VOJTECH JARNÍK.

Zur metrischen Theorie der diophantischen Approximationen.

Przyczynek do metrycznej teorji przybliżeń diofantowych.

Es sei $0 \leqq \Theta \leqq 1$; dann besitzt bekanntlich die Ungleichung

$$\left|\Theta - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}\, b^2}$$

unendlich viele Lösungen in ganzen Zahlen a, b. In dieser Ungleichung darf die Zahl $\sqrt{5}$ durch keine grössere Zahl ersetzt werden [1]); andererseits gibt es irrationale Zahlen Θ, die sich „beliebig gut" durch rationale Zahlen approximieren lassen [2]). Dieser Umstand führt zu folgender Fragestellung.

Es sei $f(x)$ eine für $x > 0$ stetige und positive Funktion; $x^2 f(x)$ sei für $x > 0$ abnehmend. Wir wollen sagen, dass eine Zahl Θ mit $0 \leqq \Theta \leqq 1$ „die Approximation $f(x)$ gestattet" (oder auch, dass die Approximation $f(x)$ durch die Zahl Θ realisiert wird), wenn die Ungleichung

$$\left|\Theta - \frac{a}{b}\right| < f(b)$$

unendlich viele Lösungen in ganzen Zahlen a, b besitzt. Wir fragen nun: wie gross ist das Lebesguesche Mass der Menge derjenigen Zahlen Θ $(0 \leqq \Theta \leqq 1)$, welche die Approximation $f(x)$ gestatten? Diese Frage

---

[1]) Wegen der Sätze über Kettenbrüche, die im folgenden angewandt werden, vgl. z. B. O. Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen (Leipzig und Berlin, 1913), insbes. S. 37 — 55.

[2]) Man denke nur an eine Irrationalzahl, in deren Dezimalentwickelung „sehr lange" Reihen von Nullen vorkommen.

wurde vom Herrn Khintchine folgendermassen beantwortet [1]): Dieses Mass ist gleich 0, wenn $\int^{+\infty} x f(x)\, d x$ konvergiert und dieses Mass ist gleich 1, wenn $\int^{+\infty} x f(x)\, d x$ divergiert.

Es werde nun für $\alpha > 2$ mit P_α die Menge derjenigen Zahlen Θ mit $0 \leqq \Theta \leqq 1$ bezeichnet, welche die Approximation $\frac{1}{x^\alpha}$ gestatten; nach dem Satze des Herrn Khintchine ist das Mass von P_α gleich 0. Trotzdem kann man die Mengen P_α, die zu verschiedenen Werten von α gehören, in bezug auf ihre „Ausdehnung" untereinander unterscheiden, wenn man statt des Lebesgueschen Masses den Hausdorffschen Mass—und Dimensionsbegriff einführt [2]).

Diese Hausdorffsche Dimension kann folgendermassen eingeführt werden:

Es sei eine reelle Zahl s gegeben; es sei E eine Menge von reellen Zahlen; wir überdecken E mit höchstens abzählbar vielen Intervallen, deren Längen mit $l_1, l_2, \ldots$ bezeichnet werden mögen und bilden die Summe $\sum_i l_i^s$ (diese Summe möge $+\infty$ bedeuten, wenn $\sum_i l_i^s$ divergiert). Wenn $\rho > 0$, so sei $L_{s,\rho}(E)$ die untere Grenze aller solchen Summen $\sum_i l_i^s$, gebildet für alle solchen Überdeckungen der Menge E, für welche $l_1 \leqq \rho,\ l_2 \leqq \rho,\ l_3 \leqq \rho, \ldots$. Wenn ρ abnimmt, so nimmt $L_{s,\rho}(E)$ offenbar nicht ab, also existiert der Grenzwert

$$\lim_{\rho=0} L_{s,\rho}(E) = L_s(E) \quad (0 \leqq L_s(E) \leqq +\infty).$$

(Für $s = 1$ ist $L_{s,\rho}(E)$ offenbar von ρ unabhängig und gleich dem äusseren Lebesgueschen Mass von E.) Für $s < s'$ ist $L_{s',\rho}(E) \leqq \rho^{s'-s} L_{s,\rho}(E)$; aus $L_s(E) < +\infty$ folgt also $L_{s'}(E) = 0$. Weiter ist offenbar $L_s(E) = 0$ für $s > 1$ (man denke sich z. B. die ganze reelle Zahlenachse durch abzählbar viele Intervalle überdeckt, deren Längen $l_1, l_2, \ldots$ durch $l_i = \frac{\rho}{i}$ gegeben sind); für $s < 0$ ist offenbar $L_s(E) = +\infty$, wenn E nicht leer ist.

[1]) Einige Sätze über Kettenbrüche usw., Mathem. Annalen 92 (1924), S. 115—125.

[2]) F. Hausdorff, Dimension und äusseres Mass, Mathematische Annalen 79 (1919), S. 157—179. Der Leser braucht von der Hausdorffschen Theorie nichts zu kennen.

Also gibt es — falls E nicht leer ist — eine Zahl σ, so dass $0 \leqq \sigma \leqq 1$, $L_s(E) = 0$ für $s > \sigma$, $L_s(E) = \infty$ für $s < \sigma$. Diese Zahl σ heisse die Hausdorffsche Dimension der Menge E, in Zeichen

$$\dim E = \sigma.$$

Nach dem Gesagten ist folgendes klar:

1. Bei der Definition von $L_{s,\rho}(E)$, $L_s(E)$, $\dim E$ ist es gleichgültig, ob wir bei der Überdeckung von E nur offene oder nur abgeschlossene Intervalle oder beides zugleich zulassen.
2. Aus $E \subset E'$ folgt $\dim E \leqq \dim E'$.
3. Wenn D eine höchstens abzählbare Menge von reellen Zahlen ist, so ist

$$\dim (E + D) = \dim E$$

(wenn wir, wie immer, E als nichtleer voraussetzen).

