisch in i, j, wenn das System (k) holonom ist.

Das Kriterium dafür, daß die Übertragung mit den Parametern ${}'\Gamma^k_{ij}$ inhaltstreu ist [35]) und gerade das Parallelepiped der Maßvektoren $\underset{i}{e}$ in sich überführt, ist, daß ${}'\Gamma^j_{ij}$ verschwindet [36]). Aus (87) folgt also, daß es unter allen Übertragungen, die aus (85) durch bahntreue Transformation entstehen können, *eine einzige* gibt, die gerade diese Eigenschaft besitzt und daß diese Übertragung *in bezug auf eben diese* Maßvektoren die bei bahntreuen Transformationen invarianten Parameter

$$(88) \qquad \overset{*}{\Gamma}{}^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} - \mathfrak{n}(A^k_i \Gamma_j + A^k_j \Gamma_i), \qquad \Gamma_j = \Gamma^l_{lj}$$

hat, die wir nach ihrem Entdecker *Thomassche Parameter* nennen [37]). Es soll nachdrücklich betont werden, daß die Parameter $\overset{*}{\Gamma}{}^k_{ij}$ nicht invariant bei den Transformationen des Systems (k) sind, und sich auch nicht wie die Parameter einer linearen Übertragung transformieren. Letzteres rührt daher, daß die Γ_i keinen Vektor darstellen. In der Tat gilt die Transformationsformel

$$(89) \qquad \overset{*}{\Gamma}{}^K_{IJ} = \overset{*}{\Gamma}{}^k_{ij} A^{Kij}_{kIJ} + A^K_l \partial_J A^l_I + \mathfrak{n}(A^K_I \partial_J \log \Delta + A^K_J \partial_I \log \Delta)$$

aus welcher u. a. zu ersehen ist, daß die $\overset{*}{\Gamma}{}^k_{ij}$ sich *nur* bei der (in unserer Arbeit übrigens nicht zur Sprache kommenden) beschränkten Transformationsgruppe mit konstantem Δ wie die Parameter einer linearen Übertragung transformieren.

[35]) R. K. S. 89.
[36]) J. A. Schouten, 1926, 3, S. 147.
[37]) T. Y. Thomas, 1925, 1.

Es soll nun gezeigt werden, daß durch eine solche bis auf bahntreue Transformationen gegebene affine Übertragung eine Punktdichtenübertragung in eineindeutiger Weise bestimmt ist. Eine Punktdichtenübertragung erzeugt selbst geodätische Linien in der X_n. Dies liegt an der im Par. 2 erwähnten eineindeutigen Korrespondenz zwischen Richtungen durch P in der örtlichen P_n und in der örtlichen E_n. Man erhält eine solche Linie, indem man die zur Punktdichte $\mathfrak{v}^c$ (vom Gewicht $\mathfrak{n}$) der lokalen P_n von P gehörige Punktdichte ${}'\mathfrak{v}^c$ der lokalen P_n im benachbarten Punkte Q konstruiert, wo Q so gewählt ist, daß die Richtung von P nach Q mit der Richtung der $\mathfrak{v}^c$ zugeordneten Vektordichte $\mathfrak{v}^k$ übereinstimmt. Von Q aus geht man weiter in der Richtung der Vektordichte, die der übertragenen Punktdichte zugeordnet ist, u. s. w. Ist also $\mathfrak{v}^c$ die allgemeine Punktdichte einer geodätischen Linie und somit $\mathfrak{v}^k$ die tangierende Vektordichte vom Gewicht $\mathfrak{n}$, so ist für eine geodätische Linie analytisch zu fordern, daß die zur Punktdichte

$$(90) \qquad \mathfrak{v}^j \nabla_j \mathfrak{v}^c = \mathfrak{v}^j \partial_j \mathfrak{v}^c + \Lambda^c_{aj} \mathfrak{v}^a \mathfrak{v}^j$$

gehörige Vektordichte

$$(91) \qquad \mathfrak{v}^j \partial_j \mathfrak{v}^k + \Lambda^k_{ij} \mathfrak{v}^i \mathfrak{v}^j + c\mathfrak{v}^0 \mathfrak{v}^k$$

dieselbe Richtung hat als $\mathfrak{v}^k$. Dies ist aber dann und nur dann der Fall, wenn die $\mathfrak{v}^j \partial_j \mathfrak{v}^k + \Lambda^k_{ij} \mathfrak{v}^i \mathfrak{v}^j$ den $\mathfrak{v}^k$ proportional sind.

Kehren wir jetzt zu der bis auf bahntreue Transformationen gegebenen affinen Übertragung zurück. Aus den Γ^k_{ij} leiten sich die Parameter $\overset{\mathfrak{n}}{\Gamma}{}^k_{ij}$ für kontravariante Vektordichten vom Gewicht $\mathfrak{n}$ bekanntlich ab vermöge der Formel:

$$(92) \qquad \overset{\mathfrak{n}}{\Gamma}{}^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} - \mathfrak{n} A^k_i \Gamma_j \text{ [38]).}$$

Eine geodätische Linie dieser Übertragung ist also dadurch charakterisiert, daß die $\mathfrak{v}^j \partial_j \mathfrak{v}^k + \overset{\mathfrak{n}}{\Gamma}{}^k_{ij} \mathfrak{v}^i \mathfrak{v}^j$ den $\mathfrak{v}^k$ proportional sind.

Stellen wir also *die erste invariante Forderung* auf, daß die geodätischen Linien der beiden Übertragungen zusammenfallen, so ergibt sich, daß die Λ^k_{ij} Gleichungen von der Form

$$(93) \qquad \Lambda^k_{(ij)} = \overset{\mathfrak{n}}{\Gamma}{}^k_{(ij)} + A^k_{(i} \omega_{j)}$$

erfüllen müssen, wo die ω_l sich infolge (81), (26, 27) und (69) folgendermaßen transformieren

$$(94) \qquad \omega_I = A^k_I \omega_k + \mathfrak{n} \partial_I \log \Delta.$$

Nun verschwindet $\Gamma^k_{[ij]}$, wenn das System (k) holonom gewählt wird. In der-

[38]) O. Veblen und T. Y. Thomas, 1924, 2. Vergl. J. A. Schouten und Hlavatý, 1929, 2.

selben Weise wollen wir eine Punktdichtenübertragung mit den Parametern Λ^c_{aj} *symmetrisch* nennen, wenn $\Lambda^k_{[ij]}$ verschwindet, sobald das System (k) holonom gewählt wird. Infolge (81) ist diese Eigenschaft invariant, d. h. sie gilt für *jedes* holonome System (K), wenn sie für *ein* solches System gilt, da infolge der vorausgesetzten Holonomität $\partial_{[j} A^l_{i]} = 0$ wird.

Stellen wir also die *zweite invariante Forderung* auf, daß die Punktdichtenübertragung symmetrisch sei:

$$\Lambda^k_{[ij]} = 0, \qquad \text{wenn } (k) \text{ holonom ist,} \tag{95}$$

so ergibt sich daraus, daß

$$\Lambda^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} + A^k_{(i}\,\omega_{j)} - \mathfrak{n}\,A^k_{(i}\,\Gamma_{j)} \tag{96}$$

ist, woraus unter Berücksichtigung von (60) und (63) folgt

$$\omega_j = -\mathfrak{n}\,\Gamma_j, \tag{97}$$

sodaß schließlich

$$\Lambda^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} - \mathfrak{n}\,(A^k_i\,\Gamma_j + A^k_j\,\Gamma_i) = \overset{*}{\Gamma}{}^k_{ij} \qquad (\text{vgl. } (88)). \tag{98}$$

Die Γ^k_{ij} sind also jetzt unabhängig von der Wahl von p_i in (87) festgelegt.

Die Krümmungsgröße einer symmetrischen Punktdichtenübertragung wird, wie üblich, definiert mittels der Gleichung:

$$2\,\nabla_{[\omega}\nabla_{\mu]}\,\mathfrak{v}^c = -\,\mathfrak{p}_{\omega\mu a}{}^{c}\,\mathfrak{v}^a, \tag{99}$$

woraus sich ergibt

$$\mathfrak{p}_{\omega\mu a}{}^{c} = 2\,\partial_{[\mu}\Lambda^c_{|a|\omega]} + 2\,\Lambda^c_{b[\mu}\,\Gamma^b_{|a|\omega]}. \tag{100}$$

Nun ist

$$\mathfrak{p}_{\omega\mu I}{}^{K} = \mathfrak{E}^{Ki}_{kI}\,\mathfrak{p}_{\omega\mu i}{}^{k} + \mathfrak{E}^{K0}_{kI}\,\mathfrak{p}_{\omega\mu 0}{}^{k} = A^{Ki}_{kI}\,\mathfrak{p}_{\omega\mu i}{}^{k} + \mathfrak{E}^{K0}_{kI}\,\mathfrak{p}_{\omega\mu 0}{}^{k}. \tag{101}$$

Aus (100) folgt aber

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{p}_{\omega\mu 0}{}^{k} &= 2\,\partial_{[\mu}\Lambda^k_{|0|\omega]} + 2\,\Lambda^k_{j[\mu}\Lambda^j_{|0|\omega]} \overset{*}{=} 2c\,\partial_{[\mu}A^k_{\omega]} + \\ &\quad + 2c\,\Gamma^k_{j[\mu}A^j_{\omega]} - 2\mathfrak{n}c\,\Gamma_j A^{k\,j}_{[\mu\omega]} - 2\mathfrak{n}c\,\Gamma_j A^{j\,k}_{[\mu\omega]} = \\ &= 2c\,\nabla_{[\mu}A^k_{\omega]} = 0, \end{aligned}\right. \tag{102}$$

Aus (101) und (102) folgt, daß die $\mathfrak{p}_{\omega\mu i}{}^{k}$ Bestimmungszahlen eines Affinors vierten Grades sind, den wir mit P bezeichnen wollen:

$$P_{\omega\mu i}{}^{k} \overset{*}{=} \mathfrak{p}_{\omega\mu i}{}^{k}. \tag{103}$$

Wir stellen jetzt die *dritte* und *letzte invariante Forderung* auf, daß diese Größe bei einmaliger Faltung über k und ω verschwindet:

$$P_{kji}{}^{k} = 0. \tag{104}$$

Aus (100) ergibt sich dann

$$A^\omega_k\,\{\partial_{[\mu}\Lambda^k_{|i|\omega]} + \Lambda^k{}_{[\mu}\Lambda^j_{|i|\omega]} + \Lambda^k_{0[\mu}\Lambda^0_{|i|\omega]}\} = 0, \tag{105}$$

sodaß infolge (53)

$$c\,(n-1)\,\Lambda^0_{i\mu} = 2\,A^\omega_k\,\{\partial_{[\mu}\Lambda^k_{|i|\omega]} + \Lambda^k_{j[\mu}\Lambda^j_{|i|\omega]}\} \tag{106}$$

oder

$$\Lambda^0_{ij} = \frac{2}{c\,(n-1)}\{-\partial_{[k}\Lambda^k_{|i|j]} + \Lambda^k_{l[j}\Lambda^l_{|i|k]} + \Lambda^k_{i\omega}\,\partial_{[k}A^\omega_{j]}\}. \tag{107}$$

Nennen wir jetzt $\overline{\Gamma}{}^k_{ij}$ diejenige affine Übertragung, deren Parameter im System (k) gleich $\overset{*}{\Gamma}{}^k_{ij}$ sind:

$$\overline{\Gamma}{}^k_{ij} \overset{*}{=} \overset{*}{\Gamma}{}^k_{ij}\,{}^{39)}. \tag{108}$$

Dann ist auch

$$\Lambda^k_{ij} \overset{*}{=} \overline{\Gamma}{}^k_{ij}. \tag{109}$$

Unter Berücksichtigung der Identität

$$\partial_{[k}A^\omega_{j]} \overset{*}{=} A^\omega_l\,\overline{\Gamma}{}^l_{[jk]}\,{}^{40)} \tag{110}$$

nimmt also (107) die folgende Form an:

$$\Lambda^0_{ij} \overset{*}{=} \frac{2}{c(n-1)}\{\partial_{[j}\overline{\Gamma}{}^k_{|i|k]} + \overline{\Gamma}{}^k_{l[j}\overline{\Gamma}{}^l_{|i|k]} + \overline{\Gamma}{}^k_{il}\,\overline{\Gamma}{}^l_{[jk]}\}. \tag{111}$$

Nun sind

$$\overline{R}_{lji}{}^{k} = -2\,\partial_{[l}\overline{\Gamma}{}^k_{|i|j]} - 2\,\overline{\Gamma}{}^k_{m[l}\,\overline{\Gamma}{}^m_{|i|j]} - 2\,\overline{\Gamma}{}^k_{im}\,\overline{\Gamma}{}^m_{[lj]} \tag{112}$$

die Bestimmungszahlen der Krümmungsgröße [41] der Übertragung mit den Parametern $\overline{\Gamma}{}^k_{ij}$ in bezug auf das im allgemeinen nicht holonome System (k) und es ist also

$$\Lambda^0_{ij} \overset{*}{=} \frac{1}{c(n-1)}\,\overline{R}_{kji}{}^{k}. \tag{113}$$

Daß $\overline{R}_{kji}{}^{k}$ symmetrisch ist, folgt, wie bekannt, aus der Inhaltstreue dieser Übertragung [42]. Es ist bemerkenswert, daß die Λ^0_{ij} in jedem (auch nicht holonomen) System (k) symmetrisch in i, j sind, während die Λ^k_{ij} nur in den holonomen Systemen symmetrisch sind. In dieser Weise sind jetzt *alle* Parameter der Punktdichtenübertragung Λ^c_{aj} durch die drei aufgestellten Forderungen eindeutig bestimmt und außerdem hängen sie nicht von der speziellen Wahl von p_i in (87) ab.

[39]) Die Gleichung ohne Stern wäre falsch, da sich die $\overset{*}{\Gamma}{}^k_{ij}$ *nicht* wie Parameter einer linearen Übertragung transformieren.

[40]) J. A. Schouten, 1929, 1, Gleichung (16). $S_{ij}{}^{k}$ verschwindet hier identisch.

[41]) J. A. Schouten, 1929, 1, Gleichung (29).

[42]) R. K. S. 90.

Zusammenfassend gilt also der Satz [43]):

Jeder bis auf bahntreue Transformationen gegebenen affinen Übertragung in X_n ist in eineindeutiger Weise eine Übertragung der kontra- bzw. kovarianten Punktdichten vom Gewicht $\mathfrak{n}$ bzw, $-\mathfrak{n}$ zugeordnet. Diese ist durch folgende drei invariante Forderungen festgelegt: 1. Übereinstimmung der geodätischen Linien, 2. Symmetrie, 3. Verschwinden der durch einmalige Faltung entstehenden Größe $P_{kji}{}^{k}$.

Die Parameter dieser Übertragung Λ^c_{aj} seien hier zusammengestellt:

$$
(114)\qquad \begin{cases} \Lambda^0_{0j} \overset{*}{=} 0, \qquad \Lambda^k_{0j} \overset{*}{=} c\,\delta^k_j, \qquad \Lambda^k_{ij} \overset{*}{=} \overset{*}{\Gamma}{}^k_{ij}, \\ \Lambda^0_{ij} \overset{*}{=} \dfrac{2}{c\,(n-1)} \{\partial_{[j} \overset{*}{\Gamma}{}^k_{|i|k]} + \overset{*}{\Gamma}{}^k_{l[j} \overset{*}{\Gamma}{}^l_{|i|k]} + \overset{*}{\Gamma}{}^k_{il} \overset{*}{\Gamma}{}^l_{[jk]}\}. \end{cases}
$$

Für die Bestimmungszahlen $\mathfrak{p}_{ija}{}^{c}$ der Krümmungsgröße dieser Punktdichtenübertragung findet man leicht:

$$
(115)\qquad \begin{cases} \mathfrak{p}_{iji}{}^{k} \overset{*}{=} P_{iji}{}^{k} \overset{*}{=} \overline{R}_{iji}{}^{k} - \dfrac{2}{n-1} A^k_{[l} \overline{R}_{j]i}, \\ \mathfrak{p}_{iji}{}^{0} \overset{*}{=} 2 \overline{\nabla}_{[j} \overline{R}_{l]i}, \\ \mathfrak{p}_{ij0}{}^{c} \overset{*}{=} 0. \end{cases}
$$

Da aber die Übertragung mit den Parametern $\overline{\Gamma}{}^k_{ij}$ inhaltstreu ist, so folgt die Identität

$$
(116)\qquad \begin{aligned} \overline{R}_{iji}{}^{k} - \frac{2}{n-1} A^k_{[l} \overline{R}_{j]i} = \overline{R}_{iji}{}^{k} + \\ + \frac{2A^k_i}{n^2-1} (n\overline{R}_{[lj]} + \overline{R}_{[jl]}) - \frac{2A^k_{[l}}{n^2-1} (n\overline{R}_{j]i} + \overline{R}_{|i|j]}) \end{aligned}
$$

und $P_{iji}{}^{k}$ ist also identisch geworden mit der Projektivkrümmungsgröße [44]), die sämtlichen Übertragungen mit Parametern von der Form (87) gemeinschaftlich ist.

