W. ŚLEBODZIŃSKI.

Sur les mouvements rigides dans une variété V_3 [1].

O ruchach sztywnych w rozmaitości V_3.

L'article présent a pour objet le problème suivant: étant donné l'élément linéaire d'une variété riemannienne V_3, reconnaître *au moyen des différentiations et des opérations algébriques,* si celle - ci admet un mouvement rigide continu. On sait que les groupes de mouvements dans une V_3 ont été étudiés dans un important Mémoire de G. Ricci, inséré aux Memorie della Soc, Ital. d. Sc. (Vol. XII. 1899). Bien que les théorèmes de Ricci nous permettent de reconnaître l'existence d'un groupe de nouvements dans plusieurs cas importants, ils ne nous donnent pas cependant de critères qui satisferaient dans tous les cas à la condition précisée plus haut. Or, nous nous proposons de compléter les recherches de Ricci, en nous servant des méthodes de Calcul de congruences. Dans le n^o 1 nous déduirons, sous une forme intrinsèque, les équations de Killing et les conditions d'intégrabilité de celles-ci. Les n^{os} 2 et 3 sont consacrés aux variétés à courbures différentes, le n^o 4 a pour objet une variété à deux courbures égales. Le dernier n^o contient quelques remarques concernant les trajectoires d'un groupe de mouvements à un paramètre.

1. Considérons dans une variété V_3 un système rectangulaire (S) formé de trois congruences [1], [2], [3]. Soit (T) le trièdre composé de vecteurs unitaires tangents aux courbes des congruences $[i]$ $(i = 1, 2, 3)$ passant par un point quelconque M (x^1, x^2, x^3) de la V_3. Désignons par γ_{hkl} les rotations du trièdre (T) et par $\dfrac{\partial}{\partial \sigma_i}$ la dérivée par rapport à l'arc de la courbe appartenant à la congruence $[i]$ et passant par le point M.

[1]) Un résumé de cet articte a été objet d'une Communication faite au Congrès des Math. des Pays Slaves qui s'est tenu à Varsovie du 23 au 27 septembre 1929.

Soit

$$Df = \sum_{i=1}^{3} u_i \frac{\partial f}{\partial \sigma_i}$$

le symbole d'une déformation infinitésimale de la variété V_3. Envisageons un vecteur infinitésimal, de composantes dx^i, issu du point M. Désignons par ds sa longueur et par $d\sigma_i$ ses projections orthogonales sur les arêtes du trièdre (T).

On aura

$$d\sigma_i = \sum_{r=1}^{3} \lambda_{i/r}\, dx^r,\ ds^2 = \sum_{i=1}^{3} d\sigma_i^2, \tag{1}$$

$\lambda_{i/r}$ $(r = 1, 2, 3)$ étant les coefficients directeurs covariants de la congruence $[i]$. En appliquant l'opération Df aux égalités (1), on obtient successivement

$$D(d\sigma_r) = \sum_{i=1}^{3} \left\{ \frac{\partial u_r}{\partial \sigma_i} + \sum_{j=1}^{3} (\gamma_{rij} - \gamma_{rji})\, u_j \right\} d\sigma_i \quad (r = 1, 2, 3)$$

et

$$D(ds^2) = 2 \sum_{rs=1}^{3} \left\{ \frac{\partial u_r}{\partial \sigma_s} + \sum_{i=1}^{3} (\gamma_{rsi} - \gamma_{ris})\, u_i \right\} d\sigma_r\, d\sigma_s.$$

Pour que Df soit le symbole d'un mouvement rigide, il faut et il suffit qu'il soit $D\ (ds^2) = 0$, ce qui entraîne les relations

$$\frac{\partial u_r}{\partial \sigma_s} + \frac{\partial u_s}{\partial \sigma_r} = \sum_{i=1}^{3} (\gamma_{ris} + \gamma_{sir})\, u_i \quad (r, s = 1, 2, 3). \tag{2}$$