Nach diesen Vorbereitungen ist schon dem Leser der Sinn des folgenden Satzes klar: Für $\alpha > 2$ ist [1])

$$\dim P_\alpha = \frac{2}{\alpha}.$$

Bei diesem Satz handelte es sich um die Approximation $\frac{1}{x^\alpha}$ $(\alpha > 2)$, welche nur auf einer Menge vom Lebesgueschen Mass Null realisiert wird; wir wollen uns nun solchen Approximationen $f(x)$ zuwenden, die im Gegenteil für *alle* θ $(0 \leqq \theta \leqq 1)$ mit Ausnahme einer Menge vom Lebesgueschen Mass Null realisiert werden; dies ist z. B. für die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x^2 \max(1, \log^\alpha x)}$$

$(0 < \alpha \leqq 1)$ der Fall (denn das Integral

$$\int^{+\infty} x f(x)\, dx$$

divergiert für $0 < \alpha \leqq 1$; für $\alpha > 1$ konvergiert aber schon das Integral). Hier hat freilich die Menge der Zahlen θ $(0 \leqq \theta \leqq 1)$, welche die Approximation $f(x)$ gestatten, das Lebesguesche Mass 1, also umsomehr die Dimension 1. Man muss hier also die Menge Q_α derjenigen Zahlen θ $(0 \leqq \theta \leqq 1)$ untersuchen, welche die Approximation

[1]) Dieser Satz wird in meiner Abhandlung „Diophantische Approximationen und Hausdorffsches Mass" (im Druck in Recueil mathématique de la Société mathématique de Moscou) bewiesen.

$$f(x) = \frac{1}{x^2 \max(1, \log^\alpha x)} \quad (0 < \alpha \leqq 1)$$

nicht gestatten; die Dimension von Q_α ist aber keine wachsende Funktion von α, wie man vielleicht vermuten könnte, sondern es gilt der

Satz 1. dim $Q_\alpha = 1$ für $0 < \alpha \leqq 1$.

Diesen Satz und noch viel mehr wollen wir in dieser Note beweisen. Es sei M_∞ die Menge derjenigen Zahlen θ mit $0 \leqq \theta \leqq 1$, welche folgende Eigenschaft haben: zu θ gibt es eine nur von θ abhängige positive Zahl $c(\theta)$, so dass für alle ganzen p, q mit $q > 0$ die Ungleichung

$$\left| \theta - \frac{p}{q} \right| > \frac{c(\theta)}{q^2}$$

gilt. Offenbar ist $M_\infty \subset Q_\alpha$ für $0 < \alpha \leqq 1$; der Satz 1. wird also bewiesen sein, wenn wir folgenden Satz beweisen:

Satz 2. dim $M_\infty = 1$.

Wir wollen aber noch mehr beweisen. Bekanntlich lassen sich alle Irrationalzahlen θ mit $0 < \theta < 1$ und alle Folgen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ (a_i ganz und positiv für $i = 1, 2, \ldots$) eineindeutig so zuordnen, dass für die Zahl θ und die ihr zugeordnete Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ die Beziehung

$$(1) \qquad \theta = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots}}}$$

gilt. a_n heisse der n—te Teilnenner von θ; wenn

$$\cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}} = \frac{p_n}{q_n},$$

wo $n \geqq 1$, $q_n > 0$, $(p_n, q_n) = 1$, so heisse p_n der n—te Näherungszähler, q_n der n—te Näherungsnenner von θ; um grössere Gleichförmigkeit zu erreichen, erweitern wir diese Ausdrucksweise auch auf die Fälle $n = -1$ und $n = 0$, indem wir $p_{-1} = 1$, $q_{-1} = 0$, $p_0 = 0$, $q_0 = 1$ setzen.

Wenn n ganze positive Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gegeben sind, so haben alle Irrationalzahlen θ $(0 < \theta < 1)$, deren regulärer Kettenbruch mit

$$\cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}}$$

anfängt, dieselben Näherungszähler p_i und dieselben Näherungsnenner q_i für $-1 \leqq i \leqq n$; wir wollen diese Zahlen als die i—ten zu den Teilnennern $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gehörigen Näherungszähler und Näherungsnenner bezeichnen; und wir benutzen diese Ausdrucksweise auch für $n = 0$ [1]).

Aus (1) folgt bekanntlich

$$(2) \qquad \begin{cases} p_{n+1} = a_{n+1} p_n + p_{n-1} \\ q_{n+1} = a_{n+1} q_n + q_{n-1} \end{cases} \qquad (n \geqq 0),$$

$$(3) \qquad p_{n+1} q_n - p_n q_{n+1} = (-1)^n \qquad (n \geqq -1),$$

$$\frac{1}{q_n (q_{n+1} + q_n)} < \left| \theta - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}} \qquad (n \geqq 0),$$

also

$$(4) \qquad \frac{1}{(a_{n+1} + 2) q_n^2} < \left| \theta - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{a_{n+1} q_n^2}.$$

Ausserdem ist bekannt: aus

$$\left| \theta - \frac{r}{s} \right| < \frac{1}{2 s^2}, \quad r \text{ ganz}, \ s \text{ ganz}$$

folgt $\frac{r}{s} = \frac{p_n}{q_n}$ für ein geeignetes n.