Bemerkung. Die dritte invariante Forderung kann unter Umständen überflüssig werden. Da die abzuleitende Punktdichtenübertragung in einer vom Bezugssystem unabhängigen Weise mit der bis auf bahntreue Transformationen gegebenen affinen Übertragung zusammenhängen soll, muß die in (103) auftretende Größe $P_{iji}{}^{k}$ eine bei bahntreuen Transformationen unveränderliche Komitante des Systems der Γ^k_{ij} sein. Dasselbe gilt also auch für $P_{kji}{}^{k}$. $P_{kji}{}^{k}$ könnte also irgendeiner Komitante zweiten Grades dieses Systems gleichgesetzt werden und es ließen sich dann die Λ^0_{ij} berechnen. Nun gibt es sicher

[43]) E. Cartan, 1924, 4, J. A. Schouten, 1924, 5.
[44]) H. Weyl, 1921, 2, vergl. R. K. S. 131.

Fälle, wo eine solche Komitante zweiten Grades nicht existiert, z. B. der Fall der gewöhnlichen projektiven Geometrie. In einem solchen Falle muß also $P_{kji}{}^{k}$ verschwinden, die dritte Forderung wird damit überflüssig und es bleiben nur die zwei Forderungen: 1) Übereinstimmung der geodätischen Linien, 2) Symmetrie. Da die Gleichung $P_{kji}{}^{k} = 0$ zur Ableitung der Λ^0_{ij} genügt, ist es nötig, daß jetzt $P_{iji}{}^{k}$ von selbst eine Komitante wird, da sonst unsere Forderungen zu einem Widerspruch führen würden. Dies ist aber in der Tat der Fall, da, wie wir schon oben bemerkten, $P_{iji}{}^{k}$ identisch ist mit der Projektivkrümmungsgröße.

§ 4. Projektive Ableitung von Punktgrößendichten.

In diesem und den folgenden Par. ist angenommen, daß das System (k) stets *holonom* gewählt ist. Es existieren dann Koordinaten ξ^k in der X_n. Dagegen wird über die Punktdichtenübertragung Λ^c_{aj} vorläufig nicht vorausgesetzt, daß sie die spezielle durch (114) bestimmte Gestalt hat. Die zu (49) gehörigen kovarianten Ableitungen:

$$
(117)\qquad \begin{cases} \nabla_j \mathfrak{v}^c = \partial_j \mathfrak{v}^c + \Lambda^c_{aj} \mathfrak{v}^a \\ \nabla_j \mathfrak{w}_a = \partial_j \mathfrak{w}_a - \Lambda^c_{aj} \mathfrak{w}_c \end{cases}
$$

sind keine Punktgrößendichten, da sie sich, was den Index j betrifft, wie kovariante Vektoren transformieren. Aus dem letzten der im Par. 2 aufgezählten Zuordnungssätzen (S. 22) folgt aber, daß diesen Größen in umkehrbar eindeutiger Weise zwei Punktgrößendichten

$$
(118)\qquad \nabla_b \mathfrak{v}^c \qquad \text{bzw.} \qquad \nabla_b \mathfrak{w}_a
$$

(die erste vom Gewicht $\mathfrak{n}$ in bezug auf den Index c, die zweite vom Gewicht $-\mathfrak{n}$ in bezug auf den Index a) zugeordnet sind, deren Bestimmungszahlen $\nabla_j \mathfrak{v}^c$ und $\nabla_j \mathfrak{w}_a$ durch (117) gegeben sind, während $\nabla_0 \mathfrak{v}^c$ und $\nabla_0 \mathfrak{w}_a$ verschwinden:

$$
(119)\qquad \begin{cases} \nabla_0 \mathfrak{v}^c = 0 \\ \nabla_0 \mathfrak{w}_a = 0. \end{cases}
$$

Diese Punktgrößendichten wollen wir im Gegensatz zu den kovarianten Ableitungen (117) die *projektiven Ableitungen* der Felder $\mathfrak{v}^c$ und $\mathfrak{w}_a$ nennen. Einerseits um zu einer formal einfacheren Schreibweise zu gelangen, andererseits um eine Deutung in X_{n+1} anzubahnen, schreiben wir

$$
(120)\qquad \partial_0 \mathfrak{v}^c = 0, \qquad \partial_0 \mathfrak{w}_a = 0
$$

und

$$
(121)\qquad \begin{cases} \nabla_0 \mathfrak{v}^c = \partial_0 \mathfrak{v}^c + \Lambda^c_{a0} \mathfrak{v}^a \\ \nabla_0 \mathfrak{w}_a = \partial_0 \mathfrak{w}_a - \Lambda^c_{a0} \mathfrak{w}_c, \end{cases}
$$

woraus folgt, daß auch $\Lambda^{c}_{a0} = 0$ zu setzen ist. Dies hat vorläufig nur formale Bedeutung.

§ 5. Projektive Ableitung von Skalaren und Punktgrößen.

Ist eine gewöhnliche lineare Übertragung festgelegt, so lautet die Formel für die kovariante Differentiation einer Skalardichte $\mathfrak{p}$ vom Gewicht $\mathfrak{f}$ bekanntlich [45])

$$\mathfrak{w}_j = \nabla_j \mathfrak{p} = \partial_j \mathfrak{p} - \mathfrak{f}\, \Gamma_j \mathfrak{p}, \qquad \Gamma_j = \Gamma^l_{lj} \tag{122}$$

und $\mathfrak{w}_j$ ist eine kovariante Vektordichte vom Gewicht $\mathfrak{f}$. Diese Formel wird in unserem Falle unbrauchbar, da Γ^k_{ij} nur bis auf die bahntreuen Transformationen (87) gegeben ist. Betrachten wir aber, einen Gedanken von Veblen folgend [46]), die Größe $\mathfrak{w}_a$ mit den Bestimmungszahlen

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{w}_j &= \partial_j \mathfrak{p} \\ \mathfrak{w}_0 &= -\frac{c\,\mathfrak{f}}{\mathfrak{n}}\mathfrak{p} = -c(n+1)\,\mathfrak{f}\,\mathfrak{p}, \end{aligned}\right. \tag{123}$$

so lehrt Vergleichung mit (71) und (72), daß

$$\mathfrak{w}_A = \Delta^{-\mathfrak{k}-\mathfrak{n}} \mathfrak{E}^c_A \mathfrak{w}_c = \Delta^{-\mathfrak{k}} E^c_A \mathfrak{w}_c \tag{124}$$

und daß also $\mathfrak{w}_a$ eine Punktdichte vom Gewicht $\mathfrak{f}$ ist. Diese Größe wollen wir die *projektive kovariante Ableitung des Feldes* $\mathfrak{p}$ nennen und schreiben

$$\mathfrak{w}_a = \nabla_a \mathfrak{p} \left\{\begin{aligned} \nabla_j \mathfrak{p} &= \partial_j \mathfrak{p} \\ \nabla_0 \mathfrak{p} &= -\frac{c}{\mathfrak{n}}\mathfrak{f}\,\mathfrak{p}. \end{aligned}\right. \tag{125}$$

Es soll nun bewiesen werden, daß es im allgemeinen *kein zugehöriges projektives Differential geben kann.*

Es ist klar, daß $d\mathfrak{p} = d\xi^j \partial_j \mathfrak{p}$ nicht invariant ist. Aber die Bestimmungszahlen $d\xi^k$ lassen sich auch nicht durch Hinzufügung eines, in einer gegenüber bahntreuen Transformationen invarianten Weise definierten, $d\xi^0$ so ergänzen, daß die Bestimmungszahlen eines Punktes entständen. Dazu wäre doch laut (75) folgende Transformation von $d\xi^0$ erforderlich:

$$d\xi^{\odot} = d\xi^0 - \frac{\mathfrak{n}}{c}\, d\xi^i \partial_i \log \Delta \tag{126}$$

und $d\xi^0$ müßte sich also in der Form

$$d\xi^0 = d\xi^i q_i \tag{127}$$

schreiben lassen, wo die q_i n Zahlen wären, die nur der Forderung zu genügen

[45]) L. c. [38]). [46]) O. Veblen, 1928, 3.

hätten, daß sie sich folgendermaßen transformieren

$$q_I = A^k_I q_k - \frac{\mathfrak{n}}{c}\partial_I \log \Delta. \tag{128}$$

Die q_i sind infolge (75) Bestimmungszahlen eines kovarianten Punktes mit $q_0 = -1$. Der Beweisgang erfordert also den Nachweis, daß sich aus den Λ^c_{aj} kein kovarianter Punkt in invarianter Weise ableiten lassen kann, wenn wirklich die affine Übertragung nur bis auf bahntreue Transformationen gegeben ist, wie es vorausgesetzt wurde, und nicht, entgegen dieser Voraussetzung, irgendein bestimmtes System der Γ^k_{ij} ausgezeichnet ist. Ist nun Γ^k_{ij} ein beliebiges und somit $\Gamma^k_{ij} + A^k_i p_j + A^k_j p_i$ das allgemeine System, so ist

$$\begin{aligned} \Gamma_J + (n+1)\,p_J &= A^j_J \Gamma_j + A^K_j \partial_J A^j_K + (n+1)\, A^j_J p_j \\ &= A^j_J(\Gamma_j + (n+1)\,p_j) - \partial_J \log \Delta. \end{aligned} \tag{129}$$

Wäre also ein Punkt q_a gegeben, so könnte man die p_i festlegen durch die invariante Forderung:

$$q_i = \frac{\mathfrak{n}}{c}(\Gamma_i + (n+1)\,p_i) \tag{130}$$

und damit wäre ein bestimmtes System der Γ^k_{ij} ausgezeichnet.

Mit Hilfe der projektiven Ableitung der Skalardichten (125) sind wir jetzt in der Lage die kovariante Ableitung einer kontravarianten Punktdichte vom Gewicht $\mathfrak{n} + \mathfrak{f}$ zu bestimmen. Dazu wird die Punktdichte $\overset{\mathfrak{k}}{\mathfrak{v}}{}^c$ als Produkt der Punktdichte $\mathfrak{v}^c$ vom Gewicht $\mathfrak{n}$ mit der Dichte $\mathfrak{p}$ vom Gewicht $\mathfrak{f}$ geschrieben. Anwendung der formalen Differentiationsregeln ergibt dann:

$$\left\{\begin{aligned} \nabla_j \overset{\mathfrak{k}}{\mathfrak{v}}{}^c &= \nabla_j \mathfrak{p}\,\mathfrak{v}^c = (\partial_j \mathfrak{p})\,\mathfrak{v}^c + \mathfrak{p}\,\partial_j \mathfrak{v}^c + \mathfrak{p}\,\Lambda^c_{aj}\mathfrak{v}^a \\ &= \partial_j \overset{\mathfrak{k}}{\mathfrak{v}}{}^c + \Lambda^c_{aj} \overset{\mathfrak{k}}{\mathfrak{v}}{}^a, \\ \nabla_0 \overset{\mathfrak{k}}{\mathfrak{v}}{}^c &= \nabla_0 \mathfrak{p}\,\mathfrak{v}^c = -\frac{c}{\mathfrak{n}}\mathfrak{f}\,\mathfrak{p}\,\mathfrak{v}^c = -\frac{c}{\mathfrak{n}}\mathfrak{f}\,\overset{\mathfrak{k}}{\mathfrak{v}}{}^c. \end{aligned}\right. \tag{131}$$

In derselben Weise gilt für die Ableitung einer kovarianten Punktdichte vom Gewicht $-\mathfrak{n} - \mathfrak{f}$:

$$\left\{\begin{aligned} \nabla_j \overset{-\mathfrak{k}}{\mathfrak{w}}_a &= \partial_j \overset{-\mathfrak{k}}{\mathfrak{w}}_a - \Lambda^c_{aj} \overset{-\mathfrak{k}}{\mathfrak{w}}_c \\ \nabla_0 \overset{-\mathfrak{k}}{\mathfrak{w}}_a &= \frac{c}{\mathfrak{n}}\mathfrak{f}\,\overset{-\mathfrak{k}}{\mathfrak{w}}_a. \end{aligned}\right. \tag{132}$$

Zu diesen Ableitungen existiert ebenfalls *kein Differential.* Die projektiven Ableitungen der Punktdichten höheren Grades werden in der üblichen Weise abgeleitet. Zusammenfassend können wir also den Satz aussprechen:

Kontra- bzw. kovariante Punktdichten vom Gewicht $\mathfrak{n}$ *bzw.* $-\mathfrak{n}$ *besitzen eine kovariante Ableitung und eine projektive kovariante Ableitung; die erste ist in bezug auf den Differentiationsindex ein Vektor, in bezug auf den anderen Index eine Punktdichte; die zweite ist in bezug auf beide Indizes eine Punktdichte. Zu beiden gehört dasselbe kovariante Differential. Punktgrößen, Skalardichten und Punktgrößendichten, die sich nicht als Summe von kontravarianten Punktdichten vom Gewicht* $\mathfrak{n}$ *und kovarianten vom Gewicht* $-\mathfrak{n}$ *schreiben lassen, besitzen nur eine projektive kovariante Ableitung, die in dem erste Falle eine Punktgröße und in den beiden letzten Fällen eine Punktgrößendichte ist, und zu der kein kovariantes Differential existiert.*

Aus (131) und (132) folgt für die Parameter der projektiven Ableitung der kontra- bzw. kovarianten Punktdichten vom Gewicht $\mathfrak{n}+\mathfrak{k}$ bzw. $-\mathfrak{n}\ -\mathfrak{k}$:

$$
(133)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\overset{\mathfrak{k}}{\Lambda}{}^{c}_{aj} \overset{*}{=} \Lambda^{c}_{aj},\\
&\overset{\mathfrak{k}}{\Lambda}{}^{c}_{a0} \overset{*}{=} -\frac{c}{\mathfrak{n}}\,\mathfrak{k}\,\delta^{c}_{a}.
\end{aligned}\right.
$$

Wir setzen nun voraus, daß die Λ^{c}_{aj} die speziellen Werte (114), S. 28 besitzen, und setzen diese Werte in (133) ein. In diesem Falle nehmen die Formeln (133) folgende Gestalt an:

$$
(134)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\overset{\mathfrak{k}}{\Lambda}{}^{k}_{ij} = \overset{\mathfrak{k}}{\Lambda}{}^{k}_{ji} \overset{*}{=} \Gamma^{k}_{ij} - \mathfrak{n}\,(A^{k}_{i}\,\Gamma_{j} + A^{k}_{j}\,\Gamma_{i}) \overset{*}{=} \overline{\Gamma}{}^{k}_{ij},\\
&\overset{\mathfrak{k}}{\Lambda}{}^{c}_{j0} \overset{*}{=} c\,\delta^{c}_{j},\\
&\overset{\mathfrak{k}}{\Lambda}{}^{0}_{ij} = \overset{\mathfrak{k}}{\Lambda}{}^{0}_{ji} \overset{*}{=} \frac{1}{c\,(n-1)}\,\overline{R}_{kji}{}^{k},\\
&\overset{\mathfrak{k}}{\Lambda}{}^{c}_{a0} = \Lambda^{c}_{a0} - \frac{c}{\mathfrak{n}}\,\mathfrak{k}\,\delta^{c}_{a} \overset{*}{=} -\frac{c}{\mathfrak{n}}\,\mathfrak{k}\,\delta^{c}_{a}.
\end{aligned}\right.
$$

Eine in dieser Weise mit einer Punktdichtenableitung ausgestattete X_n soll $\mathfrak{P}_n$ heißen. Aus der Zusammenstellung (134) folgt, daß die kontra- bzw. kovarianten Punkte ($\mathfrak{n}+\mathfrak{k}=0$), die sich infolge ihrer Definition (70, 71) schon der besonders einfachen Transformation (72) erfreuen, auch noch die Eigenschaft haben, daß die Parameter ihrer projektiven kovarianten Ableitung symmetrisch werden. Für diese Parameter Π^{c}_{ab} schreibend, erhalten wir nämlich

$$
(135)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\Pi^{k}_{ij} = \Pi^{k}_{ji} \overset{*}{=} \Gamma^{k}_{ij} - \mathfrak{n}\,(A^{k}_{i}\,\Gamma_{j} + A^{k}_{j}\,\Gamma_{i}),\\
&\Pi^{c}_{0a} = \Pi^{c}_{a0} \overset{*}{=} c\,\delta^{c}_{a},\\
&\Pi^{0}_{ij} = \Pi^{0}_{ji} \overset{*}{=} \frac{1}{c\,(n-1)}\,\{\Pi^{k}_{lj}\,\Pi^{l}_{ki} - \partial_{k}\,\Pi^{k}_{ij}\}.
\end{aligned}\right.
$$

Es ist interessant zu bemerken, daß, wie aus (100) folgt, der Unterschied

zwischen $\overset{\mathfrak{k}}{\Lambda}$ und Λ keinen Einfluß hat auf die Krümmungsgröße. Die Krümmungsgrößen für Punkte sowie für Punktdichten jedes Gewichts haben also alle dieselben Bestimmungszahlen, die durch die Formeln (115) gegeben sind.