Le système ci-dessus est équivalent au système *d'équations de Killing*. Il peut être remplacé par les équations suivantes

$$\frac{\partial u_r}{\partial \sigma_s} = \sum_{i=1}^{3} \gamma_{ris} u_i + \varphi_{rs},\ \varphi_{rs} + \varphi_{sr} = 0 \quad (r, s = 1, 2, 3), \tag{I}$$

où l'on a désigné par φ_{rs} trois inconnues auxiliaires. Les conditions d'intégrabilité du système (I) peuvent s'écrire comme il suit

$$\frac{\partial \varphi_{rs}}{\partial \sigma_t} = \sum_{i=1}^{3} \omega_{itrs} u_i + \sum_{i=1}^{3} \gamma_{sit}\, \varphi_{ri} - \sum_{i=1}^{3} \gamma_{sit}\, \varphi_{si} \quad (r, s, t = 1, 2, 3). \tag{II}$$

De même, les conditions d'intégrabilité du système (II) nous conduisent aux relations

$$\sum_{i=1}^{3} (\omega_{sritu} - \omega_{sriut})\, u_i + \sum_{i=1}^{3} \omega_{situ}\, \varphi_{ri} + \sum_{i=1}^{3} \omega_{riut}\, \varphi_{si} + \sum_{i=1}^{3} \omega_{uirs}\, \varphi_{ti}$$
$$+ \sum_{i=1}^{3} \omega_{tisr}\, \varphi_{ui} = 0 \quad (r, s, t, u = 1, 2, 3). \tag{III}$$

Dans les égalités (II) et (III) les symboles ω_{rstu} et ω_{rstuv} désignent les composantes de l'affineur de courbure et les composantes de son affineur dérivé. Nous supposerons dans la suite que le *système S soit composé de congruences principales de la variété V_3 (système principal)*. Les équations (III) se simplifieront en prenant la forme

$$D\ (\omega_r) = 0 \qquad r = (1, 2, 3), \tag{III'}$$

$$(\omega_r - \omega_s)\, (\varphi_{rs} + \sum_{i=1}^{3} \gamma_{rsi}\, u_i) = 0 \quad (r, s = 1, 2, 3), \tag{III''}$$

où l'on a désigné par ω_r les courbures principales de la variété.

En écartant de nos considérations le cas bien connu d'une variété à courbure constante, nous nous bornons dans la suite à deux hypothèses suivantes: A. $\omega_r \neq \omega_s\ (r \neq s)$, B. $\omega_1 = \omega_2 \neq \omega_3$.

2. *Hypothèse* A.

Les relations (III'') sont, dans ce cas, équivalentes aux équations suivantes

$$\varphi_{rs} = -\sum_{i=1}^{3} \gamma_{rsi}\, u_i \qquad (r, s = 1, 2, 3).$$

En substituant ces expressions dans les équations (I) et (II), il vient

$$\frac{\partial u_r}{\partial \sigma_s} = \sum_{i=1}^{3} (\gamma_{ris} - \gamma_{rsi})\, u_i \qquad (r, s = 1, 2, 3), \tag{3}$$

$$D\,(\gamma_{hij}) = 0 \qquad (h, i, j = 1, 2, 3) \tag{4}$$

On voit donc que les équations fondamentales (I), (II) et (III) peuvent être remplacées par le système formé de relations (3), (4) et (III'). A ce dernier système on doit adjoindre toutes les relations qui dérivent par différentiations des conditions (4) et (III'). Pour obtenir ces équations nous désignerons par λ l'une quelconque des quantités ω_i, γ_{hkl}. Nous aurons alors, en vertu de (III') et (4),

$$\sum_{i=1}^{3} u_i \frac{\partial \lambda}{\partial \sigma_i} = 0.$$

En assujetissant cette relation à l'opération $\dfrac{\partial}{\partial \sigma_j}$ et en rapprochant les équations (3), on obtient l'équation suivante

$$D\left(\frac{\partial \lambda}{\partial \sigma_j}\right) = 0 \qquad (j = 1, 2, 3).$$