Man sieht also, dass die reguläre Kettenbruchentwickelung einer Irrationalzahl θ einen sehr guten Aufschluss gibt über die Annäherungsmöglichkeiten der Zahl θ durch rationale Zahlen. Insbesondere ist M_∞ genau die Menge aller Irrationalzahlen θ mit $0 < \theta < 1$ und mit beschränkten Teilnennern.

Wir wollen ausser M_∞ noch folgende Mengen untersuchen: wenn α ganz, $\alpha \geqq 2$, so sei M_α die Menge aller Irrationalzahlen θ (mit $0 < \theta < 1$), deren Teilnenner sämtlich höchstens gleich α sind (die analoge Menge M_1 wäre trivial, sie würde aus einer einzigen Zahl

[1]) Im folgenden werden wir, wenn $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gegeben sind, mit p_i, q_i $(-1 \leqq i \leqq n)$ stets die zu den Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gehörigen i-ten Näherungszähler und Näherungsnenner bezeichnen, ohne es ausdrücklich zu erwähnen, wenn keine Verwirrung zu befürchten ist.

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}$$

bestehen).

Die Bedeutung von M_α für unsere Approximationsprobleme ist nach (4) klar. Und wir werden zeigen: schon die Menge M_2 hat eine positive Dimension; die Dimension von M_α ist aber stets kleiner als 1; erst ihre Vereinigungsmenge

$$M_\infty = M_2 + M_3 + M_4 + \ldots$$

hat die Dimension 1. Und noch schärfer werden wir die beiden folgenden Sätze beweisen (aus welchen Satz 1. und Satz 2. unmittelbar folgen):

Satz 3. $\dim M_2 > \frac{1}{4}$.

Satz 4. Für ganzes $\alpha > 8$ ist

$$1 - \frac{4}{\alpha \,.\, \log 2} \leqq \dim M_\alpha \leqq 1 - \frac{1}{8\,\alpha \log \alpha}.$$

§ 2. Beweis der Sätze 3. und 4.

1. In diesem ganzen Paragraphen sei ein festes ganzes $\alpha \geqq 2$ vorgegeben.

Im folgenden werden wir mit (a, b) das abgeschlossene Intervall bezeichnen, dessen Endpunkte a und b sind ($a < b$ oder $a > b$).

Es seien nun n ganze positive Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gegeben, wo $n \geqq 0$, $a_i \leqq \alpha$ für $i = 1, 2, \ldots, n$. Diejenigen Irrationalzahlen θ mit $0 < \theta < 1$, deren i-ter Teilnenner fur $i = 1, 2, \ldots, n$ gleich a_i ist, sind genau alle Zahlen

$$\theta = \frac{\varepsilon\, p_n + p_{n-1}}{\varepsilon\, q_n + q_{n-1}},$$

wo $\varepsilon > 1$, ε irrational. Diese Zahlen θ sind also genau alle Irrationalzahlen eines bestimmten abgeschlossenen Intervalls, welches mit I^n und, wenn nötig, auch ausführlicher mit $I^n_{a_1, a_2, \ldots, a_n}$ bezeichnet werden möge.

Wir wollen jedes I^n ein „langes Intervall n-ter Ordnung" nennen. Es ist

$$I^n_{a_1, a_2, \ldots, a_n} = \left(\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}}\right).$$

Analog: Es seien n ganze positive Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gegeben, wo $n \geqq 0$, $a_i \leqq \alpha$ für $i = 1, 2, \ldots, n$; diejenigen Irrationalzahlen θ mit $0 < \theta < 1$, deren i—ter Teilnenner für $i = 1, 2, \ldots, n$ gleich a_i ist und deren $(n+1)$—ter Teilnenner höchstens gleich α ist, sind genau alle Zahlen

$$\theta = \frac{\varepsilon\, p_n + p_{n-1}}{\varepsilon\, q_n + q_{n-1}},$$

wo ε irrational, $1 < \varepsilon < \alpha + 1$. Diese Zahlen θ sind also genau alle Irrationalzahlen eines bestimmten abgeschlossenen Intervalls, welches mit K^n und, wenn nötig, auch ausführlicher mit $K^n_{a_1, a_2, \ldots, a_n}$ bezeichnet werden möge. Wir wollen jedes K^n ein „kurzes Intervall n—ter Ordnung" nennen. Es ist

$$K^n_{a_1, a_2, \ldots, a_n} = \left(\frac{(\alpha+1)\, p_n + p_{n-1}}{(\alpha+1)\, q_n + q_{n-1}}, \frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}}\right).$$

Jedes $K^n_{a_1, a_2, \ldots, a_n}$ entsteht offenbar dadurch, dass man von dem entsprechenden $I^n_{a_1, a_2, \ldots, a_n}$ ein Stück abschneidet, welches nach (3) für gerades n am linken, für ungerades n am rechten Ende von $I^n_{a_1, a_2, \ldots, a_n}$ liegt. Da zwei lange Intervalle I^n derselben Ordnung, die nicht zu demselben System $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gehören, offenbar höchstens einen Punkt gemeinsam haben, haben die beiden zugehörigen kurzen Intervalle K^n überhaupt keinen gemeinsamen Punkt.