§ 6. Beziehungen der $\mathfrak{P}_n$ zur A_{n+1}.

Aus (135) folgt, *unabhängig von der Wahl von* c, für die Transformation der Π^{c}_{ab}:

$$
(136)\qquad \Pi^{C}_{AB} = E^{C\,a\,b}_{c\,A\,B}\,\Pi^{c}_{ab} + E^{C}_{b}\,\partial_{B}\,E^{b}_{A},
$$

wenn wir stets für die Ableitungen ∂_0, $\partial_{\odot}$ Null schreiben. (136) ist aber die Transformation der Parameter einer *affinen* Übertragung in einer A_{n+1}. Unserer $\mathfrak{P}_n$ ist also jetzt für jede Wahl von c in eineindeutiger Weise eine A_{n+1} zugeordnet. Den kontra- bzw. kovarianten Punkten der $\mathfrak{P}_n$ entsprechen die kontra- bzw. kovarianten Vektoren der A_{n+1}, den Punktdichten ebenso Vektordichten. Die Π^{c}_{ab} sind die Parameter der Übertragung der Vektorgrößen in der A_{n+1}; sie sind Funktionen der $\xi^1, \ldots, \xi^n$, nicht aber der $(n+1)$-ten Koordinate ξ^0. Aus (72) folgt, daß diese Koordinaten sich so transformieren, daß die ξ^K beliebige Funktionen von $\xi^1, \ldots, \xi^n$ sind, während

$$
(137)\qquad \xi^{\odot} = \xi^{0} - \frac{\mathfrak{n}}{c}\log\Delta.
$$

Die Geometrie in dieser A_{n+1} gründet sich also auf einer beschränkten Transformationsgruppe. Es zeigt sich, daß die Krümmungsgröße $R_{\dot d\dot b a}{}^{c}$ der Übertragung mit den Parametern Π^{c}_{ab}

$$
(138\,\mathrm{a})\qquad R_{\dot d\dot b a}{}^{c} = 2\,\partial_{[b}\,\Pi^{c}_{|a|\,d]} + 2\,\Pi^{c}_{e[b}\,\Pi^{e}_{|a|\,d]}
$$

folgende Form hat

$$
(138\,\mathrm{b})\qquad R_{\dot i\dot j a}{}^{c} \overset{*}{=} \mathfrak{P}_{\dot i\dot j a}{}^{c}, \qquad R_{\dot 0\dot b a}{}^{c} = R_{\dot b\dot 0 a}{}^{c} \overset{*}{=} 0.
$$

Nähere Eigenschaften der Mannigfaltigkeit A_{n+1} werden in den Par. 10—13 erörtert.

§ 7. Die Beziehungen der örtlichen P_n zur örtlichen E_n.

Wir haben bisher die örtliche P_n in keiner Weise festgelegt in bezug auf die örtliche E_n. Nur hat sich im Par. 2 herausgestellt, daß eine eineindeutige Korrespondenz besteht zwischen den von P ausgehenden Richtungen in den beiden zu P gehörigen Mannigfaltigkeiten. Es soll nun versucht werden die P_n auf die E_n abzubilden. Dazu sei auch in der E_n ein $(n+1)$-eder betrachtet, bestehend aus dem Punkte $\underset{0}{e}$ in P und den als Punkte im Unendlichen aufgefaßten kontravarianten Vektoren $\underset{i}{e}$ [47]. $\underset{0}{e} + p\,\underset{i}{e}$ bedeute wie üblich den Endpunkt des Radiusvektors $p\,\underset{i}{e}$. Beim Übergang zum System (K) transformieren sich diese Punkte folgendermaßen:

$$\underset{\odot}{e} = \underset{0}{e}; \qquad \underset{I}{e} = \overset{k}{\underset{I}{A}}\,\underset{k}{e}; \qquad \overset{k}{\underset{I}{A}} \overset{*}{=} A_I^k. \tag{139}$$

Da die Korrespondenz der Richtungen bei der Abbildung berücksichtigt werden muß, kommt $\underset{i}{\mathfrak{u}}$ in der Geraden des Radiusvektors $\underset{i}{e}$. Die Abbildungsgleichungen bekommen also die Form:

$$\begin{array}{l|l} \underset{0}{\mathfrak{u}} = \mathfrak{p}\,\underset{0}{z}\,\underset{0}{e} & \underset{\odot}{\mathfrak{u}} = \Delta^{\mathfrak{n}}\,\mathfrak{p}\,\underset{\odot}{z}\,\underset{\odot}{e} \\ \underset{i}{\mathfrak{u}} = \mathfrak{p}\,(\underset{i}{z}\,\underset{0}{e} + \underset{i}{\alpha}\,\underset{i}{e}) & \underset{I}{\mathfrak{u}} = \Delta^{\mathfrak{n}}\,\mathfrak{p}\,(\underset{I}{z}\,\underset{\odot}{e} + \underset{I}{\alpha}\,\underset{I}{e}). \end{array} \tag{140}$$

Hier ist $\mathfrak{p}$ eine Dichte vom Gewicht $-\mathfrak{n}$, die wir einfachheitshalber (um später mit Punkten statt mit Punktdichten arbeiten zu können) schon als Faktor geschrieben haben, und die z und α sind Koeffizienten, deren Transformationsweise zu bestimmen ist. Aus der aus (43) folgenden Transformationsformel der $\underset{a}{\mathfrak{u}}$:

$$\underset{A}{\mathfrak{u}} = \overset{c}{\underset{A}{\mathfrak{E}}}\,\underset{c}{\mathfrak{u}}; \qquad \overset{c}{\underset{A}{\mathfrak{E}}} \overset{*}{=} \mathfrak{E}_A^c \tag{141}$$

ergibt sich leicht:

$$\underset{A}{z} = \overset{c}{\underset{A}{E}}\,\underset{c}{z}; \qquad \overset{c}{\underset{A}{E}} \overset{*}{=} E_A^c \tag{142}$$

und

$$\underset{I}{\alpha} = \delta_I^k\,\underset{k}{\alpha}. \tag{143}$$

Aus der letzten Gleichung folgt aber mit Hilfe der Transformationen, die aus der Vertauschung zweier Koordinaten bestehen, daß die $\underset{i}{\alpha}$ nicht nur konstant, sondern auch alle untereinander gleich sind. Man kann also diese Koeffizienten in den Faktor $\mathfrak{p}$ hineinnehmen, wodurch sie aus der Formel verschwinden. Aus (142) folgt, daß die $\underset{a}{z}$ Bestimmungszahlen eines kovarianten Punktes z sind.

Es stellt sich somit heraus, daß die Abbildung der P_n auf die E_n noch in weitesten Grenzen frei wählbar ist, und daß zu ihrer Festlegung gerade eine kovariante Punktdichte $\mathfrak{p}\,z$ vom Gewicht $-\mathfrak{n}$ nötig ist. Die Hyperebene dieser Punktdichte hat eine einfache geometrische Bedeutung. Löst man nämlich $\underset{i}{e}$ aus den Gleichungen (140), so ergibt sich

$$\underset{i}{e} = \frac{1}{\mathfrak{p}}\left(\underset{i}{\mathfrak{u}} - \frac{\underset{i}{z}}{\underset{0}{z}}\,\underset{0}{\mathfrak{u}}\right) \tag{144}$$

und daraus geht erstens hervor, daß e nur von der *Lage* dieser Hyperebene abhängt, *nicht von dem Gewicht* von $\mathfrak{p}\,z$, zweitens aber wegen

$$\frac{1}{\mathfrak{p}}\left(\underset{i}{\mathfrak{u}^c} - \frac{\underset{i}{z}}{\underset{0}{z}}\,\underset{c}{\mathfrak{u}^c}\right)\underset{c}{z} = \frac{1}{\mathfrak{p}}\left(\underset{i}{z} - \frac{\underset{i}{z}}{\underset{0}{z}}\,\underset{0}{z}\right) = 0, \tag{145}$$

daß der Punkt $\underset{i}{e}$ in dieser Hyperebene liegt. z ist also nichts anderes als die Hyperebene der P_n, die sich im „Unendlichfernen" der E_n abbildet.

Die Punktdichtenübertragung, die in der X_n durch eine bis auf bahntreue Transformationen gegebene affine Übertragung festgelegt ist, ist also eine Übertragung, die sich ausschließlich auf benachbarte örtliche P_n bezieht und keineswegs eine Übertragung der Punkte benachbarter örtlicher E_n mit sich bringt. Letztere entsteht vielmehr dann und nur dann, wenn eine kovariante Punktdichte vom Gewicht $-\mathfrak{n}$ sich in invarianter Weise aus den Λ^c_{aj} ableiten läßt, oder sonst aus irgendeinem Grund vorliegt. Sogar induziert die Punktdichtenübertragung der P_n in den E_n nicht einmal eine Richtungsübertragung, da ja bei der Punktdichtenübertragung von P nach einem benachbarten Punkte Q der Punkt P selbst nach einem Punkte der P_n von Q übertragen wird, der im allgemeinen nicht mit Q zusammenfällt.

§ 8. Die Methode von T. Y. Thomas.

Ausgangspunkt der Methode von T. Y. Thomas [48] ist die gewöhnliche Transformationsgleichung der Koordinaten einer X_n in Verbindung mit der Gleichung (137) für $c = -\dfrac{1}{n+1}$:

$$\xi^{\odot} = \xi^0 + \log \Delta. \tag{146}$$

Die durch diese Transformation erzeugte Gruppe in einer X_{n+1} liegt seiner Definition von projektiven Größen zu Grunde. Daraus folgt der Satz:

Wird die Konstante c in (53) gleich $-\dfrac{1}{n+1}$ *gewählt, so sind die im Par. 2 eingeführten kontra- bzw. kovarianten Punkte identisch mit den kontra- bzw. kovarianten projektiven Vektoren von T. Y. Thomas.*

[47] Bei der hier folgenden Punktrechnung werden einfachheitshalber die oberen Indizes fortgelassen.

[48] 1926, 6.

Thomas ergänzt nun die von ihm schon früher eingeführten Parameter $\overset{*}{\Gamma}{}^k_{ij}$ so, daß ein System von Parametern $\overset{t}{\Pi}{}^c_{ab}$ entsteht, die sich so transformieren wie die Parameter einer affinen Übertragung in einer A_{n+1}. Dieses System ist aber identisch mit dem System der Π^c_{ab} aus (135) für $c = -\frac{1}{n+1}$. Über die Ableitung dieses Systems gibt Thomas keine nähere Auskunft[49]). Es läßt sich aber zeigen[50]), daß das System das einzige ist, das folgenden vier Forderungen genügt:

$$(147)\quad \begin{cases} 1.\ \text{Transformation der } \overset{t}{\Pi}{}^c_{ab} \text{ nach (136) mit } c = -\frac{1}{n+1}, \quad \partial_0 = 0, \\ 2.\ \overset{t}{\Pi}{}^k_{ij} = \overset{*}{\Gamma}{}^k_{ij}, \\ 3.\ \overset{t}{\Pi}{}^c_{ab} = \overset{t}{\Pi}{}^c_{ba}, \\ 4.\ \overset{t}{R}{}_{cba}{}^{\cdot\cdot\cdot c} = 2\partial_{[b}\overset{t}{\Pi}{}^c_{|a|c]} + 2\overset{t}{\Pi}{}^c_{d[b}\overset{t}{\Pi}{}^d_{|a|c]} = 0. \end{cases}$$

§ 9. Die Methode von Veblen.

Geht man aus von der Transformationsgleichung

$$(148)\quad \xi^K - \underset{0}{\xi}{}^K = (\partial_j \xi^K)_0 (\xi^j - \underset{0}{\xi}{}^j) + \frac{1}{2!}(\partial_k \partial_j \xi^K)_0 (\xi^j - \underset{0}{\xi}{}^j)(\xi^k - \underset{0}{\xi}{}^k) + \ldots$$

so gibt der erste Term rechts die Transformationskoeffizienten, die der Definition der kontravarianten Vektoren zugrunde liegen. Veblen geht nun aus[51]) von der Reihenentwicklung von $(\xi^K - \underset{0}{\xi}{}^K)\left(\frac{\Delta}{\Delta_0}\right)^{\mathfrak{m}}$ und erhält in dieser Weise die Reihenentwicklung:

$$(149)\quad \xi^K - \underset{0}{\xi}{}^K = \frac{(\partial_j \xi^K)_0 (\xi^j - \underset{0}{\xi}{}^j) + \ldots}{1 + (\partial_j \log \Delta^{\mathfrak{m}})_0 (\xi^j - \underset{0}{\xi}{}^j) + \ldots},$$

die ihm die Transformationskoeffizienten liefert, die er der Definition seiner projektiven Vektoren zugrunde legt. Jeder Transformation (148) ordnet er dazu in eindeutiger Weise die folgende linear gebrochene:

$$(150)\quad \xi^K - \underset{0}{\xi}{}^K = \frac{(\partial_j \xi^K)_0 (\xi^j - \underset{0}{\xi}{}^j)}{1 + (\mathfrak{m}\,\partial_j \log \Delta)_0 (\xi^j - \underset{0}{\xi}{}^j)}$$

zu. Es stellt sich heraus, daß die Glieder zweiter und höherer Ordnung in

[49]) Dasselbe gilt für die Untersuchung von Herrn V. Hlavatý, 1928, 5.

[50]) Siehe den Satz am Ende des Par. 10. [51]) 1928, 3.

(149) verschwinden für den Fall, daß die ξ^K lineare gebrochene Funktionen der ξ^k sind, sofern man

$$(151)\quad \mathfrak{m} = -\mathfrak{n} = -\frac{1}{n+1}$$

wählt. Dieser Fall, der sich also durch besondere Einfachheit auszeichnet, wird von Veblen zugrunde gelegt[52]). In diesem Falle kann man die Transformation (150) mit Hilfe der Koeffizienten $\overset{v}{E}{}^C_a$, die aus den E^C_a aus (72) entstehen für $c = 1$, folgendermaßen schreiben:

$$(152)\quad \xi^K - \underset{0}{\xi}{}^K = \frac{\overset{v}{E}{}^K_0 + (\overset{v}{E}{}^K_j)_0 (\xi^j - \underset{0}{\xi}{}^j)}{\overset{v}{E}{}^0_0 + (\overset{v}{E}{}^0_j)_0 (\xi^j - \underset{0}{\xi}{}^j)}.$$

Ausgehend von dieser Transformation definiert Veblen einen kontravarianten projektiven Vektor als ein System von $n+1$ Bestimmungszahlen $v^c (c = 0, 1, \ldots, \mathrm{n})$, die sich folgendermaßen transformieren:

$$(153)\quad v^C = \overset{v}{E}{}^C_a v^a.$$

Die Transformationsformel der entsprechenden kovarianten projektiven Vektoren lautet dann folgendermaßen:

$$(154)\quad w_A = \overset{v}{E}{}^c_A w_c.$$

Daraus folgt aber, daß die Definition der Veblenschen kontra- und kovarianten projektiven Vektoren sich mit der Definition (70, 71) für $c = 1$ der im Par. 2 eingeführten kontravarianten und kovarianten Punkten deckt, und es besteht also der Satz:

Wird die Konstante c in (53) *gleich* 1 *gewählt, so sind die im Par.* 2 *eingeführten kontra- bzw. kovarianten Punkte identisch mit den kontra- bzw. kovarianten projektiven Vektoren von Veblen.*

Für die Parameter $\overset{v}{\Pi}{}^c_{ab}$ der zu diesen Größen gehörigen Ableitung stellt Veblen folgende Forderungen auf:

$$(155)\quad \begin{cases} 1.\ \text{Transformation nach (136) mit } c = 1;\ \partial_0 = 0. \\ 2.\ \overset{v}{\Pi}{}^c_{ab} = \overset{v}{\Pi}{}^c_{ba}, \\ 3.\ \overset{v}{\Pi}{}^c_{a0} \overset{*}{=} \delta^c_a \text{ [53])}, \\ 4.\ \overset{v}{\Pi}{}^i_{ij} = 0. \end{cases}$$

[52]) Vergl. auch H. P. Robertson, 1928, 2.