En poursuivant ce procédé, on verra bien que toutes les relations que nous avons en vue sont de la forme suivante

$$D\left(\frac{\partial^k \omega_i}{\partial \sigma_{r_k} \ldots \partial \sigma_{r_1}}\right) = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \ldots; i, r_1, \ldots r_k = 1, 2, 3), \tag{5}$$

$$D\left(\frac{\partial^k \gamma_{hij}}{\partial \sigma_{r_k} \ldots \partial \sigma_{r_1}}\right) = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \ldots; h, i, j, r_1, \ldots, r_k = 1, 2, 3). \tag{6}$$

Or, nous allons montrer que, le problème supposé résoluble, les conditions (III'), (4) et les deux suites des relations (5) et (6) peuvent être réduites aux équations suivantes,

$$D(\gamma_{hij}) = 0, \quad D\left(\frac{\partial \gamma_{hij}}{\partial \sigma_k}\right) = 0 \qquad (h, i, j, k = 1, 2, 3), \tag{7}$$

toutes les autres étant des conséquences algébriques de celles-ci.

Les courbures ω_i s'exprimant en fonction des coefficients γ_{hij} et de leurs dérivées premières, on voit immédiatement que les relations (III') et (5) sont des conséquences des équations (4) et (6). Pour démontrer notre proposition il suffit donc de faire voir que les relations (6) résultent des conditions (7). Le théorème est manifestement vrai, si *les rotations γ_{hij} sont des constantes*. Supposons donc que l'une au moins de celles-ci ne soit pas constante et désignons par λ, μ, ν trois quelconques des quantités

$$\gamma_{hij}, \; \frac{\partial \gamma_{hij}}{\partial \sigma_k} \qquad (h, i, j, k = 1, 2, 3). \tag{Γ}$$

Pour que le mouvement rigide soit possible, il faut, d'après les relations (4) et (6), que le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\lambda}{\partial\sigma_1} & \dfrac{\partial\lambda}{\partial\sigma_2} & \dfrac{\partial\lambda}{\partial\sigma_3} \\ \dfrac{\partial\mu}{\partial\sigma_1} & \dfrac{\partial\mu}{\partial\sigma_2} & \dfrac{\partial\mu}{\partial\sigma_3} \\ \dfrac{\partial\nu}{\partial\sigma_1} & \dfrac{\partial\nu}{\partial\sigma_2} & \dfrac{\partial\nu}{\partial\sigma_3} \end{vmatrix}$$

soit nul. Supposons cette condition remplie et envisageons d'abord le cas, où *tous les mineurs du premier ordre du déterminant Δ sont nuls*, quel que soit le choix des fonctions λ, μ, ν parmi les quantités (Γ). On peut alors exprimer toutes les quantités (Γ) au moyen d'une seule fonction que nous désignerons par α; soit

$$\gamma_{hij} = \Omega_{hij}(\alpha), \quad \frac{\partial \gamma_{hij}}{\partial \sigma_k} = \overset{k}{\Omega}_{hij}(\alpha), \tag{8}$$

les dérivées $[\Omega_{hij}(\alpha)]'$ n'étant pas toutes nulles d'après l'hypothèse faite plus haut. En différentiant la première de ces égalités et en rapprochant le résultat de la deuxième, il vient

$$[\Omega_{hij}(\alpha)]' \frac{\partial \alpha}{\partial \sigma_k} = \overset{k}{\Omega}_{hij}(\alpha).$$

Il s'en suit que les dérivées $\dfrac{\partial \alpha}{\partial \sigma_k}$ peuvent être exprimées au moyen de la seule fonction α. Ceci nous permet de déduire de la seconde des égalités (8) une relation de la forme suivante

$$\frac{\partial^2 \gamma_{hij}}{\partial \sigma_l \, \partial \sigma_k} = \Omega^{kl}_{hij}(\alpha).$$