Es gibt genau α^n lange und ebensoviel kurze Intervalle n-ter Ord nung; offenbar ist

$$(5) \qquad \left\{\begin{array}{l} I^{n+1}_{a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}} \subset I^n_{a_1, a_2, \ldots, a_n} \\ K^{n+1}_{a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}} \subset K^n_{a_1, a_2, \ldots, a_n} \\ I^{n+1}_{a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}} \subset K^n_{a_1, a_2, \ldots, a_n}\,. \end{array}\right.$$

Die Länge eines Intervalls I bezeichnen wir allgemein mit $|I|$; also ist

$$|I^n_{a_1, a_2, \ldots, a_n}| = \frac{1}{q_n\,(q_n + q_{n-1})}$$

$$|K^n_{a_1, a_2, \ldots, a_n}| = \frac{\alpha}{((\alpha+1)\, q_n + q_{n-1})\,(q_n + q_{n-1})}.$$

2. Es sei nun V_n für ein gegebenes ganzes $n \geqq 0$ die Vereinigungsmenge aller langen Intervalle n-ter Ordnung, W_n die Vereinigungsmenge aller kurzen Intervalle n-ter Ordnung, also

$$V_0 = I^0, \ W_0 = K^0, \ V_n = \sum_{a_i=1}^{\alpha} I^n_{a_1, a_2, \ldots, a_n},$$

$$W_n = \sum_{a_i=1}^{\alpha} K^n_{a_1, a_2, \ldots, a_n} \quad \text{für } n > 0.$$

Es ist nach (5) [1])

$$V_0 \supset W_0 \supset V_1 \supset W_1 \supset V_2 \supset W_2 \supset \ldots,$$

also ist die abgeschlossene, nur von α abhängige Menge

$$N_\alpha = V_0 \, V_1 \, V_2 \ldots$$

nichtleer und mit $W_0 \, W_1 \, W_2 \ldots$ identisch. N_α ist sogar perfekt; denn die Länge eines K^n ist für $n > 0$ kleiner als $\frac{1}{n^2}$ (wegen $q_n \geqq n$) und jedes K^n enthält mindestens zwei (nämlich genau α) Intervalle K^{n+1}, die paarweise fremd sind und von welchen jedes mindestens einen Punkt von N_α enthält. Die in N_α enthaltenen Irrationalzahlen sind offenbar genau alle Zahlen aus M_α; daher ist $N_\alpha = M_\alpha + D$, wo D aus lauter rationalen Zahlen besteht, also höchstens abzählbar ist; also ist nach § 1

$$\dim N_\alpha = \dim M_\alpha.$$

3. Wir fragen also nach der Dimension von N_α. Im Rest dieses Paragraphen sei eine Zahl s fest gewählt, $0 < s < 1$. Wenn $\mathfrak{U}$ ein System von höchstens abzählbar vielen Intervallen ist, deren Längen $l_1, l_2, l_3, \ldots$ heissen, so setzen wir

$$\Lambda_s(\mathfrak{U}) = \sum_i l_i^s.$$

Unsere Aufgabe besteht im folgenden: wenn ein $\rho > 0$ gegeben ist, so soll die untere Grenze von $\Lambda_s(\mathfrak{U})$ für alle Systeme $\mathfrak{U}$ abgeschätzt

[1]) Oder direkt nach der Definition von I^n und K^n, die sogar $W_n = V_{n+1}$ liefert.

werden, welche die Menge N_α überdecken und den Ungleichungen $l_i \leqq \rho$ $(i = 1, 2, \ldots)$ genügen. Offenbar ist es gleichgültig, ob wir in den Systemen $\mathfrak{U}$ nur abgeschlossene oder nur offene Intervalle oder beides zugleich zulassen.

Es sei also $\mathfrak{U}$ ein Überdeckungssystem von N_α, welches aus höchstens abzählbar vielen *offenen* Intervallen besteht, deren Längen eine gegebene positive Zahl ρ nicht überschreiten. Nach dem Borelschen Satz können wir aus diesen Intervallen *endlich* viele herausgreifen, welche auch die (abgeschlossene, beschränkte) Menge N_α überdecken; von diesen Intervallen lassen wir noch diejenigen weg, die keinen Punkt von N_α enthalten. Jedes übriggebliebene Intervall G des Systems $\mathfrak{U}$ enthält im Inneren mindestens einen Punkt von N_α, also (da N_α perfekt ist) unendlich viele Punkte von N_α. Es sei a die untere, b die obere Grenze des Durchschnittes $G \, . \, N_\alpha$ (a, b sind entweder Punkte von G oder Endpunkte von G, sie gehören aber sicher zu N_α, da N_α abgeschlossen ist); wir ersetzen G durch das *abgeschlossene* Intervall (a, b). Wenn wir im System $\mathfrak{U}$ diese Änderungen durchführen, so wird dadurch die Zahl $\Lambda_s(\mathfrak{U})$ nicht vergrössert und das modifizierte System überdeckt wieder die Menge N_α.

4. Wir betrachten daher nur Überdeckungssysteme $\mathfrak{B}$ folgender Art: $\mathfrak{B}$ ist ein System von endlich vielen abgeschlossenen Intervallen, welche die Menge N_α überdecken. Jedes Intervall des Systems $\mathfrak{B}$ hat zu Endpunkten Punkte von N_α und enthält unendlich viele Punkte von N_α (die Einschränkung $l_i \leqq \rho$ lassen wir fallen). Dann ist nach 3. für jedes $\rho > 0$ die untere Grenze der Zahlen $\Lambda_s(\mathfrak{B})$ für alle solchen $\mathfrak{B}$ sicher nicht grösser als $L_{s,\rho}(N_\alpha)$, also auch sicher nicht grösser als $\lim\limits_{\rho=0} L_{s,\rho}(N_\alpha) = L_s(N_\alpha)$.