[53]) Die Forderung 3. kann — wie wir im nächsten Par. zeigen — ersetzt werden durch die schwächere $3' : \Pi^0_{i0} = 0$, denn aus dieser Forderung und 1, 2, 4, läßt sich 3. ableiten.

Er legt die $\check{\Pi}^c_{ab}$ nicht fest und begnügt sich damit, folgende zwei Sätze zu beweisen:

1°) Jeder projektiven Ableitung mit den Parametern $\check{\Pi}^c_{ab}$, die den Bedingungen 1, 2, 3 aus (155) genügen, kann in eindeutiger Weise ein System von Parametern $'\check{\Pi}^c_{ab}$ zugeordnet werden, die sich in derselben Weise wie die $\check{\Pi}^c_{ab}$ transformieren und der Bedingung 4 genügen. Veblen gibt hierfür die Gleichung:

(156) $$'\check{\Pi}^c_{ab} = \check{\Pi}^c_{ab} - \mathfrak{n}\,(\check{\Pi}^i_{ij}\, E^{jc}_{ab} + \check{\Pi}^i_{ij}\, E^{jc}_{ba}),$$

bemerkt aber nicht ausdrücklich, daß die neuen Parameter der Bedingung 3 nicht mehr genügen, wie die aus (156) folgende Gleichung

(157) $$'\check{\Pi}^0_{0j} = -\mathfrak{n}\,\check{\Pi}^i_{ij}$$

lehrt.

2°) Jeder projektiven Ableitung mit den Parametern $\check{\Pi}^c_{ab}$, die den Bedingungen 1—4 genügen, kann in eindeutiger Weise ein System von Parametern $''\check{\Pi}^c_{ab}$ zugeordnet werden, die sich in derselben Weise wie die $\check{\Pi}^c_{ab}$ transformieren und, außer den aufgezählten, auch der Bedingung

(158) $$''\check{R}_{ab} = 0$$

genügen. Veblen gibt hierfür die Gleichung:

(159) $$''\check{\Pi}^c_{ab} = \check{\Pi}^c_{ab} - \frac{E^c_0\,\check{R}_{ab}}{n-1}.$$

Diese beiden Sätze können aber nicht zusammen dazu benützt werden um, ausgehend von einer projektiven Ableitung mit den Parametern $\check{\Pi}^c_{ab}$, die nur den Bedingungen 1—3 genügen, eine neue Ableitung zu konstruieren, die außerdem den Bedingungen $(155,_4)$ und (158) genügt, da man sich leicht davon überzeugt, daß die Bedingung $(155,_3)$ die nach Anwendung des ersten Satzes nicht mehr erfüllt ist, für die Gültigkeit des zweiten Satzes wesentlich ist.

Durch die Forderungen (155) und (158) sind die neuen $''\check{\Pi}^c_{ab}$ noch nicht vollständig bestimmt. Sie können bestimmt werden durch Hinzufügung einer sechsten Forderung:

(160) $$''\check{\Pi}^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} + A^k_i\,\varphi_j + A^k_j\,\varphi_i$$

wo die φ_i beliebig sind. Die letzte Forderung ist verknüpft mit der Frage nach den Beziehungen zwischen den Parametern $\check{\Pi}^c_{ab}$ der projektiven Ablei-

tung und den Parametern Γ^k_{ij} der affinen bis auf bahntreue Transformationen gegebenen Übertagung. Diese Frage kommt aber bei Veblen überhaupt nicht zur Sprache.

§ 10. Geometrische Deutung der Gleichungen für die Π^c_{ab} in der adjungierten A_{n+1}.

Es hat sich im Par. 6 herausgestellt, daß jeder affinen bis auf bahntreue Transformationen gegebenen Übertragung in X_n in eindeutiger Weise eine affine Übertragung mit den Parametern Π^c_{ab} in einer adjungierten A_{n+1} zugeordnet ist. Die Urvariablen der A_{n+1} sind der beschränkten Transformationsgruppe (137) unterworfen und die Bestimmungszahlen E^C_a und E^c_A des Einheitsaffinors sind in ihrer Abhängigkeit von der Transformation der ξ^k gegeben durch die Gleichungen (72), die wir hier wiederholen:

(161) $$\left\{\begin{array}{ll|ll} E^{\circledcirc}_0 & \overset{*}{=} 1 & E^0_{\circledcirc} & \overset{*}{=} 1 \\ E^{\circledcirc}_i & \overset{*}{=} -\dfrac{\mathfrak{n}}{c}\,\partial_i \log \Delta & E^0_I & \overset{*}{=} \dfrac{\mathfrak{n}}{c}\,\partial_I \log \Delta \\ E^K_0 & \overset{*}{=} 0 & E^k_{\circledcirc} & \overset{*}{=} 0 \\ E^K_i & \overset{*}{=} A^K_i & E^k_I & \overset{*}{=} A^k_I. \end{array}\right.$$

Die Parameter Π^c_{ab} sind gegeben durch die Formeln (135), die wir hier in folgender Form ausschreiben:

(162) $$\left\{\begin{array}{lll} \text{a)} & \Pi^c_{ab} = \Pi^c_{ba} & \\ \text{b)} & \Pi^b_{0a} \overset{*}{=} c\,E^b_a & \\ \text{b')} & \Pi^0_{0j} \overset{*}{=} 0 & \text{(folgt aus b))} \\ \text{c)} & \Pi^k_{ij} \overset{*}{=} \Gamma^k_{ij} - \mathfrak{n}\,(A^k_i\,\Gamma + A^k\,\Gamma_i) & \\ \text{c')} & \Pi^i_{ij} = 0 & \text{(folgt aus c))} \\ \text{d)} & \Pi^0_{ij} = \dfrac{1}{c\,(n-1)}\{\Pi^k_{li}\,\Pi^l_{kj} - \partial_k\,\Pi^k_{ij}\}. & \end{array}\right.$$

(162′) $$\partial_0\,\Pi^c_{ab} = 0 \qquad \text{(folgt aus 162 a) b) c) d)).}$$

Ihre Transformationsweise ist gegeben durch die Formel (136):

(163) $$\Pi^C_{AB} = E^{C\,ab}_{cAB}\,\Pi^c_{ab} + E^C_b\,\partial_B\,E^b_A$$

und für die Krümmungsgröße der A_{n+1} gilt die Gleichung:

(164) $$R_{ab} = R_{\cdot c a b}{}^{c} = 0,$$

woraus folgt:

(164′) $$R_{a0} = R_{0a} = 0.$$

(164′) ist gleichbedeutend damit, daß die R_{ij} sich wie die Bestimmungszahlen einer Größe der X_n transformieren [54]), (162 d)) ist gleichwertig damit, daß die R_{ij} verschwinden.

Ist die A_{n+1} mit der beschränkten Transformationsgruppe der Urvariablen gegeben, so kann man zur X_n zurückkehren, indem man einfach die Urvariablen ξ^k für sich betrachtet. Geometrisch bedeutet dies, daß die A_{n+1} nach ξ^0 „zusammengelegt" wird, d. h. daß alle Punkte identifiziert werden, die sich nur durch verschiedene Werte von ξ^0 unterscheiden.

Die Gleichungen (162—164) sind keineswegs unabhängig. Es gelten nämlich folgende Sätze:

Satz 1. *Aus* (161), (162 a, b′, c′), (162′) *und* (163) *folgen* (162 b) *und* (164′).

Beweis. Schreibt man einerseits $A_i^l\,\Pi^K_{Kl}$ aus mit Hilfe von (163), so ergibt sich infolge (162 c′):

(165) $$0 = -\partial_i \log\Delta + \Pi^k_{00}\frac{n^2}{c^2}(\partial_k\log\Delta)\,\partial_i\log\Delta + \Pi^k_{0i}\frac{n}{c}\,\partial_k\log\Delta + \Pi^k_{0k}\frac{n}{c}\,\partial_i\log\Delta\,.$$

Da aber Δ ganz beliebig wählbar ist (vgl. Fußnote [55])), folgen daraus und aus (162a) die Gleichungen:

(166) $$\Pi^k_{00} = 0,\quad \Pi^k_{0k} = \Pi^k_{k0} = c \text{ (nicht summieren)},\quad \Pi^k_{i0} = \Pi^k_{0i} = 0,\quad k \neq i,$$

die somit eine Folge von (161), (162 a), (162 c′) und (163) sind.

Schreibt man anderseits $A_i^J\,\Pi^B_{BJ}$ aus mit Hilfe von (163), so ergibt sich infolge (162 b′) und (162 c′):

(167) $$0 = -\partial_i\log\Delta + \Pi^b_{b0}\frac{n}{c}\,\partial_i\log\Delta,$$

woraus unter Berücksichtigung von (166) folgt

(168) $$\Pi^0_{00} = c.$$

(166) und (168) ergeben aber (zusammen mit der vorausgesetzten (162 b′)—(162 b).

Werden nun R_{a0} und R_{0a} ausgeschrieben mit Hilfe von (138 a) und berücksichtigt man dabei (162 a), (162 b), (162 c′), (162′), so folgt (164′).

Satz 2. *Aus* (161), (162 a), (162 c′), (162′), (163) *und* (164′) *folgt* (162 b).

Beweis. Wird R_{00} ausgeschrieben mit Hilfe von (138 a), so ergibt sich unter Berücksichtigung der schon aus (161), (162 a), (162 c′) und (163) fol-

[54]) Die letztgenannte Forderung führt nämlich zu den Gleichungen:

$$\frac{n}{c}(R_{i0}\,\partial_j\log\Delta + R_{0j}\,\partial_i\log\Delta) + \frac{n^2}{c^2}R_{00}\,\partial_i\log\Delta\,\partial_j\log\Delta = 0$$

und daraus läßt sich (164′) leicht ableiten.

genden Gleichungen (166):

(169) $$\Pi^0_{00} = c.$$

In derselben Weise ergibt sich

(170) $$\Pi^0_{0i} = \Pi^0_{i0} = 0$$

beim Ausschreiben von $R_{0i} = R_{i0} = 0$. (166), (170) und (169) ergeben aber zusammen (162 b).

Wir setzen im Folgenden voraus, daß die Gleichungen (161) und (163) bestehen und daß die Parameter Π^c_{ab} den Gleichungen (162 a) und (162′) genügen. Es sollen dann die geometrischen Eigenschaften der A_{n+1} untersucht werden, die mit diesen Gleichungen, eventuell unter Hinzunahme weiterer Gleichungen des Systems (162), korrespondieren. Aus (161) d. h. aus der Transformationsgruppe der Urvariablen ξ^c in A_{n+1}:

(171) $$\begin{cases} \xi^K = \xi^K(\xi^k) \\ \xi^{\odot} = \xi^0 - \dfrac{n}{c}\log\Delta \end{cases}$$

folgt, daß die Parameterlinien von ξ^0 in A_{n+1} eine Kongruenz bilden, die unabhängig von dem Koordinatensystem (c) ist, und daß jede X_n *allgemeiner Lage*, d. h. jede X_n, deren n-Richtung nirgends die Richtung der Parameterlinien von ξ^0 enthält, durch geeignete Wahl der Transformation (171) zur Parameterhyperfläche von $\xi^{\odot}$ gemacht werden kann [55]). Mittels der erwähnten Kongruenz sind je zwei X_n allgemeiner Lage in eineindeutiger Weise aufeinander abgebildet. Jede Hyperfläche allgemeiner Lage kann mit Hilfe der Richtung der Parameterlinien von ξ^0 eingespannt werden. Infolge dieser Einspannung wird dann in jeder solchen Hyperfläche eine affine Übertragung induziert, deren Parameter Γ^k_{ij} folgender Gleichung genügen:

(172) $$\Gamma^k_{ij} \overset{*}{=} \Pi^k_{ij},$$

wo das System (k) so gewählt werden soll, daß die Hyperfläche die Parameterhyperfläche von ξ^0 wird. Die X_n wird dadurch zur A_n. Im Folgenden setzen wir voraus, daß sämtliche Hyperflächen allgemeiner Lage mit Hilfe der Richtung der Parameterlinien von ξ^0 eingespannt sind.

Aus der Gleichung

(173) $$\delta\, \underset{0}{e}^{[c_1}\ldots\underset{n}{e}^{c_{n+1}]} = \underset{0}{e}^{[c_1}\ldots\underset{n}{e}^{c_{n+1}]}\,\Pi^b_{bc}\,d\xi^c$$

folgt, daß die Gleichung

(174) $$\Pi^b_{bj} = 0$$

[55]) Letzteres liegt daran, daß es stets möglich ist eine Transformation ($k \to K$) mit vorgegebenem Δ auszuführen.

die notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, daß der $(n+1)$-Vektor der Maßvektoren bei pseudoparalleler Verschiebung in der Parameterhyperfläche von ξ^0 in sich übergeführt wird.

In derselben Weise ergibt sich, daß die Gleichung

$$\Pi^i_{ij} = 0 \tag{175}$$

die notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, daß der n-Vektor der Maßvektoren $\underset{1}{e},\dots,\underset{n}{e}$ bei der zur Übertragung in dieser Parameterhyperfläche gehörigen pseudoparallelen Verschiebung in sich übergeführt wird.

Für die Gleichung (175) gibt es noch eine zweite geometrische Deutung. Es gilt nämlich folgender Satz:

Satz 3. *Die Gleichung* (175) *ist notwendig und hinreichend dafür, daß es in der X_n, die aus der A_{n+1} durch Zusammenlegung nach ξ^0 entsteht, ein eindeutig bestimmtes, zu einem System von affinen Übertragungen gehöriges Bahnkurvensystem gibt von der Eigenschaft, daß seine Thomasschen Parameter $\overset{*}{\Gamma}{}^k_{ij}$ stets, unabhängig von der Wahl der Urvariablen ξ^k, den Π^k_{ij} gleich sind.*

Beweis. Die Notwendigkeit dieser Bedingung ist unmittelbar zu ersehen, da die Gleichung $\overset{*}{\Gamma}{}^i_{ij} = 0$ in jedem Koordinatensystem gilt. Setzen wir nun voraus, daß die Gleichung (175) besteht. Wie sich beim Beweis des Satzes 1 herausgestellt hat, folgt aus (175) unter Berüchsichtigung von (161), (162 a) und (163) die Gleichung:

$$\Pi^k_{a0} \overset{*}{=} c\,E^k_a. \tag{176}$$

Wird aber diese Gleichung in der Transformationsformel (163) berücksichtigt, so nimmt letztere für $C = K$, $A = I$, $B = J$ folgende Gestalt an:

$$\Pi^K_{IJ} = A^{Kij}_{kIJ}\,\Pi^k_{ij} + A^K_i\,\partial_J A^i_I + \mathfrak{n}\,(A^K_I\,\partial_J \log\Delta + A^K_J\,\partial_I \log\Delta) \tag{177}$$

und die Π^k_{ij} transformieren sich also wie die Thomasschen Parameter $\overset{*}{\Gamma}{}^k_{ij}$ einer affinen Übertragung (Vergl. (89), S. 24). Es ist also nur noch zu beweisen, daß sich aus den Gleichungen

$$\Gamma^k_{ij} - \mathfrak{n}\,(A^k_i\,\Gamma_j + A^k_j\,\Gamma_i) \overset{*}{=} \Pi^k_{ij} \tag{178}$$

die Γ^k_{ij} bis auf bahntreue Transformationen (d. h. also Transformationen der Form (87), S. 24) bestimmen lassen und, daß sich die so bestimmten Γ^k_{ij} wie die Parameter einer affinen Übertragung transformieren.

Für $k \neq i$ und $k \neq j$ ergibt sich sofort

$$\Gamma^k_{ij} \overset{*}{=} \Pi^k_{ij}. \tag{179}$$

Für $k = i$ ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} \Gamma^i_{ii} - 2\mathfrak{n}\,\Gamma_i &\overset{*}{=} \Pi^i_{ii} \\ \Gamma^i_{ij} - \mathfrak{n}\,\Gamma_j &\overset{*}{=} \Pi^i_{ij}, \quad i \neq j \end{aligned}\right\} \text{ nicht summieren!} \tag{180}$$

Für fest gewähltes j sind dies n lineare Gleichungen für die n Unbekannten Γ^i_{ij} $(i = 1,\dots,\mathfrak{n}$; *nicht* summieren), deren Matrix den Rang $n-1$ hat und von denen die erste infolge (175) linear abhängig von den $n-1$ letzten ist. Das System hat also unendlich viele Lösungen. Wählen wir zu dem Bezugssystem (k) irgendeine Lösung und werden die also erhaltenen Γ^k_{ij} transformiert wie die Parameter einer affinen Übertragung, so transformieren sich die zugehörigen Thomasschen Parameter $\overset{*}{\Gamma}{}^k_{ij}$ wie die Π^k_{ij} und die Gleichung (178) gilt also auch für das neue Bezugssystem. Die Bahnkurven in X_n sind also unabhängig vom Bezugssystem festgelegt, womit auch der zweite Teil des Satzes bewiesen ist. Es ist bemerkenswert, daß die Lage der Bahnkurven auch unabhängig von der Wahl der Konstante c sowie von den Werten der Π^0_{ij} ist.