Il est évident que toutes les dérivées des rotations γ_{hij} se laissent exprimer en fonction de α:

$$\frac{\partial^k \gamma_{hij}}{\partial \sigma_{r_k} \ldots \partial \sigma_{r_1}} = \Omega^{r_1 \ldots r_k}_{hij}$$

On aura donc, d'aprés la définition du symobole Df, l'égalité suivante

$$D\left(\frac{\partial^k \gamma_{hij}}{\partial \sigma_{r_k} \ldots . \partial \sigma_{r_1}}\right) = \left[\Omega_{hij}^{r_1 \ldots r_k}(\alpha)\right]' . D(\alpha) . (k=2,3,\ldots; h, i, j, r_1, .. r_k = 1,2,3),$$

l'accent désignant la dérivée par rapport à α. D'autre part, on a en vertu des égalités (8) la relation suivante

$$D(\gamma_{hij}) = [\Omega_{hij}(\alpha)]' . D(\alpha).$$

Les dérivées $[\Omega_{hij}(\alpha)]'$ n'étant pas toutes nulles, le raprochement de deux dernières égalités montre que les relations (7) entraînent les égalités (6), c'est ce qu'il fallait démontrer.

Admettons maintenant que, le déterminant Δ supposé nul pour chaque choix des fonctions λ, μ, ν parmi les quantités (Γ), on puisse y trouver trois éléments tels, que *l'un au moins des mineurs du premier ordre du déterminant Δ soit différent de zéro.* Dans ce cas toutes les quantités (Γ) se laissent exprimer au moyen de deux fonctions seulement que nous désignerons par α et β. Un raisonnement tout semblable au précédent prouve que les dérivées des rotations γ_{hij}, d'ordre supérieur au premier, peuvent être exprimées en fonction de α et β seulement et que, par suite, les relations (6) sont des conséquences des égalités (7).

En résumant, nous pouvons dire que le problème proposé se réduit à l'étude du système mixte formé d'équations

$$\frac{\partial u_r}{\partial \sigma_s} = \sum_{i=1}^{3} (\gamma_{ris} - \gamma_{rsi})\, u_i \qquad (r, s = 1, 2, 3), \tag{A}$$

$$D(\gamma_{hij}) = 0\ ,\ D\left(\frac{\partial \gamma_{hij}}{\partial \sigma_k}\right) = 0 \qquad (h, i, j, k = 1, 2, 3), \tag{A'}$$

les relations de la deuxième ligne comprenant toutes les conditions d'intégrabilité de celles de la première ligne.

3. Pour que le mouvement rigide soit possible, il faut, d'après le résultat obtenu dans le n^o précédent, qu'il existe une au moins relation entre trois quelconques des quantités (Γ). Nous allons montrer que cette condition est aussi suffisante.

a) Supposons en premier lieu que *toutes les rotations γ_{hij} soient des constantes.* Les conditions (A') étant alors identiquement satisfaites, le système (A) est complètement intégrable et son intégrale générale dépend de trois paramètres arbitraires.

b) Passons maintenant au cas, où *parmi les quantintés (Γ) il y a une seule indépendante*; nous la désignerons par α. Les conditions (A') se réduisent à l'unique équation

$$D(\alpha) = 0.$$

C'est une équation linéaire et homogène à trois inconnues u_1, u_2, u_3; sa solution générale dépend donc de deux fonctions arbitraires; désignons la par A_1, A_2, A_3. On aura donc

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \alpha}{\partial \sigma_i} A_i = 0. \tag{9}$$

Posons dans les équations (A) $u_i = A_i$; il vient

$$\frac{\partial A_r}{\partial \sigma_s} + \sum_{i=1}^{3} (\gamma_{rsi} - \gamma_{ris}) A_i = 0 \qquad (r, s = 1, 2, 3). \tag{10}$$