5. Es sei also ein solches System $\mathfrak{B}$ vorgelegt; es sei G ein abgeschlossenes Intervall des Systems $\mathfrak{B}$. Da $N_\alpha \subset K^0$, so ist auch $G \subset K^0$. Da jeder Punkt von N_α für jedes ganze $n \geqq 0$ in einem kurzen Intervall n-ter Ordnung K^n liegt, da weiter $|K^n| < \frac{1}{n^2}$ für $n > 0$ gilt, und da endlich G unendlich viele Punkte von N_α enthält, so gibt es auch ein n, so dass G Punkte von mehr als einem kurzen Intervall n-ter Ordnung enthält.

Wegen $G \subset K^0$ gibt es also eine ganze Zahl $m \geqq 0$ mit folgender Eigenschaft: es gibt m ganze positive Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_m$ mit $a_i \leqq \alpha$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, so dass

$$G \subset K^m_{a_1, a_2, \ldots, a_m};$$

es gibt aber zwei Intervalle

$$K^{m+1}_{a_1, a_2, \ldots, a_m, k}\,;\; K^{m+1}_{a_1, a_2, \ldots, a_m, l} \quad (1 \leqq k \leqq \alpha,\; 1 \leqq l \leqq \alpha,\; k \neq l),$$

von welchen jedes mindestens einen Punkt von G enthält.

Nach 1. ist (mit Benutzung von (2))

$$(6)\quad \begin{cases} K^{m+1}_{a_1, a_2, \ldots, a_m, k} = \left(\dfrac{(\alpha+1)(kp_m+p_{m-1})+p_m}{(\alpha+1)(kq_m+q_{m-1})+q_m},\; \dfrac{kp_m+p_{m-1}+p_m}{kq_m+q_{m-1}+q_m}\right), \\[2ex] K^{m+1}_{a_1, a_2, \ldots, a_m, l} = \left(\dfrac{(\alpha+1)(lp_m+p_{m-1})+p_m}{(\alpha+1)(lq_m+q_{m-1})+q_m},\; \dfrac{lp_m+p_{m-1}+p_m}{lq_m+q_{m-1}+q_m}\right). \end{cases}$$

Wegen (3) ist für gerades m in (6) rechts der links geschriebene Endpunkt beidemal grösser als der entsprechende rechts geschriebene Endpunkt; umgekehrt für ungerades m. Bei geeigneter Bezeichnung ist also der Abstand der beiden Intervalle in (6) gleich (man benutze (3))

$$\left|\frac{(\alpha+1)(kp_m+p_{m-1})+p_m}{(\alpha+1)(kq_m+q_{m-1})+q_m} - \frac{lp_m+p_{m-1}+p_m}{lq_m+q_{m-1}+q_m}\right| =$$

$$= \frac{|(\alpha+1)(k-l-1)+1|}{((\alpha+1)(kq_m+q_{m-1})+q_m)((l+1)q_m+q_{m-1})} \geqq$$

$$\geqq \frac{1}{4\alpha^3 q_m (q_m+q_{m-1})}$$

(denn $\alpha \geqq 2$, $k \leqq \alpha$, $l \leqq \alpha$; $|(\alpha+1)(k-l-1)+1|$ ist gleich 1 für $k-l-1=0$, sonst mindestens gleich $\alpha > 1$).

Die Länge von G ist also mindestens

$$\frac{1}{4\alpha^3 q_m (q_m+q_{m-1})};$$

die Länge von $I^m_{a_1, a_2, \ldots, a_m}$ ist gleich

$$\frac{1}{q_m(q_m+q_{m-1})}.$$

Wenn wir also im System $\mathfrak{B}$ jedes Intervall G durch das entsprechende Intervall $I^m_{a_1, a_2, \ldots, a_m}$ ersetzen, bekommen wir ein System $\mathfrak{W}$ von abgeschlossenen Intervallen, welches die Menge N_α überdeckt und die Ungleichung erfüllt

$$\Lambda_s(\mathfrak{W}) \leqq 4^s \alpha^{3s} \Lambda_s(\mathfrak{B}).$$

Wenn nun im System $\mathfrak{W}$ zwei Intervalle I^m, I^n mit $m > n$ vorkommen, so das $I^m \subset I^n$, so wird $\Lambda_s(\mathfrak{W})$ verkleinert, wenn wir I^m aus $\mathfrak{W}$ weglassen. Wenn wir dies Verfahren wiederholen, kommen wir zu einem Überdeckungssystem $\mathfrak{X}$, welches aus endlich vielen langen Intervallen n-ter Ordnung (n kann freilich von einem Intervall zum anderen variieren) besteht, von welchen keines Teilmenge eines anderen ist; dabei ist

$$\Lambda_s(\mathfrak{X}) \leqq 4^s \alpha^{3s} \Lambda_s(\mathfrak{B}).$$

6. Wir wollen uns daher auf Systeme $\mathfrak{X}$ folgender Art beschränken: $\mathfrak{X}$ sei ein System von endlich vielen langen Intervallen n-ter Ordnung (wobei n von einem Intervall zum anderen variieren kann), welche die Menge N_α überdecken und von welchen keines Teilmenge eines anderen ist.