Man kann noch in einer anderen Weise zu denselben Bahnkurven gelangen. Bei Berücksichtigung der Formel

$$E^C_a = \Delta^{\mathfrak{n}}\,\mathfrak{E}^C_a, \qquad E^c_A = \Delta^{-\mathfrak{n}}\,\mathfrak{E}^c_A \tag{181}$$

ergibt sich nämlich, daß die Gleichungen (162 b) d. h.

$$\Pi^b_{a0} \overset{*}{=} c\,E^b_a \tag{182}$$

notwendig und hinreichend sind dafür, daß sich die Π^c_{aj} wie die Parameter einer Punktdichtenübertragung transformieren:

$$\Pi^C_{AJ} = \Pi^c_{aj}\,\mathfrak{E}^{Ca}_{cA}\,A^j_J + \mathfrak{E}^C_b\,\partial_J\,\mathfrak{E}^b_A. \tag{183}$$

Setzen wir nun die Gleichung (175) voraus, so folgen daraus die Gleichungen (182) noch nicht. Fügen wir aber zu der Gleichung (175) noch die Voraussetzung (162 b′) zu, so folgen — wie der Satz 1 lehrt — daraus die Gleichungen (182) und das zu der Punktdichtenübertragung mit den Parametern Π^c_{aj} gehörige System von geodätischen Linien in X_n (siehe § 3, S. 25) wird identisch mit dem soeben abgeleiteten.

Ist die Gleichung (175) erfüllt, so gibt es in der X_n eine (bis auf bahntreue Transformationen definierte) affine Übertragung, derart, daß die in jeder Hyperfläche der A_{n+1} allgemeiner Lage induzierte Übertragung bahntreu mit ihr verwandt ist. Das Umgekehrte gilt nicht. Ist in der X_n eine affine Übertragung gegeben und wird die Forderung gestellt, daß die in jeder Hyperfläche allgemeiner Lage induzierte Übertragung bahntreu mit ihr verwandt sein soll, so folgt daraus nur die Gleichung

$$\Pi^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} + A^k_i\,\varphi_j + A^k_j\,\varphi_i, \tag{184}$$

wo φ_i ein beliebiges geometrisches Objekt ist, dessen Bestimmungszahlen sich folgendermaßen transformieren:

$$(185)\quad \varphi_I = A_I^i\left\{\varphi_i - \frac{\mathfrak{n}^3}{c^2}\Pi_{00}^k(\partial_k \log \Delta)\,\partial_i \log \Delta + \frac{\mathfrak{n}^2}{c}\left[\Pi_{0i}^k\,\partial_k \log \Delta + \Pi_{0k}^k\,\partial_i \log \Delta\right]\right\}.$$

Tritt noch die Forderung (175) hinzu, so werden die Π_{ij}^k mit den $\overset{*}{\Gamma}{}_{ij}^k$ identisch, wo die $\overset{*}{\Gamma}{}_{ij}^k$ die Thomasschen Parameter sind, die zu der gegeben Übertragung mit den Parametern Γ_{ij}^k gehören.

Bekanntlich ist

$$(186)\qquad \partial_{[b}\,\Pi_{|c|\,a]}^c = 0$$

die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Übertragung in der A_{n+1} inhaltstreu ist. Infolge (162′) ist (186) aber gleichbedeutend mit

$$(187)\qquad \partial_j\,\Pi_{c0}^c = 0, \qquad \partial_{[j}\,\Pi_{|c|\,i]}^c = 0.$$

Man beweist leicht, daß die umfassendere Forderung:

$$(188)\qquad \partial_j\,\Pi_{c0}^c = 0, \qquad \Pi_{cj}^c = 0$$

die notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, daß der Zuwachs des $(n+1)$-Vektors $\underset{0}{e}{}^{[c_1}\ldots\ldots \underset{n}{e}{}^{c_{n+1}]}$ bei der pseudoparallelen Verschiebung von einem Punkte P der Hyperfläche $\xi^0 = C_1$ nach einem Punkte Q der Hyperfläche $\xi^0 = C_2$ nur von den Werten C_1, C_2 abhängt.

Aus den Gleichungen

$$(189)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \text{a)} & \underset{0}{e}{}^b\,\nabla_b\,\underset{0}{e}{}^c \overset{*}{=} \Pi_{00}^c \\ \text{b)} & \underset{0}{e}{}^b\,\nabla_b\,\overset{0}{e}_a \overset{*}{=} \Pi_{a0}^0 \\ \text{c)} & \underset{0}{e}{}^b\,\nabla_b\,\underset{i}{e}{}^c \overset{*}{=} \Pi_{i0}^c \\ \text{d)} & \underset{0}{e}{}^b\,\nabla_b\,\overset{k}{e}_a \overset{*}{=} \Pi_{a0}^k \end{array}\right.$$

lesen wir ferner unmittelbar folgende Sätze ab:

Satz 4. *Aus* a): *Die Gleichung*

$$(190)\qquad \Pi_{00}^k = 0$$

ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Parameterlinien von ξ^0 *geodätisch sind.*

Satz 5. *Aus* b): *Die Gleichung*

$$(191)\qquad \Pi_{i0}^0 = 0$$

ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die n-Richtung der

Parameterhyperflächen der ξ^0 *bei pseudoparalleler Verschiebung längs einer Parameterlinie der* ξ^0 *in sich übergeht.*

Satz 6. *Aus* c) *und* d): *Die Gleichungen* (190) *und* (191) *zusammen bilden die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß jede in den Parameterhyperflächen von* ξ^0 *liegende Größe*[56]) *bei pseudoparalleler Verschiebung längs einer Parameterlinie von* ξ^0 *in Parameterhyperfläche bleibt.*

Satz 7. *Aus* c) *und* d): *Die Gleichungen*

$$(192\,\text{a})\qquad \Pi_{i0}^k \overset{*}{::} E_i^k\ ^{57)}, \qquad \Pi_{i0}^0 = 0$$

bzw.

$$(192\,\text{b})\qquad \Pi_{i0}^k \overset{*}{::} E_i^k, \qquad \Pi_{00}^k = 0$$

bilden die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß ein in einer Parameterhyperfläche von ξ^0 *liegender kontra- bzw. kovarianter Vektor bei pseudaparalleler Verschiebung längs einer Parameterlinie von* ξ^0 *seine Bestimmungszahlen nur proportional ändert*[58]).

Betrachten wir nun zwei beliebige, allgemein gewählte Hyperflächen allgemeiner Lage, so lassen sich ξ^0 und $\xi^{\odot}$ stets so wählen, daß diese Hyperflächen durch folgende Gleichungen dargestellt werden

$$(193)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \text{a)} & \xi^0 = 0\ ^{59)} \\ \text{b)} & \xi^{\odot} = 0. \end{array}\right.$$

In beiden Hyperflächen sind durch die Einspannung affine Übertragungen induziert worden, deren Parameter den Π_{ij}^k bzw. Π_{IJ}^K gleich sind. Wie wir schon oben erwähnt haben, besteht zwischen den Punkten P der beiden Hyperflächen eine eineindeutige Korrespondenz, wobei korrespondierende Punkte auf derselben Parameterlinien von ξ^0 liegen und sich also nur in der Koordinate ξ^0 unterscheiden, während die ξ^k und natürlich auch die ξ^K der zugeordne-

[56]) Ein kontravarianter Vektor einer X_{n+1} liegt in einer X_n, wenn seine Richtung in der n-Rich- tung der X_n enthalten ist; ein kovarianter Vektor dagegen, wenn die X_n eingespannt ist, und seine n-Richtung die Richtung der Einspannung enthält (Vergl. R. K. S. 135). Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß ein Vektor v^c bzw. w_a in einer Parameterhyperfläche von ξ^0 liegt, ist also hier gegeben durch die Gleichung $v^0 = 0$ bzw. $w_0 = 0$.

[57]) Das Symbol :: bezeichnet „proportional zu", der Stern gibt an, daß die Proportionalität nur in dem verwendeten Bezugssytem existiert.

[58]) Ist der Proportionalitätsfaktor in den beiden Gleichungen (192 a) und (192 b) derselbe, so ändern sich die Bestimmungszahlen einer gemischten Grösze mit einer gleichen Anzahl von kovarianten und kontravarianten Indizes bei der erwähnten Verschiebung *nicht*. (Vgl. H. Weyl l. c. [17]), S. 723).

[59]) Der triviale Fall, daß die beiden Hyperflächen durch $\xi^0 = 0$, $\xi^0 = C$ darstellbar wären, ist durch die Forderung der Allgemeinheit ausgeschlossen.

ten Punkte gleich sind. Daraus geht hervor, daß die Übertragung in der zweiten Hyperfläche mit den Parametern Π^K_{IJ} in der ersten Hyperfläche korrespondiert mit einer Übertragung, deren Parameter Γ^k_{ij} im Koordinatensysteme (K) den Π^K_{IJ} gleich sind, also im Koordinatensystem (k) folgende Werte haben:

$$\Gamma^k_{ij} \overset{*}{=} A^{kIJ}_{Kij}\,\Pi^K_{IJ} + A^k_I\,\partial_j A^I_i. \tag{194}$$

Nun ist aber:

$$\begin{aligned}\Pi^K_{IJ} = {} & A^{Kij}_{kIJ}\,\Pi^k_{ij} + A^K_i\,\partial_J A^i_I + \frac{n^2}{c^2}\,\Pi^k_{00}\,A^K_k\,(\partial_I \log\Delta)\,\partial_J \log\Delta \\ & + \frac{n}{c}\,[\Pi^k_{i0}\,A^{Ki}_{kI}\,\partial_J \log\Delta + \Pi^k_{j0}\,A^{Kj}_{kJ}\,\partial_I \log\Delta]\end{aligned} \tag{195}$$

und dies ergibt bei Einsetzung in (194):

$$\Gamma^k_{ij} \overset{*}{=} \Pi^k_{ij} + \frac{n^2}{c^2}\,\Pi^k_{00}\,(\partial_i \log\Delta)\,\partial_j \log\Delta + \frac{n}{c}\,[\Pi^k_{i0}\,\partial_j \log\Delta + \Pi^k_{j0}\,\partial_i \log\Delta]. \tag{196}$$

Damit diese Gleichung eine bahntreue Transformation der Übertragung darstellt, müssen erstens die Π^k_{00} verschwinden und zweitens die Π^k_{i0} bis auf einen skalaren Faktor gleich den E^k_i sein und diese Bedingungen sind auch hinreichend, sodaß wir den Satz bewiesen haben:

Satz 8. *Die Gleichungen:*

$$\Pi^k_{i0} \overset{*}{::} E^k_i, \qquad \Pi^k_{00} = 0 \tag{197}$$

bilden die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß für je zwei beliebige Hyperflächen allgemeiner Lage die entsprechenden induzierten Übertragungen bahntreu miteinander verwandt sind.

Mit Hilfe der Parameterlinien von ξ^0 werden also (unter den Voraussetzungen (197)) die geodätischen Linien einer Hyperfläche allgemeiner Lage auf die geodätischen Linien jeder anderen Hyperfläche allgemeiner Lage abgebildet. Daraus folgt, daß *die X_2, die gebildet wird durch eine bestimmte geodätische Linie in einer solchen Hyperfläche und die diese Linie schneidenden Parameterlinien von ξ^0* unabhängig von dem Koordinatensystem in A_{n+1} ist. Durch jede Parameterkurve von ξ^0 gibt es ∞^{n-1} solcher X_2 die wir die „X_2 von ξ^0" nennen wollen. Eine jede von diesen X_2 ist durch eine in irgendeinem Punkte der betreffenden Parameterkurve gegebene (nicht mit der tangentialen zusammenfallende) Richtung gegeben und schneidet jede Hyperfläche allgemeiner Lage längs einer geodätischen Linie dieser Hyperfläche [60]).

Setzen wir die Gleichungen (197) voraus und gehen wir von einer geodätischen Linie der A_{n+1} aus, die durch den eben erwähnten Punkt geht und

[60]) Die geodätische Linie der Hyperfläche braucht natürlich nicht geodätische Linie der A_{n+1} sein.

die dort gegebene Richtung enthält, so läßt sich das Koordinatensystem stets so wählen, daß die Hyperfläche $\xi^0 = 0$ diese geodätische Linie enthält, letztere also auch geodätische Linie der Hyperfläche ist und infolgedessen in der X_2 liegt. Daraus geht aber hervor, daß jede geodätische Linie der A_{n+1}, die ein Linienelement mit der X_2 gemeinschaftlich hat, ganz in der X_2 liegt, d. h. daß die X_2 geodätisch ist. Umgekehrt, setzen wir voraus, daß jede X_2 von ξ^0 geodätisch ist. Nehmen wir den Schnitt einer beliebigen X_2 mit einer beliebigen Hyperfläche allgemeiner Lage und in irgendeinem Punkte dieses Schnittes einen tangentialen Vektor v^c. Verschieben wir sodann diesen Vektor in A_{n+1} pseudoparallel nach dem Nachbarpunkte des Schnittes, so bleibt er in der X_2. Da aber die Hyperfläche mit Hilfe der Parameterlinien von ξ^0 eingespannt ist, aus welchen Linien sich die X_2 aufbaut, so ist die Projektion des verschobenen Vektors in der Richtung der Einspannung auf die Hyperfläche tangential zu dem erwähnten Schnitte und das besagt eben, daß dieser Schnitt eine geodätische Linie der betrachteten Hyperfläche ist, woraus infolge des Satzes 8 die Gleichungen (197) folgen. Zusammenfassend können wir also den Satz [61]) formulieren:

Satz 9. *Die Gleichungen* (197) *sind notwendig und hinreichend dafür, daß die X_2 von ξ^0 total geodätisch in A_{n+1} sind.*

Aus diesem Satze folgt, daß jede der X_2 von ξ^0 (unter den Voraussetzungen (197)) aus sich selbst und unabhängig von irgendwelcher Einspannung eine affine Übertragung trägt, nämlich die, welche entsteht, wenn man direkt die pseudoparallele Verschiebung der in A_{n+1} herrschenden Übertragung übernimmt. Wir beweisen nun den Satz:

Satz 10. *Ist*

$$\Pi^b_{a0} \overset{*}{=} \varrho\, E^b_a, \tag{198}$$

wo ϱ Constans, aber nicht notwendig $= c$ ist, so sind die in den X_2 von ξ^0 induzierten Übertragungen euklidisch-affin.

Bezeichnen wir die Krümmungsgröße der in der X_2 induzierten Übertragung mit $R'_{dba}{}^{c}$, so geht die Gaußsche Gleichung infolge der Tatsache, daß die X_2 total geodätisch in A_{n+1} ist, über in

$$R'_{dba}{}^{c} = B^{efgc}_{dbax}\,R_{efg}{}^{x} \text{ [62])}, \tag{199}$$

wo B^c_a den Einheitsaffinor der X_2 darstellt. Infolge der Definition der X_2 und

[61]) Der ursprüngliche rechnerische Beweis dieses Satzes wurde ersetzt durch den oben angegebenen, den ich Herrn Dr. E. R. v. Kampen verdanke.

[62]) Vergl. R. K. S. 160, Gleichung (212). Der Krümmungsaffinor $H_{ab}{}^{c}$ ist in unserem Falle identisch Null. Der laufende Index x soll in dieser Formel die Zeichenreihe $0, 1, \ldots, n$ durchlaufen.

der Gleichungen (171) ist es möglich das Koordinatensystem (c) so zu wählen, daß $\xi^2, \ldots, \xi^n$ in X_2 konstante Werte haben. Die X_2 sei dann mit Hilfe der $(n-1)$-Richtung der Parameterlinien von $\xi^2, \ldots, \xi^n$ eingespannt. Werden nun ξ^0 und ξ^1 als Parameterlinien in der X_2 gewählt, so verschwinden alle B_a^c außer B_0^0 und B_1^1. Die Gleichung (199) geht also über in

$$R'_{\dot{d}\dot{b}\dot{a}}{}^{c} = R_{\dot{0}\dot{1}g}{}^{x} B_{ax}^{gc} (B_{db}^{01} - B_{bd}^{01}). \tag{200}$$

Nun ist aber infolge (198) und (162'):

$$R_{\dot{0}\dot{1}g}{}^{x} = 0, \tag{201}$$

sodaß $R'_{\dot{d}\dot{b}\dot{a}}{}^{c}$ verschwindet, was zu beweisen war.