Nous allons montrer que le système (10) se rèduit à six équations indépendantes. Désignons pour ce but par L_{rs} le premier membre de l'équation (10) et calculons l'expression $\sum_{r=1}^{3} L_{rs} \frac{\partial \alpha}{\partial \alpha_r}$; on aura

$$\sum_{r=1}^{3} L_{rs} \frac{\partial \alpha}{\partial \sigma_r} = \sum_{r=1}^{3} \frac{\partial A_r}{\partial \sigma_s} \frac{\partial \alpha}{\partial \sigma_r} - \sum_{i=1}^{3} (\gamma_{rsi} - \gamma_{ris}) \frac{\partial \alpha}{\partial \sigma_r} A_i \quad (s = 1, 2, 3).$$

En rapprochant l'égalité (9), on peut écrire

$$\sum_{r=1}^{3} L_{rs} \frac{\partial \alpha}{\partial \alpha_r} = - \sum_{t=1}^{3} \left\{ \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \sigma_r \partial \sigma_t} - \sum_{r=1}^{3} (\gamma_{rst} - \gamma_{rts}) \frac{\partial \alpha}{\partial \alpha_r} \right\} A_t, \ (s = 1, 2, 3).$$

En vertu de l'identité [1])

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \sigma_s \partial \sigma_t} - \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \sigma_t \partial \sigma_s} = \sum_{j=1}^{3} (\gamma_{jst} - \gamma_{jst}) \frac{\partial \alpha}{\partial \sigma_i} \ (s, t = 1, 2, 3)$$

[1]) G. Ricci et T. Levi-Civita, Méthodes de cakul diff. absolu, Math. Ann. t. 54, Ch. II § 2.

l'égalité précédente devient

$$\sum_{r=1}^{3} L_{rs}\frac{\partial\alpha}{\partial\sigma_r} = -\sum_{t=1}^{3}\frac{\partial^2\alpha}{\partial\sigma_t\,\partial\sigma_s}A_t \quad (s=1,2,3).$$

Mais, α appartenant a système (Γ), nous savons que l'identité (9) entraîne la relation suivante

$$\sum_{t=1}^{3} A_t\frac{\partial^2\alpha}{\partial\sigma_t\,\partial\sigma_s} = 0.$$

On aura donc

$$\sum_{r=1}^{3} L_{rs}\frac{\partial\alpha}{\partial\sigma_r} = 0 \quad (s=1,2,3);$$

l'une au moins des dérivées $\frac{\partial\alpha}{\partial\sigma_r}$ n'étant pas nulle, on voit bien qu'il y a trois relations linéaires et homogènes parmi les premiers membres des équations (10). Le nombre des équations indépendantes de ce système se réduit donc à six. — Supposons, pour fixer les idées, que l'on ait $\frac{\partial\alpha}{\partial\sigma_3}\neq 0$. Alors, si l'on exprime à l'aide de la relation (9) la quantité A_3 en fonction de deux autres et si l'on porte l'expression obtenue dans le système (10), on obtient six équations à deux inconnues A_1, A_2. Ces équations pouvant être évidemment résolues par rapport à toutes les dérivées des fonctions A_1, A_2, elles forment un système de six équations indépendantes. D'autre part on est assuré que, d'après la façon même dont on a choisi la fonction A_3, le système (10) est complètement intégrable. Son intégrale générale contient donc deux paramètres arbitraires.