Nach 4. und 5. ist $L_s(N_\alpha)$ sicher nicht kleiner als die untere Grenze der Zahlen

$$\frac{1}{4^s \alpha^{3s}} \Lambda_s(\mathfrak{X})$$

für alle solchen Systeme $\mathfrak{X}$. Wenn wir also für irgend ein s und irgend ein α zeigen können, dass $\Lambda_s(\mathfrak{X}) \geqq 1$ für alle solchen Systeme $\mathfrak{X}$, dann ist $L_s(N_\alpha) > 0$, also $\dim N_\alpha \geqq s$.

7. Wir beweisen nun folgenden

Hilfssatz 1. Voraussetzung. *s und α seien fest gegeben;* $0 < s < 1$, *α ganz,* $\alpha \geqq 2$. *Für jedes ganze* $n > 0$ *und jedes System von ganzen Zahlen* $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ $(1 \leqq a_i \leqq \alpha$ *für* $i = 1, 2, \ldots, n-1)$ *sei*

$$(7)\qquad |I^{n-1}_{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}}|^s \leqq \sum_{k=1}^{\alpha} |I^n_{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, k}|^s.$$

Behauptung. $\dim N_\alpha \geqq s$.

Beweis. Es sei $\mathfrak{X}$ ein Überdeckungssystem von N_α von der in 6. geschilderten Art. Diejenigen I^n, die in $\mathfrak{X}$ vorkommen, können von verschiedener Ordnung n sein; die höchste auftretende Ordnung sei l $(l \geqq 0)$, sie möge „Ordnung des Systems $\mathfrak{X}$" heissen. Wenn $l > 0$, so kommt in $\mathfrak{X}$ ein Intervall l-ter Ordnung $I^l_{a_1, a_2, \ldots, a_{l-1}, a_l}$ vor, aber kein Intervall höherer als l-ter Ordnung und kein Intervall I^n mit $n < l$, für welches $I^l_{a_1, a_2, \ldots, a_{l-1}, a_l} \subset I^n$ wäre. Da jedes lange Intervall l-ter Ordnung unendlich viele Punkte von N_α enthält, müssen also in $\mathfrak{X}$ alle Intervalle

$$I^l_{a_1, a_2, \ldots, a_{l-1}, k} \qquad (1 \leqq k \leqq \alpha) \tag{8}$$

(da sie zu je zwei höchstens einen gemeinsamen Punkt haben) vorkommen. Wenn wir diese Intervalle (8) aus $\mathfrak{X}$ weglassen und durch das Intervall $I^{l-1}_{a_1, a_2, \ldots, a_{l-1}}$ ersetzen, bekommen wir wieder ein Überdekkungssystem $\mathfrak{X}'$ von der in 6. geschilderten Art. Nach (7) ist

$$\Lambda_s(\mathfrak{X}') \leqq \Lambda_s(\mathfrak{X}).$$

Indem wir dieses Verfahren für die vielleicht noch existierenden Intervalle l-ter Ordnung aus $\mathfrak{X}'$ wiederholen, kommen wir endlich zu einem System $(l-1)$-ter Ordnung $\mathfrak{X}_1$ mit $\Lambda_s(\mathfrak{X}_1) \leqq \Lambda_s(\mathfrak{X})$ und durch weitere Wiederholung bekommen wir endlich ein System nullter Ordnung $\mathfrak{Y}$ mit $\Lambda_s(\mathfrak{Y}) \leqq \Lambda_s(\mathfrak{X})$. Da aber $\mathfrak{Y}$ die Menge N_α überdeckt und von nullter Ordnung ist, besteht $\mathfrak{Y}$ genau aus einem Intervall (0,1), also ist $\Lambda_s(\mathfrak{Y}) = 1^s = 1$, $\Lambda_s(\mathfrak{X}) \geqq 1$, womit nach 6. die Behauptung bewiesen ist.

8. Wir beweisen nun den Satz 3:

$$\dim M_2 > \frac{1}{4}.$$

Wir sollen also zeigen, dass für $\alpha = 2$ und ein geeignetes $s > \frac{1}{4}$ die Voraussetzungen des Hilfssatzes 1. erfüllt sind. Die Ungleichung (7) lautet jetzt

$$\frac{1}{q^s_{n-1}(q_{n-1}+q_{n-2})^s} \leqq \frac{1}{(q_{n-1}+q_{n-2})^s(2q_{n-1}+q_{n-2})^s} + \frac{1}{(2q_{n-1}+q_{n-2})^s(3q_{n-1}+q_{n-2})^s}$$

oder

$$1 \leqq \frac{1}{\left(2+\frac{q_{n-2}}{q_{n-1}}\right)^s} + \frac{1}{\left(2+\frac{q_{n-2}}{q_{n-1}}\right)^s\left(3-\frac{2q_{n-2}}{q_{n-1}+q_{n-2}}\right)^s}.$$

Wegen $0 \leqq q_{n-2} \leqq q_{n-1}$ ist diese Ungleichung sicher erfüllt, wenn $\frac{1}{3^s} + \frac{1}{9^s} \geqq 1$; diese Ungleichung ist aber für ein geeignetes $s > \frac{1}{4}$ erfüllt; denn $\frac{1}{3^{1/4}} + \frac{1}{9^{1/4}} > \frac{2}{9^{1/4}} > \frac{2}{16^{1/4}} = 1$.