Um auch der Gleichung (164) eine geometrische Interpretation zu geben, verwenden wir eine von Bompiani[63] herrührende Deutung des Ricci-Tensors in einer V_n, die zunächst für eine A_{n+1} verallgemeinert werden soll. In irgendeinem Punkte einer A_{n+1} seien $n+1$ infinitesimale linear unabhängige kontravariante Vektoren

$$\underset{a}{u}^c, \quad a, c = 0, 1, \ldots, n, \tag{202}$$

angenommen. Zu diesen gehört das reziproke System der kovarianten Vektoren

$$\overset{c}{u}_a, \tag{203}$$

die eindeutig durch die Gleichungen

$$\overset{b}{u}_a \underset{b}{u}^c = A_a^c \tag{204}$$

bestimmt sind. Wir wählen einen der Vektoren (202) z. B. $\underset{x}{u}^c$ (x bezeichnet also in Folgendem ein *festes* Zeichen aus der Zeichenreihe: $0, 1, \ldots, n$) und definieren die $n+1$ Parallelogramme der Bivektoren:

$$\underset{c}{u}^{[b} \underset{x}{u}^{d]} \qquad (c = 0, 1, \ldots, n), \tag{205}$$

von denen einer degeneriert ist. Jeder der $n+1$ Vektoren $\overset{c}{u}$ wird jetzt längs des Randes des Parallelogramms von $\underset{c}{u}^{[b} \underset{x}{u}^{d]}$ im Sinne des Umlaufes dieses Parallelogramms pseudoparallel herumgeführt. Der Zuwachs $D\overset{c}{u}$ beträgt dabei bekanntlich

$$D\overset{c}{u}_a = - R_{\dot{d}\dot{b}\dot{a}}{}^{e} \overset{c}{u}_e \underset{c}{u}^{[b} \underset{x}{u}^{d]} = - R_{\dot{d}\dot{b}\dot{a}}{}^{e} \overset{c}{u}_e \underset{c}{u}^{b} \underset{x}{u}^{d} \quad (\text{nicht summieren über } c\,!). \tag{206}$$

Die Summe dieser Zuwächse für $c = 0, 1, \ldots, n$ ist infolge (204):

$$\sum_{(c)} D\overset{c}{u}_a = - \sum_{(c)} R_{\dot{d}\dot{b}\dot{a}}{}^{e} \overset{c}{u}_e \underset{c}{u}^{b} \underset{x}{u}^{d} = \underset{x}{u}^{d} R_{da}. \tag{207}$$

[63]) E. Bompiani, 1922, 7. Unter den verschiedenen geometrischen Deutungen des Ricci-Tensors in V_n läßt sich die von Bompiani wohl am einfachsten für A_n verallgemeinern. Wegen einer Verallgemeinerung für L_n vergleiche meine Note „Sopra le connessioni lineari etc.", die in „Annali di Matematica" erscheinen wird.

Dieser Ausdruck hängt, wie ersichtlich, ausschließlich von dem gewählten Vektor $\underset{x}{u}$ ab. Wird nun die Forderung gestellt, daß das oben angegebene Verfahren von jedem Vektor $\underset{x}{u}^c$ ausgehend zur Nullgröße führen soll, so ist dazu notwendig und hinreichend, daß die Größe R_{ab} verschwindet. Damit ist also eine geometrische Deutung der Gleichung (164) gewonnen.

In den Paragraphen 3 und 6 sind wir, ausgehend von einer bis auf bahntreue Transformationen gegebenen affinen Übertragung mit den Parametern Γ_{ij}^k in einer X_n, mit Hilfe einer durch gewisse invariante Forderungen eindeutig bestimmten Punktdichtenübertragung mit den Parametern Λ_{aj}^c, zu einer eindeutig bestimmten affinen Übertragung mit den Parametern Π_{ab}^c in einer A_{n+1} gelangt. Für die Parameter Π_{ab}^c ergaben sich dabei die Gleichungen (162 a, b, c, d). Nun hat sich in diesem § gezeigt, daß man zu denselben Gleichungen für die Π_{ab}^c gelangt, indem man, von der erwähnten bis auf bahntreue Transformationen gegeben Übertragung ausgehend, für eine A_{n+1} folgende invariante Eigenschaften fordert:

I) *Die Transformationen der Koordinaten* (c) *sind der beschränkten Transformationsgruppe* (171) *unterworfen.*

II) *Die Parameter* Π_{ab}^c *sind Funktionen nur der Variablen* ξ^k [64]).

III) *Die in einer beliebigen Hyperfläche allgemeiner Lage mit Hilfe der Parameterlinien von* ξ^0 *induzierte Übertragung ist mit der bis auf bahntreue Transformationen gegebenen bahntreu verwandt.*

IV) *In jeder Parameterhyperfläche von* ξ^0 *sind die Maß-n-Vektoren auf Grund der dort herrschenden induzierten Übertragung konstant.*

V) *Der Ricci-Affinor der* A_{n+1} *verschwindet.*

§ 11. Die geometrische Deutung des Falles, wo die Übertragung in der A_{n+1} eine Riemannsche ist.

Wir setzen zunächst voraus, daß die Π_{ab}^c die durch (135) bestimmte Form haben und außerdem, daß die Übertragung in der A_{n+1} eine Riemannsche ist. Es gibt dann einen Fundamentaltensor G_{ab} vom Rang $n+1$ und es gilt:

$$\partial_c G_{ab} = \Pi_{ac}^e G_{eb} + \Pi_{bc}^e G_{ae}. \tag{208}$$

Für $c = 0$ ergibt dies

$$\partial_0 G_{ab} = 2c\, G_{ab}, \tag{209}$$

woraus folgt

$$G_{ab} = e^{2c\xi^0} \mathfrak{G}_{ab}(\xi^k), \tag{210}$$

[64]) Diese Forderung kann durch eine schwächere ersetzt werden, nämlich: $\partial_0 \Pi_{0i}^0 = 0$.

wo die $\mathfrak{G}_{ab}$ nur Funktionen der ξ^k sind und von der Variablen ξ^0 *nicht* abhängen. Aus (210) folgt, daß $\mathfrak{G}_{ab}$ eine Tensordichte vom Gewicht $-2n$ und vom Range $n+1$ ist. Schreiben wir $\mathfrak{G}$ für die Determinante $|G_{ab}|$ und G für die Determinante $|\mathfrak{G}_{ab}|$:

$$\mathfrak{G} = |G_{ab}|, \qquad G = |\mathfrak{G}_{ab}|, \tag{211}$$

so folgt aus der Gleichung (210), aus der Transformationsformel

$$\xi^{\odot} = \xi^0 - \frac{n}{c} \log \Delta \tag{212}$$

und aus der Tatsache, daß $\mathfrak{G}$ eine Skalardichte vom Gewichte 2 ist, daß G ein *Skalar* ist.

Aus (210) folgt ferner

$$G^{ab} = e^{-2c\xi^0} \mathfrak{G}^{ab}, \tag{213}$$

wo die $\mathfrak{G}^{ab}$ durch G dividierte den $\mathfrak{G}_{ba}$ zugeordnete Minoren bezeichnen. Einfachheitshalber schreiben wir

$$\mathfrak{G}_{00}(\xi^k) = \underset{(k)}{\mathfrak{s}}(\xi^k); \qquad \mathfrak{G}_{\odot\odot}(\xi^K) = \underset{(K)}{\mathfrak{s}}(\xi^K). \tag{214}$$

Aus der Transformation der G_{ab} folgt die Transformationsweise von $\mathfrak{s}$:

$$\underset{(K)}{\mathfrak{s}} = \Delta^{2n} \underset{(k)}{\mathfrak{s}}, \tag{215}$$

was besagt, daß $\mathfrak{s}$ eine Skalardichte vom Gewicht $-2n$ ist. Für $c=j$, $a=b=0$ folgt aus (208):

$$\partial_j G_{00} = 2c\, G_{0j} \tag{216}$$

oder infolge (210):

$$\mathfrak{G}_{0j} = \frac{\partial_j \mathfrak{s}}{2c}. \tag{217}$$

Für $c=j$, $a=0$, $b=i$ folgt aus (208):

$$\partial_j G_{0i} = e^{2c\xi^0}\left(c\,\mathfrak{G}_{ij} + \Pi^0_{ij}\mathfrak{s} + \Pi^k_{ij}\frac{\partial_k \mathfrak{s}}{2c}\right) \tag{218}$$

und aus (210) und (217):

$$\partial_j G_{0i} = e^{2c\xi^0}\frac{\partial_{ji}\mathfrak{s}}{2c}, \tag{219}$$

sodaß

$$\mathfrak{G}_{ij} = \frac{1}{2c^2}\partial_{ij}\mathfrak{s} - \frac{1}{2c^2}\Pi^k_{ij}\partial_k\mathfrak{s} - \frac{1}{c}\Pi^0_{ij}\mathfrak{s}. \tag{220}$$

Daraus folgt, daß $\mathfrak{s}$ nicht Null sein kann, da sonst G_{ab} verschwinden würde. G_{ab} ist also gänzlich durch $\mathfrak{s}$ bestimmt.

Unter Berücksichtigung der Gleichungen

$$\Pi^c_{cj} = 0, \qquad \Pi^c_{c0} = c(n+1) \tag{221}$$

folgt aus der bekannten Formel

$$\partial_b \log \mathfrak{G} = 2\Pi^c_{cb} \tag{222}$$

die Idendität

$$\mathfrak{G} = e^{2c(n+1)\xi^0} G \tag{223}$$

und außerdem

$$G = \text{Constans}. \tag{224}$$

Aus (208) und (220) läßt sich folgendes System von Differentialgleichungen dritter Ordnung für $\mathfrak{s}$ ableiten:

$$\left\{\begin{aligned} &\partial_{jik}\mathfrak{s} - [\Pi^l_{ik}\partial_{lj}\mathfrak{s} + \Pi^l_{ij}\partial_{lk}\mathfrak{s} + \Pi^l_{kj}\partial_{li}\mathfrak{s}] \\ &\quad - \partial_l\mathfrak{s}\,[\partial_j\Pi^l_{ik} - \Pi^l_{mk}\Pi^m_{ij} - \Pi^l_{mi}\Pi^m_{kj}] \\ &\quad - c\,[2\Pi^0_{ik}\partial_j\mathfrak{s} + \Pi^0_{ij}\partial_k\mathfrak{s} + \Pi^0_{kj}\partial_i\mathfrak{s}] \\ &\quad - 2c\,\mathfrak{s}\,[\partial_j\Pi^0_{ik} - \Pi^0_{lk}\Pi^l_{ij} - \Pi^0_{li}\Pi^l_{kj}] = 0. \end{aligned}\right. \tag{225}$$

Wird die Formel (125) des § 5 für die projektive kovariante Ableitung einer Skalardichte auf $\mathfrak{s}$ angewandt und werden ferner die Formeln (132) berücksichtigt, so folgt, daß (225) gleichbedeutend ist mit

$$\nabla_j\nabla_i\nabla_k\mathfrak{s} = 0. \tag{226}$$

Da aber aus derselben Formel folgt, daß

$$\nabla_0\nabla_b\nabla_a\mathfrak{s} = \nabla_j\nabla_0\nabla_a\mathfrak{s} = \nabla_j\nabla_i\nabla_0\mathfrak{s} = 0, \tag{227}$$

so ist (226) gleichbedeutend mit der Gleichung:

$$\nabla_d\nabla_b\nabla_a\mathfrak{s} = 0. \tag{228}$$

Aus (228) folgt

$$\nabla_{[d}\nabla_{b]}\nabla_a\mathfrak{s} = 0 \tag{229}$$

oder

$$R_{\dot{d}\dot{b}\dot{a}}{}^{c}\nabla_c\mathfrak{s} = 0. \tag{230}$$

Da aber $R_{\dot{0}\dot{b}\dot{a}}{}^{c} = R_{\dot{i}\dot{0}\dot{a}}{}^{c} = R_{\dot{i}\dot{j}\dot{0}}{}^{c} = 0$, so ist die letzte Gleichung gleichbedeutend mit

$$R_{iji}{}^{c}\nabla_c\mathfrak{s} = 0, \tag{231}$$

was noch folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$P_{iji}{}^{k}\partial_k\mathfrak{s} + 2c\,\mathfrak{s}\,\mathfrak{P}_{iji}{}^{0} = 0. \tag{232}$$

Man kann das System (k) stets so wählen, daß

$$\partial_l \underset{(k)}{\mathfrak{s}} \overset{*}{=} 0 \tag{233}$$

wird. In diesem Koordinatensystem verschwindet $\mathfrak{G}_{0j}$ infolge (217) und also infolge (210) auch G_{0j}. Der Vektor $\underset{0}{e}^c$ ist also senkrecht zu den Vektoren $\underset{i}{e}^c$ und die Parameterlinien von ξ^0 sind also V_n-normal und senkrecht zu den Parameterhyperflächen von ξ^0, die zu der durch (233) charakterisierten Wahl des Systems (k) gehören. Bei dieser orthogonalen Einspannung wird in den Parameterhyperflächen von ξ^0 eine Riemannsche Übertragung induziert mit dem Fundamentaltensor

$$g_{ij} \overset{*}{=} G_{ij} = e^{2c\xi^0}\,\mathfrak{G}_{ij}. \tag{234}$$

Infolge (233) reduziert sich aber $\mathfrak{G}_{ij}$ in diesem Koordinatensysteme zu den $-\frac{C}{c}\,\Pi^0_{ij}$, wo $C \underset{(k)}{\overset{*}{=}} \mathfrak{s}$ ist und wir haben also

$$g_{ij} \overset{*}{=} -\frac{C}{c}\,e^{2c\xi^0}\,\Pi^0_{ij}. \tag{235}$$

Aber auch bei allgemeiner Wahl des Systems (k) läßt sich über die Lage der Parameterlinien und Parameterhyperflächen von ξ^0 etwas aussagen. Für den Winkel φ_i zwischen $\underset{0}{e}^c$ und $\underset{i}{e}^c$ gilt nämlich:

$$\cos\varphi_i = \frac{G_{0i}}{\sqrt{G_{00}\,G_{ii}}} = \frac{\mathfrak{G}_{0i}}{\sqrt{\mathfrak{s}\,\mathfrak{G}_{ii}}} \tag{236}$$

und dieser Winkel ist also längs der Parameterlinien von ξ^0 konstant. Der Winkel φ zwischen den Parameterlinien und den Parameterhyperflächen von ξ^0 muß also auch konstant sein. Der Inhalt des Parallelepipeds von $\underset{0}{e}^c, \ldots, \underset{n}{e}^c$ ist bekanntlich gleich $\sqrt{\mathfrak{G}}$, und des Inhalt des Parallelepipeds von $\underset{1}{e}^c, \ldots, \underset{n}{e}$ gleich $\sqrt{|G_{ij}|}$, während die Länge des Vektors $\underset{0}{e}^c$ gleich $\sqrt{G_{00}}$ ist. Für φ gilt also

$$\cos\varphi = \sqrt{\frac{\mathfrak{G}}{G_{00}\,|G_{ij}|}} = \sqrt{\frac{G}{\mathfrak{s}\,|\mathfrak{G}_{ij}|}}. \tag{237}$$

Aus (235) und (113), § 3 geht hervor, daß sich im Falle, wo die Übertragung in der A_{n+1} eine Riemannsche ist, die Parameterhyperflächen von ξ^0 so legen lassen, daß

$$g_{ij} \overset{*}{=} -\frac{C}{c^2(n-1)}\,e^{2c\xi^0}\,R'_{ij}, \tag{238}$$

wo R'_{ij} der Ricci-Affinor der Übertragung Γ'^k_{ij} ist, wo $\Gamma'^k_{ij} \overset{*}{=} \Pi^k_{ij}$. Die Übertragung mit den Parametern Γ'^k_{ij} ist aber bekanntlich bahntreu mit der Übertragung mit den Parametern Γ^k_{ij} verwandt und die Gleichung (238) bedeutet also, daß sich die Übertragung der A_n durch eine bahntreue Transformation

auf eine Einsteinsche mit konstanter Krümmung zurückführen läßt. Aber auch die Umkehrung gilt, sodaß wir den Satz aussprechen können:

Satz. *Eine affine Übertragung in einer A_n läßt sich dann und nur dann durch eine bahntreue Transformation in eine Einsteinsche mit konstanter Krümmung* [65]) *überführen, wenn die Übertragung in der zugehörigen A_{n+1} eine Riemannsche ist.*

Zum Beweise des noch unbewiesenen Teiles dieses Satzes gehen wir aus von der durch eine bahntreue Transformation entstandenen Einsteinschen Übertragung mit den Parametern Γ'^k_{ij} in der A_n. Da sie eine inhaltstreue Übertragung ist, so gibt es ein Koordinatensystem (k), sodaß

$$\Gamma'^i_{ij} \overset{*}{=} 0 \tag{239}$$

und folglich

$$\left\{\begin{aligned} &\Gamma'^k_{ij} \overset{*}{=} \Pi^k_{ij}, \qquad R'_{ij} \overset{*}{=} c(n-1)\,\Pi^0_{ij},\\ &\nabla'_j R'_{ik} \overset{*}{=} c(n-1)\{\partial_j \Pi^0_{ik} - \Pi^l_{ij}\,\Pi^0_{lk} - \Pi^l_{kj}\,\Pi^0_{il}\}.\end{aligned}\right. \tag{240}$$

Bezeichne nun C eine beliebige, von Null verschiedene Konstante und setzen wir

$$G_{00} \overset{*}{=} e^{2c\xi^0}\,C, \qquad G_{0j} \overset{*}{=} 0, \qquad G_{ij} \overset{*}{=} -\frac{C}{c}\,e^{2c\xi^0}\,\Pi^0_{ij}, \tag{241}$$

so überzeugt man sich leicht, daß

$$\nabla_0 G_{ab} \overset{*}{=} \nabla_j G_{0b} \overset{*}{=} \nabla_j G_{a0} \overset{*}{=} 0. \tag{242}$$

Ferner ist auf Grund von (225) und (241)

$$\nabla_j G_{ik} \overset{*}{=} -\frac{C}{c^2(n-1)}\,e^{2c\xi^0}\,\nabla'_j R'_{ik}\ ^{65a)}; \tag{243}$$

$\nabla'_j R'_{ik}$ verschwindet aber, da die Übertragung mit den Parametern Γ'^k_{ij} eine Einsteinsche mit konstanter Krümmung ist und folglich der durch (241) definierte Tensor G_{ab} die Gleichung

$$\nabla_d G_{ab} = 0 \tag{244}$$

erfüllt. Nun ist

$$\mathfrak{G} = |G_{ab}| = e^{2c(n+1)\xi^0}\,|\mathfrak{G}_{ab}| \overset{*}{=} C e^{2c(n+1)\xi^0}\,|\mathfrak{G}_{ij}| \overset{*}{=} (-1^n)\,\frac{C^{n+1}\,e^{2(n+1)c\xi^0}}{c^{2n}(n-1)^n}\,|R'_{ij}| \tag{245}$$

und $\mathfrak{G}$ kann also nicht verschwinden. Die Existenz eines Fundamentaltensors in der A_{n+1} ist also dargetan.

Der Fall wo die Übertragung in der A_{n+1} eine Weylsche ist, läßt sich unmittelbar auf den Fall einer Riemannschen Übertragung zurückführen. Denn

[65]) Eine Einsteinsche Übertragung hat für $n=3$ stets konstante Krümmung. Siehe z. B. L. P. Eisenhart, Riemannian Geometry, S. 92.

[65a]) Das Symbol ∇ bezieht sich auf die Übertragung in der A_{n+1}, das Symbol ∇' auf die Übertragung in der A_n.

die Übertragung ist jedenfalls inhaltstreu (vgl. (186)) und eine inhaltstreue Weylsche Übertragung ist stets Riemannsch [66]).

§ 12. Geometrische Deutung des Falles, wo die A_{n+1} total geodätische Hyperflächen enthält.

Es gilt folgender

Satz. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Γ_{ij}^k bahntreu in irgendwelche ${}'\Gamma_{ij}^k$ mit der Eigenschaft: ${}'R_{ij} = {}'R_{kij}{}^k = 0$ überführbar seien, ist, daß in der A_{n+1} eine total geodätische X_n allgemeiner Lage existiert.*

Beweis. Wir setzen voraus, daß es eine total geodätische X_n allgemeiner Lage gibt. Infolge der auf S. 41 gemachten Bemerkung gibt es ein Koordinatensystem (c), sodaß diese X_n gerade durch die Gleichung

$$\xi^0 = 0 \tag{246}$$

dargestellt ist. Der Ricci-Affinor ${}'R_{ij}$, der in der X_n induzierter Übertragung mit den Parametern ${}'\Gamma_{ij}^k$ ist infolge der Gleichung ${}'\Gamma_{ij}^k \overset{*}{=} \Pi_{ij}^k$ gegeben durch die Formel (vgl. (240))

$$ {}'R_{ij} \overset{*}{=} c(n-1)\,\Pi_{ij}^0. \tag{247}$$

Berechnen wir nun den ersten Krümmungsaffinor [67]) $H_{\dot a \dot b}{}^c$ der Hyperfläche (246). Er ist gegeben durch die Gleichung

$$H_{\dot a \dot b}{}^c = B_{ab}^{de}\, \nabla_d B_e^c \text{ [68]}). \tag{248}$$

Da die Hyperfläche (246) mit Hilfe der Richtung der Parameterlinien von ξ^0 eingespannt ist, gelten die Gleichungen:

$$\left\{ \begin{aligned} & B_i^k \overset{*}{=} \delta_i^k \\ & B_0^c \overset{*}{=} B_a^0 \overset{*}{=} 0. \end{aligned} \right. \tag{249}$$

Setzt man dies in (248) ein, so folgt:

$$\left\{ \begin{aligned} & H_{\dot a \dot 0}{}^c \overset{*}{=} H_{\dot 0 \dot a}{}^c \overset{*}{=} 0 \\ & H_{ij}{}^k \overset{*}{=} 0 \\ & H_{ij}{}^0 \overset{*}{=} \Pi_{ij}^0. \end{aligned} \right. \tag{250}$$

Da die X_n total geodätisch in der A_{n+1} ist, verschwindet ihr erster Krümmungsaffinor $H_{\dot a \dot b}{}^c$ identisch und daraus und aus der dritten von den Gleichungen (250) folgt, daß

$$\Pi_{ij}^0 \overset{*}{=} 0. \tag{251}$$

[66]) R. K. S. 219. [67]) R. K. S. 159.

[68]) R. K. S. 158, die erste von den Gleichungen (197). B_a^c ist der Einheitsaffinor der Parameterhyperfläche (vgl. R. K. S. 135, Par. 5).

(247) und (251) geben zusammen ${}'R_{ij} \overset{*}{=} 0$ also

$$ {}'R_{ij} = 0, \tag{252}$$

und da die ${}'\Gamma_{ij}^k$ mit den Γ_{ij}^k bahntreu verwandt sind, ist somit der eine Teil des Satzes bewiesen.

Umgekehrt, setzen wir voraus, daß die Γ_{ij}^k bahntreu in die ${}'\Gamma_{ij}^k$ überführbar sind, und daß

$$ {}'R_{ij} = 0 \tag{253}$$

ist. Aus (253) folgt dann, daß die Übertragung der ${}'\Gamma_{ij}^k$ inhaltstreu ist und daraus, daß es ein Koordinatensystem (K) gibt, für welches

$$ {}'\Gamma_{KJ}^K \overset{*}{=} 0. \tag{254}$$

In diesem Koordinatensystem ist

$$ {}'\Gamma_{IJ}^K \overset{*}{=} \Pi_{IJ}^K \tag{255}$$

und folglich besteht die Gleichung

$$ {}'R_{IJ} \overset{*}{=} c(n-1)\,\Pi_{IJ}^{\circledcirc}. \tag{256}$$

Aus (256) und (253) ergibt sich $\Pi_{IJ}^{\circledcirc} \overset{*}{=} 0$ und laut (250) sind also die Parameterhyperflächen von $\xi^{\circledcirc}$ in A_{n+1} total geodätisch. Bemerken wir noch, daß, falls die Hyperfläche (246) total geodätisch in A_{n+1} ist, dasselbe von jeder Hyperfläche der Schar

$$\xi^0 = \text{Const} \tag{257}$$

gilt. Es zeigt sich ferner, daß, wenn die Parameterhyperflächen von ξ^0 total geodätisch sind und der Übergang von (k) zu (K) sich mittels linear gebrochener Funktionen vollzieht, die Parameterhyperflächen von $\xi^{\circledcirc}$ auch total geodätisch in der A_{n+1} sind [69]).

Wir bemerken hierzu noch Folgendes. Ist die Übertragung Π_{ab}^c eine Rie-

[69]) Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die bahntreue Überführbarkeit der Γ_{ij}^k in ${}'\Gamma_{ij}^k$ mit verschwindenden ${}'R_{ij}$ sind gegeben durch J. A. Schouten (On the conditions of integrability of covariant differential equations, 1925, 9) in der Form einer unendlichen Reihe von algebraischen Gleichungen, die als Integrabilitätsbedingungen auftreten. Die erste (lineare) Gleichung dieser Reihe lautet:

$$P_{iji}{}^k p_k = 2\,\nabla_{[l} P_{j]l}, \qquad \left(P_{jl} = \frac{n R_{jl} + R_{lj}}{1-n^2}\right), \tag{257 a}$$

wo p_j ein gesuchtes Vektorfeld ist.

mannsche und gibt es ein Koordinatensystem (c) in welchem die Gleichungen:

$$\Pi^0_{ij} \overset{*}{=} 0 \tag{258}$$

gelten, so sind die in den Parameterhyperflächen von ξ^0 bei Einspannung mit Hilfe der Parameterlinien von ξ^0 induzierten Übertragungen ebenfalls Riemannsch. Auf Grund des obigen Satzes sind nämlich die erwähnten Hyperflächen total geodätisch in A_{n+1}. Infolgedessen ist die induzierte Übertragung identisch mit der Übertragung die bei orthogonaler Einspannung induziert wird, also mit einer Riemannschen Übertragung.

§ 13. Geometrische Deutung des Falles, wo die Übertragung in der A_{n+1} eine euklidische ist.

Satz. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Übertragung mit den Parametern Γ^k_{ij} projektiveuklidisch* [70]) *sei, ist, daß die Übertragung in der A_{n+1} eine euklidische ist.*

Beweis. Wir setzen voraus, daß die Übertragung der Γ^k_{ij} projektiv-euklidisch ist. Sie ist also bahntreu in eine euklidische mit den Parametern $'\Gamma^k_{ij}$ überführbar. Es existiert dann bekanntlich [71]) ein (Kartesisches) Koordinatensystem (k) in welchem

$$'\Gamma^k_{ij} \overset{*}{=} 0. \tag{259}$$

Berechnen wir in diesem Koordinatensystem die entsprechenden Parameter Π^c_{ab}, so ergibt sich, daß

$$\Pi^k_{ij} \overset{*}{=} 0, \qquad \Pi^0_{ij} \overset{*}{=} 0, \qquad \Pi^b_{0a} \overset{*}{=} c E^b_a. \tag{260}$$

Die direkte Berechnung zeigt dann, daß alle Bestimmungszahlen der Krümmungsgröße der Übertragung der Π^c_{ab} verschwinden und diese Übertragung also eine euklidische ist. Umgekehrt setzen wir voraus, daß die Π^c_{ab} Parameter einer euklidischaffinen Übertragung sind und gehen von irgendwelchem Koordinatensystem (c) aus. Durch einen beliebigen Punkt P legen wir eine Hyperebene, die nur der Bedingung genüge, daß sie durch jede Parameterkurve von ξ^0 in einem einzigen Punkte getroffen wird. Auf Grund der Bemerkung auf S. 41 gibt es dann ein Koordinatensystem (C) in welchem diese Hyperebene durch eine Gleichung von der Form:

$$\xi^{\odot} = \text{Const} \tag{261}$$

dargestellt werden kann. Die Hyperebene ist total geodätisch in der euklidischen A_{n+1} und trägt demnach von selbst eine euklidische Übertragung, die von der Einspannung nicht abhängig ist, aber mit der (durch die Einspannung mit Hilfe der Parameterlinien von $\xi^{\odot}$) in ihr induzierten Übertragung mit den Parametern $'\Gamma^K_{IJ} \overset{*}{=} \Pi^K_{IJ}$ zusammenfällt. Letztere ist also eine euklidische Übertragung. Anderseits sind die $'\Gamma^k_{ij}$ mit den ursprünglichen Γ^k_{ij} bahntreu verwandt und die Übertragung der Γ^k_{ij} ist also projektiveuklidisch.

Aus obigem Satze folgen unmittelbar die bekannten Weylschen notwendigen und hinreichenden Bedingungen [72]) dafür, daß die Übertragung mit den Parametern Γ^k_{ij} projektiveuklidisch sei. Um das zu zeigen wenden wir uns zu den Formeln (138 b) auf S. 33:

$$\left\{\begin{array}{l} R_{lji}{}^{k} \overset{*}{=} P_{lji}{}^{k} \quad \text{(Weylsche Projektivkrümmungsgröße)} \\ R_{lji}{}^{0} \overset{*}{=} 2c(n-1)\{\partial_{[j}\Pi^0_{l]i} + \Pi^0_{k[j}\Pi^k_{l]i}\} \\ R_{\dot 0\dot b\dot a}{}^{c} \overset{*}{=} R_{\dot d\dot 0\dot a}{}^{c} \overset{*}{=} R_{\dot d\dot b\dot 0}{}^{c} \overset{*}{=} 0. \end{array}\right. \tag{262}$$

Ist die Übertragung der Γ^k_{ij} projektiveuklidisch, so ist die der Π^c_{ab} euklidisch, folglich verschwindet $R_{\dot d\dot b\dot a}{}^{c}$ identisch und daraus folgen die Gleichungen:

$$P_{lji}{}^{k} = 0, \qquad R_{lji}{}^{0} = 0. \tag{263}$$

Umgekehrt, sind diese Gleichungen erfüllt, so verschwindet $R_{\dot d\dot b\dot a}{}^{c}$, die Übertragung der Π ist eine euklidische und die Übertragung der Γ ist projektiveuklidisch. Die Gleichungen (263) sind eben die Weylschen Gleichungen. Man zeigt näher, daß im Falle $n \geqslant 3$ die zweite Gleichung von (263) eine Folge der ersten ist; im Falle $n = 2$ dagegen die erste stets erfüllt ist [73]).

Ist die Übertragung in der A_{n+1} euklidisch, so gibt es ein Koordinatensystem (c), für welches die Gleichungen (260) gelten und umgekehrt. Ein solches System wollen wir „spezial" nennen. Es ist aber unmöglich durch eine Transformation der zugelassenen Gruppe dieses System in ein Kartesisches überführen, weil bei jeder Transformation der Urvariablen aus der zugelassenen Gruppe die Gleichung $\Pi^b_{0a} \overset{*}{=} c E^b_a$ in $\Pi^B_{\odot A} \overset{*}{=} c E^B_A$ übergeht. Die „spezialen" Koordinatensysteme haben die Eigenschaft, daß in den Parameterhyperflächen von ξ^0 die induzierte Übertragung eine euklidischaffine ist und außerdem diese Hyperflächen total geodätisch in der A_{n+1} sind.

Lassen wir nun vorläufig die Gruppe aller analytischen Transformationen der Urvariablen in der A_{n+1} zu und bezeichnen mit (C) ein Kartesisches Koordinatensystem; (c) sei wie früher ein „speziales" Koordinatensystem. Wir

---

[70]) Vergl. R. K., S. 130 und 131.

[71]) Vergl. z. B. R. K., S. 115.

[72]) L. c. unter [70]).

[73]) Siehe z. B. R. K., S. 130, 131. Die Gleichung $P_{lji}{}^{k} = 0$ hat einen invarianten Charakter, weil $P_{lji}{}^{k}$ eine Größe ist. $R_{lji}{}^{0}$ dagegen ist *keine* Größe; die Gleichung $R_{lji}{}^{0} = 0$ ist jedoch für $n = 2$ eine invariante Gleichung, für $n \geqslant 3$ ist sie invariant, sobald $P_{lji}{}^{k} = 0$. Die Gleichung $R_{lji}{}^{0} = 0$ ist dann equivalent mit der Gleichung $\nabla_{[j}(nR_{l]i} + R_{[il]}) = 0$, deren linke Seite eine Größe ist.

behaupten nun, daß die Transformation $(C) \to (c)$ stets eine *singuläre* Hyperfläche besitzt.