9. Wir beweisen nun die erste Hälfte des Satzes 4., nämlich die **Behauptung:** für ganzes $\alpha > 8$ ist

$$\dim N_\alpha \geqq 1 - \frac{4}{\alpha \log 2}.$$

Wir setzen also $s = 1 - \frac{4}{\alpha \log 2}$, wo $\alpha > 8$, α ganz und haben zu zeigen, dass die Voraussetzung des Hilfssatzes 1. erfüllt ist. Die zu beweisende Ungleichung (7) lautet

$$\frac{1}{q^s_{n-1}(q_{n-1}+q_{n-2})^s} \leqq \sum_{k=1}^{\alpha} \frac{1}{(k q_{n-1}+q_{n-2})^s((k+1)q_{n-1}+q_{n-2})^s}. \tag{8}$$

Nach (3) ist

$$\sum_{k=1}^{\alpha} \frac{1}{(k q_{n-1}+q_{n-2})((k+1)q_{n-1}+q_{n-2})} =$$

$$= (-1)^{n-1} \sum_{k=1}^{\alpha} \left(\frac{k p_{n-1}+p_{n-2}}{k q_{n-1}+q_{n-2}} - \frac{(k+1)p_{n-1}+p_{n-2}}{(k+1)q_{n-1}+q_{n-2}}\right)$$

$$= (-1)^{n-1}\left(\frac{p_{n-1}+p_{n-2}}{q_{n-1}+q_{n-2}} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right)$$

$$+ (-1)^{n-1}\left(\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \frac{(\alpha+1)p_{n-1}+p_{n-2}}{(\alpha+1)q_{n-1}+q_{n-2}}\right)$$

$$= \frac{1}{q_{n-1}(q_{n-1}+q_{n-2})} - \frac{1}{q_{n-1}((\alpha+1)q_{n-1}+q_{n-2})}$$

$$= \frac{1}{q_{n-1}(q_{n-1}+q_{n-2})}\left(1-\frac{\tau}{\alpha}\right),$$

wo τ noch von verschiedenen Argumenten abhängt, sicher aber

$$\tfrac{1}{2} < \tau < 2$$

ist.

Der Ausdruck $\sum_{k=1}^{\alpha} \frac{1}{(k\, q_{n-1} + q_{n-2})^s \,((k+1)\, q_{n-1} + q_{n-2})^s}$

entsteht aus $\sum_{k=1}^{\alpha} \frac{1}{(k\, q_{n-1} + q_{n-2}) \,((k+1)\, q_{n-1} + q_{n-2})}$,

wenn man darin den k-ten Summanden mit dem Ausdruck

$$(k\, q_{n-1} + q_{n-2})^{1-s} \,((k+1)\, q_{n-1} + q_{n-2})^{1-s} \tag{9}$$

multipliziert. Der Ausdruck (9) ist aber mindestens gleich (man setze $k = 1$)

$$(q_{n-1} + q_{n-2})^{1-s} \,(2\, q_{n-1} + q_{n-2})^{1-s} \geqq$$
$$(2\, q_{n-1}\,(q_{n-1} + q_{n-2}))^{1-s};$$

also ist

$$\sum_{k=1}^{\alpha} \frac{1}{(k\, q_{n-1} + q_{n-2})^s \,((k+1)\, q_{n-1} + q_{n-2})^s}$$
$$\geqq \frac{1}{q_{n-1}^s\,(q_{n-1} + q_{n-2})^s} \cdot 2^{1-s} \left(1 - \frac{2}{\alpha}\right).$$

Die Ungleichung (8) ist also richtig, wenn $2^{1-s}\left(1 - \frac{2}{\alpha}\right) \geqq 1$, d. h. wenn $(1-s)\log 2 \geqq -\log\left(1 - \frac{2}{\alpha}\right)$; und dies ist wegen $(1-s)\log 2 = \frac{4}{\alpha}$, $-\log\left(1 - \frac{2}{\alpha}\right) = \frac{2}{\alpha} + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\alpha}\right)^2 + \ldots < \frac{4}{\alpha}$ der Fall. Damit ist die Behauptung bewiesen.

10. **Hilfssatz 2. Voraussetzung.** *s und α seien fest gegeben; $0 < s < 1$, α ganz, $\alpha \geqq 2$. Für jedes ganze $n > 0$ und für jedes System von ganzen Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ ($1 \leqq a_i \leqq \alpha$ für $i = 1, 2, \ldots, n-1$) sei*

$$|I^{n-1}_{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}}|^s \geqq \sum_{k=1}^{\alpha} |I^n_{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, k}|^s. \tag{10}$$

Behauptung. $\dim N_\alpha \leqq s$.

Beweis. Aus (10) folgt

$$1 = |I^0|^s \geqq \Sigma\, |I^1|^s \geqq \Sigma\, |I^2|^s \geqq \ldots,$$

wo die Summe $\Sigma\, |I^n|^s$ über alle langen Intervalle n-ter Ordnung erstreckt wird. Es sei nun ein $\rho > 0$ gegeben; wir wählen ein festes n so gross, dass alle langen Intervalle n-ter Ordnung kürzer als ρ sind (das ist möglich, da $|I^n| \leqq \frac{1}{n^2}$ für $n > 0$).

Alle langen Intervalle n-ter Ordnung überdecken die Menge N_α; also ist $L_{s,\rho}(N_\alpha) \leqq \Sigma\, |I^n|^s \leqq |I^0|^s = 1$, also $L_s(N_\alpha) = \lim_{\rho=0} L_{s,\rho}(N_\alpha) \leqq 1$, also $\dim N_\alpha \leqq s$, wie behauptet.