In der Tat, folgt aus der Transformationsgleichung

(264) $$\Pi^C_{AB} = E^C_b \partial_B E^b_A + \Pi^c_{ab} E^{Cab}_{cAB}$$

unter Berücksichtigung von

(265) $$\Pi^C_{AB} \overset{*}{=} 0$$

das System von partiellen Differentialgleichungen

(266) $$\partial_B E^c_A = -\Pi^c_{ab} E^{ab}_{AB},$$

das sich für $c=0$ bzw. $c=k$ auf

(267) $$\partial_B E^0_A = -c E^0_A E^0_B$$

bzw.

(268) $$\partial_B E^k_A = -c(E^k_A E^0_B + E^k_B E^0_A)$$

reduziert. Bei Faltung über C und A in (264) ergibt sich bei Berücksichtigung von (260) und (265):

(269) $$0 = -\partial_B \log D^{-1} + \Pi^c_{cb} E^b_B; \qquad D = |E^C_a|$$

oder infolge der Gleichungen

(270) $$\Pi^c_{cj} = 0, \qquad \Pi^c_{c0} = c(n+1)$$

auch

(271) $$0 = \partial_B \log D + c(n+1) E^0_B.$$

Für $A = \odot$, $B = \odot$ ergibt sich aus (267) bei Integration

(272) $$E^0_\odot = \frac{1}{c\xi^\odot + \Omega},$$

wo Ω eine Funktion der Variablen ξ^K ist.

Aus (271) und (272) folgt nun, daß die Punkte der Hyperfläche

(273) $$c\xi^\odot + \Omega(\xi^K) = 0$$

singuläre Punkte der Transformation $(C) \to (c)$ bilden. Es läßt sich noch zeigen, daß die Parameterkurven von ξ^0 bei der Transformation $(c) \to (C)$ in eine Kurvenschar übergehen, die im Endlichen einen gemeinschaftlichen Punkt haben. Die zu (264) reziproke Transformation:

(274) $$\Pi^c_{ab} = E^c_B \partial_b E^B_a + \Pi^C_{AB} E^{cAB}_{Cab}$$

geht infolge (265) über in

(275) $$\partial_b E^C_a = \Pi^c_{ab} E^C_c.$$

Für $b=j$, $a=i$ ergibt sich aus (275) unter Berücksichtigung der Gleichungen (260):

(276) $$\partial_j E^C_i = 0,$$

woraus folgt

(277) $$\xi^C = \overset{C}{\underset{i}{\alpha}}(\xi^0)\,\xi^i + \overset{C}{\beta}(\xi^0),$$

wo $\overset{C}{\underset{i}{\alpha}}$, $\overset{C}{\beta}$ Funktionen nur der Variablen ξ^0 sind. Für $b=0$, $a=i$ entsteht aus (275)

(278) $$\partial_0 E^C_i = c E^C_i,$$

woraus unter Berücksichtigung von

(279) $$E^C_i = \overset{C}{\underset{i}{\alpha}}(\xi^0)$$

folgt

(280) $$\overset{C}{\underset{i}{\alpha}}(\xi^0) = \overset{C}{\underset{i}{\gamma}}\, e^{c\xi^0},$$

wo $\overset{C}{\underset{i}{\gamma}}$ *konstante* Zahlen sind.

Setzt man weiter in (275) $a=0$, $b=0$ und berücksichtigt man die Gleichungen (260), so folgt

(281) $$\partial_0 E^C_0 = c E^C_0,$$

was zusammen mit (277) und (280) zu

(282) $$\frac{d^2 \overset{C}{\beta}}{(d\xi^0)^2} = c\,\frac{d\overset{C}{\beta}}{d\xi^0}$$

führt. Integration von (282) ergibt

(283) $$\overset{C}{\beta}(\xi^0) = \overset{C}{\delta}\, e^{c\xi^0} + \overset{C}{\varepsilon},$$

wo $\overset{C}{\delta}$ und $\overset{C}{\varepsilon}$ wieder *konstante* Zahlen sind. Die Gleichungen (277) nehmen also folgende Gestalt an:

(284) $$\xi^C = e^{c\xi^0}\{\overset{C}{\underset{i}{\gamma}}\,\xi^i + \overset{C}{\delta}\} + \overset{C}{\varepsilon}$$

und daraus ist es zu ersehen, daß die Parameterkurven von ξ^0 im Kartesischen Koordinatensysteme (C) alle durch den Punkt $\xi^C \overset{*}{=} \overset{C}{\varepsilon}$ durchgehen. Es ist klar, daß der letztgenannte Punkt auf der Hyperfläche (273) liegt.

In dem zur Sprache kommenden Falle, wo die Übertragung in der A_{n+1} eine euklidische ist, kann in irgendeinem Punkte der A_{n+1} ein beliebiger Tensor vom $(n+1)$-ten Rang gegeben werden. Verschiebt man dann diesen

Tensor pseudoparallel nach allen anderen Punkten, so entsteht ein Fundamentaltensor G_{ab} der Übertragung der Π^c_{ab}. Wegen der beschränkten Transformationsgruppe in der A_{n+1} kann man nun alle so entstehenden möglichen Fundamentaltensoren in eine einfache Gestalt bringen. Wir gehen nämlich von dem „spezialen" Koordinatensysteme (c) aus, in welchem die Gleichungen (260) bestehen und verwenden die Gleichungen des Paragraphen 11. Infolge (260) nehmen die Gleichungen (225) des Par. 11 folgende Form an:

$$\partial_{jik}\, s \overset{*}{=} 0, \tag{285}$$

woraus folgt, daß

$$s \overset{*}{=} a_{ik}\,\xi^i\,\xi^k + 2\,b_i\,\xi^i + b_0, \qquad (a_{ik} = a_{ki}) \tag{286}$$

wo a_{ik}, b_i, b_0 *konstante* Zahlen sind. Infolge (260), (286) und der Gleichungen (210), (217), (220) des Par. 11 hat der Fundamentaltensor G_{ab} folgende Gestalt

$$\left\{\begin{aligned} G_{00} &\overset{*}{=} e^{2c\xi^0}\,(a_{ik}\,\xi^i\,\xi^k + 2\,b_i\,\xi^i + b_0)\\ G_{0i} &\overset{*}{=} e^{2c\xi^0}\,\frac{1}{c}\,(a_{ik}\,\xi^k + b_i)\\ G_{ij} &\overset{*}{=} e^{2c\xi^0}\,\frac{1}{c^2}\,a_{ij}\,. \end{aligned}\right. \tag{287}$$

Die Konstanten a und b sollen nur der Bedingung genügen, daß der Fundamentaltensor G_{ab} von dem $(n+1)$-ten Rang sei. Berechnet man nun die Determinante $|G_{ab}|$, so ergibt sich nach einer Umformung, daß

$$|G_{ab}| \overset{*}{=} \frac{e^{2c(n+1)\xi^0}}{c^{2n}} \begin{vmatrix} b_0, & b_1, \ldots, & b_n\\ b_1, & a_{11}, \ldots, & a_{1n}\\ \vdots & & \\ b_n, & a_{n1}, \ldots, & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{288}$$

Die Konstanten a, b müssen also der Ungleichung

$$\begin{vmatrix} b_0, & b_1, \ldots, & b_n\\ b_1, & a_{11}, \ldots, & a_{1n}\\ \vdots & & \\ b_n, & a_{n1}, \ldots, & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{289}$$

genügen. Aus dem schon oben angeführten Grunde folgt, daß es keine Transformation der Urvariablen in der A_{n+1} der zugelassenen Gruppe gibt, wobei sich G_{ab} in die Form $G_{AB} \overset{*}{=} \delta^B_A$ bringen läßt.

Wird das System (C) so gewählt, daß $G_{\odot i} \overset{*}{=} 0$, so sind die Parameterhyperflächen von $\xi^{\odot}$ auf Grund des Par. 11 orthogonal zu den Parameterlinien von $\xi^{\odot}$. Infolge des Satzes auf S. 53 ist die in diesen Hyperflächen

induzierte Übertragung eine Einsteinsche. Außerdem gehen die geodätischen Linien (die Parameterlinien von $\xi^{\odot}$) die diese Hyperflächen orthogonal treffen, alle durch einen Punkt. Die Hyperflächen bilden also eine Kugelschar. Der Mittelpunkt dieser Kugeln liegt aber bei den zugelassenen Koordinatensystemen im „unendlichen".

Ist (c) ein „speziales" Koordinatensystem, so sind die Parameterhyperflächen von ξ^0 total geodätisch in A_{n+1}, sie bilden also eine Schar von Hyperebenen. Es ist aber unmöglich durch irgendeinen Punkt der Mannigfaltigkeit A_{n+1} eine Hyperebene dieser Schar zu legen, die dort eine beliebig gegebene n-Richtung enthält; insbesondere ist es unmöglich eine solche Hyperebene orthogonal zu den Parameterlinien von ξ^0 zu legen. Wäre dies möglich, so hätten wir $G_{0i} \overset{*}{=} 0$, also (vgl. (287)) $a_{ik} = 0$, $b_i = 0$, was (289) widerspricht. Dies liegt daran, daß bei den zugelassenen Transformationen keine Kartesische Koordinatensysteme in der A_{n+1} existieren.

Delft, im Januar 1930.

Literaturverzeichnis.

1871.

1. F. Klein, Über Liniengeometrie und metrische Geometrie, Mathematische Annalen V (1871) 267.

1918.

1. H. Weyl, Reine Infinitesimalgeometrie, Math. Zeitschr. 2 (18) 384—411.

1921.

1. J. A. Schouten, Über die konforme Abbildung n-dimensionaler Mannigfaltigkeiten mit quadratischer Maßbestimmung auf eine Mannigfaltigkeit mit euklidischer Maßbestimmung, Mathem. Zeitschr. 11 (21) 58—88.
2. H. Weyl, Zur Infinitesimalgeometrie: Einordnung der projektiven und der konformen Auffassung, Göttinger Nachrichten, (1921) 99—112.

1922.

1. L. P. Eisenhart-O. Veblen, The Riemannian geometry and its generalization, Proc. Nat. Ac. Sc. 8 (22) 19—23.
2. O. Veblen, Normal coördinates for the geometry of paths, Proc. Nat. Ac. Sc. 8 (22), 192—197.
3. L. P. Eisenhart, Fields of parallel vectors in the geometry of paths 8 (22) 207—212.
4. L. P. Eisenhart, Spaces with corresponding paths, Proc. Nat. Ac. Sc. 8 (22) 233—238.
5. O. Veblen, Projective and affine geometry of paths, Proc. Nat. Ac. Sc. 8 (22) 347—350.
6. E. Cartan, Sur les espaces généralisées et la théorie de la relativité C. R. 174 (1922) 734—737.
7. E. Bompiani, La géométrie des espaces courbes et le tenseur d'énérgie d'Einstein C. R. Paris 174 (1922) 737—738.

1923.

1. O. Veblen, Equiaffine geometry of paths, Proc. Nat. Ac. Sc. 9 (23) 3—4.
2. L. P. Eisenhart, The geometry of paths and general relativity, Annals of Mathem. 24 (23) 367—392.
3. O. Veblen-T. Y. Thomas, The geometry of paths, Trans. of the Amer. Math. Soc. 25 (23) 551—608.

1924.

1. J. A. Schouten, Der Ricci-Kalkül, Springer Berlin.
2. O. Veblen-T. Y. Thomas, Extensions of relative tensors, Trans. of the Amer. Math. Soc. 26 (24) 373—377.
3. L. P. Eisenhart, Geometries of paths for which the equations of the paths admit a quadratic first integral, Trans. of the Amer. Math. Soc. 26 (24) 378—384.
4. E. Cartan, Sur les variétés à connexion projective, Bull. de la Soc. Math. de France 52 (24) 205—241.
5. J. A. Schouten, On the place of conformal and projective geometry in the theory of linear displacements, Proc. Kon. Ak. van Wetenschappen, Amsterdam 27 (24) 407—424.

1925.

1. T. Y. Thomas, On the projective and equiprojective geometries of paths, Proc. Nat. Ac. Sc. 11 (25) 199—203.
2. O. Veblen-J. M. Thomas, Projective normal coördinates for the geometry of paths, Proc. Nat. Ac. Sc. 11 (25) 204—207.
3. J. M. Thomas, Note on the projective geometry of paths, Proc. Nat. Ac. Sc. 11 (25) 207—209.
4. T. Y. Thomas, Announcement of a projective theory of affinely connected manifolds, Proc. Nat. Ac. Sc. 11 (25) 588—589.
5. T. Y. Thomas, On the equi-projective geometry of paths, Proc. Nat. Ac. Sc. 11 (25) 592—594.
6. O. Veblen, Remarks on the foundations of geometry, Bull. of the Amer. Math. Soc. 31 (25) 121—141.
7. T. Y. Thomas, Note on the projective geometry of paths, Bull. of the Amer. Math. Soc. 31 (25) 318—322.
8. J. A. Schouten, Projective and conformal invariants of half-symmetrical connections, Proc. Kon. Ak. van Watenschappen, Amsterdam 29 (25) 334—336.
9. J. A. Schouten, On the conditions of integrability of covariant differential equations, Trans. of the Amer. Math. Soc. 27 (25) 441—473.

1926.

1. J. M. Thomas, On normal coördinates in the geometry of paths, Proc. Nat. Ac. Sc. 12 (26) 58—67.
2. J. M. Thomas, First integrals in the geometry of paths, Proc. Nat. Ac. Sc. 12 (26) 117—124.
3. J. A. Schouten, Erlanger Programm und Übertragungslehre. Neue Gesichtspunkte zur Grundlegung der Geometrie, Rend. di Palermo 50 (26) 142—169.
4. O. Veblen-J. M. Thomas, Projective invariants of affine geometry of paths, Annals of Math. 27 (26) 279—296.
5. L. P. Eisenhart, Geometries of paths for which the equations of the paths admit $\frac{n(n+1)}{2}$ independent linear first integrals. Trans. of the Amer. Math. Soc. 28 (26) 330—338.

6. T. Y. Thomas, A projective theory of affinely connected manifolds, Math. Zeitschr. 25 (26) 723—733.

1927.

1. L. P. Eisenhart, Non-Riemannian Geometry.
2. L. P. Eisenhart-M. S. Knebelman, Displacements in a geometry of paths which carry paths into paths. Proc. Nat. Ac. Sc. 13 (27) 38—42.
3. M. S. Knebelman, Groups of collineations in a space of paths. Proc. Nat. Ac. Sc. 13 (27) 396—400.
4. H. Levy, Congruences of curves in the geometry of paths. Rend. di Palermo 51 (27) 304—311.
5. V. Hlavatý, Sur les déplacements isohodoïques, Enseignem. Mathem. 26 (27) 84—97.
6. T. Y. Thomas, The replacement theorem and related questions in the projective geometry of paths, Annals of Math. 28 (27) 549—561.
7. A. Church, On the form of differential equations of a system of paths, Annals of Math. 28 (27) 629.

1928.

1. J. Douglas, The general geometry of paths, Annals of. Math. 29 (28).
2. H. P. Robertson, Note on the projective coördinates. Proc. Nat. Ac. Sc. 14 (28) 153—154.
3. O. Veblen, Projective tensors and connections, Proc. Nat. Ac. Sc. 14 (28) 154—166.
4. T. Y. Thomas, Concerning the $*\mathfrak{G}$ group of transformations, Proc. Nat. Ac. Sc. 14 (28) 728—734.
5. V. Hlavatý, Bemerkung zur Arbeit von Herrn T. Y. Thomas „A projective theory of affinely connected manifolds“. Math. Zeitschr. 28 (28) 142—146.

1929.

1. J. A. Schouten, Über nicht-holonome Übertragungen in einer L_n. Mathem. Zeitschr. 30 (29) 149—172.
2. J. A. Schouten-V. Hlavatý, Zur Theorie der allgemeinen linearen Übertragung, Mathem. Zeitschr. 30 (29) 414—432.
3. H. P. Robertson-H. Weyl, On a problem in the theory of groups arising in the foundations of infinitesimal geometry, Bull. of the Amer Math. Soc. 35 (29) 686—690.
4. H. Weyl, On the foundations of general infinitesimal geometry. Bull. of the Amer. Math. Soc. 35 (29) 716—725.
5. O. Veblen, Generalized projective geometry, Journ. Lond. Math. Soc. 4 (29) 140—160.
6. O. Veblen, Differential invariants and geometry, Atti del Congresso Internazionale dei Matematici. Bologna, Zanichelli (29), Bd I 181—189.

1930.

1. J. A. Schouten-St. Gołąb, Über projektive Übertragungen und Ableitungen, Math. Zeitschr. (unter der Presse).
2. J. A. Schouten-St. Gołąb, Über projektive Übertragungen und Ableitungen II, Annali di Matematica (unter der Presse).