11. Wir beweisen nun die zweite Hälfte des Satzes 4, d. h. die **Behauptung:** für ganzes $\alpha > 8$ ist

$$\dim N_\alpha \leqq 1 - \frac{1}{8\,\alpha \log \alpha}.$$

Wir setzen also $s = 1 - \frac{1}{8\,\alpha \log \alpha}$, wo $\alpha > 8$, α ganz und haben zu zeigen, dass die Voraussetzung des Hilfssatzes 2. erfüllt ist. Die zu beweisende Ungleichung (10) lautet

$$\frac{1}{q_{n-1}^s\,(q_{n-1} + q_{n-2})^s} \geqq \sum_{k=1}^{\alpha} \frac{1}{(k\, q_{n-1} + q_{n-2})^s \,((k+1)\, q_{n-1} + q_{n-2})^s}. \tag{11}$$

Nun haben wir in 9. gezeigt, dass

$$\sum_{k=1}^{\alpha} \frac{1}{(k\, q_{n-1} + q_{n-2}) \,((k+1)\, q_{n-1} + q_{n-2})} \leqq \frac{1 - \frac{1}{2\alpha}}{q_{n-1}\,(q_{n-1} + q_{n-2})}. \tag{12}$$

Der Ausdruck rechts in (11) entsteht aus dem Ausdruck links in (12), wenn dort das k-te Glied mit dem Ausdruck

$$(k\, q_{n-1} + q_{n-2})^{1-s} \,((k+1)\, q_{n-1} + q_{n-2})^{1-s}$$

multipliziert wird. Dieser Ausdruck ist aber höchstens gleich (man setze $k = \alpha$)

$$(\alpha\, q_{n-1} + q_{n-2})^{1-s} \,((\alpha+1)\, q_{n-1} + q_{n-2})^{1-s}$$
$$\leqq (\alpha+1)^{2-2s}\, q_{n-1}{}^{1-s}\,(q_{n-1} + q_{n-2})^{1-s}$$
$$< (2\,\alpha)^{2-2s}\, q_{n-1}^{1-s}\,(q_{n-1} + q_{n-2})^{1-s}.$$

Also ist

$$\sum_{k=1}^{\alpha} \frac{1}{(k\, q_{n-1}+q_{n-2})^s\, ((k+1)\, q_{n-1}+q_{n-2})^s} \leqq \frac{\left(1-\dfrac{1}{2\,\alpha}\right)(2\,\alpha)^{2-2s}}{q_{n-1}^s\, (q_{n-1}+q_{n-2})^s}$$

und wir haben nur

$$\left(1-\frac{1}{2\,\alpha}\right)(2\,\alpha)^{2-2s} \leqq 1$$

zu zeigen; dies ist aber wegen

$$(2-2\,s)\log 2\,\alpha = \frac{1}{4\,\alpha\log\alpha}\,\log 2\,\alpha < \frac{1}{2\,\alpha}$$

$$< \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2\,\alpha}\right)^n = -\log\left(1-\frac{1}{2\,\alpha}\right)$$

in der Tat der Fall, womit die Behauptung bewiesen ist.

Praha, den 2. Dezember 1929.

ARNOLD WALFISZ.[1])

Ueber einige neuere Ergebnisse der Gitterpunktlehre.

O niektórych nowszych wynikach nauki o punktach siatkowych.

Ich werde mir im folgenden erlauben, über die wichtigsten Fortschritte zu berichten, die die Gitterpunktlehre seit ungefähr Jahresfrist zu verzeichnen hat. Hierbei ist es jedoch geboten, auch über die früheren Forschungen auf diesem Gebiete einiges zu sagen, damit die jüngst erzielten Fortschritte im richtigen Lichte erscheinen.

Gitterpunkte sind Punkte mit ganzzahligen Koordinaten in einem 2,3 oder mehrdimensionalen Cartesischen Raume. Es wird in einem solchen Raume ein endlicher abgeschlossener Bereich $B(x)$ vorgegeben, der von einer positiven Variabeln x abhängt, und es handelt sich im wesentlichen darum, die Anzahl $G(x)$ der Gitterpunkte in $B(x)$ mit wachsendem x nach oben und unten abzuschätzen (O — und Ω - Probleme). Die Bereiche $B(x)$ müssen hierbei „anständig“ sein, um eine Behandlungsweise in diesen Richtungen zuzulassen; was aber „anständig“ heisst, darf ich übergehen, da im folgenden nur Gitterpunktprobleme ganz spezieller Art besprochen werden sollen, bei denen der Bereich $B(x)$ explizit aufgeschrieben wird. Bei diesen Problemen—wie auch bei den wichtigsten Fragestellungen des Gebietes überhaupt — bildet der geometrische Ursprung von $G(x)$ nur eine bequeme Einkleidung rein arithmetischer Kerne. Es darf daher nicht wundernehmen, dass die Gitterpunktlehre als ein Zweig der Zahlentheorie anzusehen ist.

Obwohl die klassischen Problemstellungen der Gitterpunktlehre recht weit zurückliegen, hat eine systematische Forschung nach modernen Grundsätzen erst seit einem Vierteljahrhundert eingesetzt. Das einzige

[1]) Erweiterte Fassung eines Vortrages, den ich während der Slavischen Mathematikertagung in Warschau am 26. September 1929 gehalten habe.