c) Envisageons enfin le troisième cas, où le système (Γ) contient deux fonctions indépendantes que nous désignerons par α et β; la matrice

$$\left\|\begin{matrix}\frac{\partial\alpha}{\partial\sigma_1} & \frac{\partial\alpha}{\partial\sigma_2} & \frac{\partial\alpha}{\partial\sigma_3}\\ \frac{\partial\beta}{\partial\sigma_1} & \frac{\partial\beta}{\partial\sigma_2} & \frac{\partial\beta}{\partial\sigma_3}\end{matrix}\right\| \qquad (M)$$

est donc, par hypothèse, du deuxième rang. Le système (A') peut être remplacé par les deux équations

$$D(\alpha)=0, \quad D(\beta)=0.$$

La solution générale de ces équations en u_1, u_i, u_3 est donnée par les formules

$$A_i = \rho\begin{vmatrix}\frac{\partial\alpha}{\partial\alpha_{i+1}} & \frac{\partial\alpha}{\partial\sigma_{i+2}}\\ \frac{\partial\beta}{\partial\sigma_{i+1}} & \frac{\partial\beta}{\partial\sigma_{i+2}}\end{vmatrix} \qquad (i=1,2,3),$$

ρ désignant une fonction arbitraire. On aura identiquement

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\alpha}{\partial\sigma_i}A_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\beta}{\partial\sigma_i}A_i = 0. \tag{11}$$

La substitution $u_i = A_i$ ramène les équations (A) au système

$$\frac{\partial A_r}{\partial\sigma_r} - \sum_{i=1}^{3}(\gamma_{ris}-\gamma_{rsi})A_i = 0 \quad (r,s=1,2,3) \tag{12}$$

à *une inconnue* ρ. Désignons pas L_{rs} le premier membre de l'equation (12) et calculons les deux sommes $\sum_{r=1}^{2} L_{rs}\frac{\partial\alpha}{\partial\sigma_r}$, $\sum_{r=1}^{3} L_{rs}\frac{\partial\beta}{\partial\sigma_r}$. En répétant les mêmes opérations que dans le cas b), on obtient les deux identités suivantes

$$\sum_{r=1}^{3} L_{rs}\frac{\partial\alpha}{\partial\sigma_r} = 0, \quad \sum_{r=1}^{3} L_{rs}\frac{\partial\beta}{\partial\sigma_r} = 0 \quad (s=1,2,3).$$

La matrice (M) étant du deuxième rang, il s'en suit que parmi les trois équations

$$L_{1s}=0, \quad L_{2s}=0, \quad L_{3s}=0$$

il y a une seule indépendante. D'autre part on voit facilement que les équations (12) peuvent être résolues par rapport aux dérivées de la fonction ρ. Le système (12) se réduit donc à trois équations indépendantes. Celles-ci étant complètement intégrables d'après la façon même dont on a choisi les fonctions A_i, leur intégrale générale contient un paramètre arbitraire.

En résumant les recherches de deux derniers n^{os}, on peut énoncer le théorème suivant:

Pour qu'une variété V_3, à courbures différentes, admette un mouvement rigide continu, il faut et il suffit que le système (Γ), *formé de rotations du système principal et de leurs dérivées premières, contienne au plus deux fonctions indépendantes. Si toutes fonctions du système* (Γ) *se réduisent à des constantes, la variété admet un groupe transitif* G_3; *si le système* (Γ) *contient une seule fonction indépendante, la variété admet un groupe intransitif* G_2; *si enfin le nombre de fonctions indépendantes du système* (Γ) *est égal à deux, la variété admet un groupe intransitif* G_1.

4. *Hypothèse* B.

Posons $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. On sait que dans le cas présent les congruences principales [1] et [2] ne sont pas complètement déterminées. Or, pour faciliter les raisonnements, nous allons faire l'hypothèse suivante: si l'on a $\gamma_{131} \neq \gamma_{232}$, nous choisirons les congruences [1] et [2] de façon qu'elles soient canoniques [1]) par rapport à la congruence [3]; si, les rotations γ_{131}, γ_{232}, étant égales, les courbures ω et ω_3 ne gardent pas toutes les deux les mêmes valeurs le long des trajectoires orthogonales de la congruence [3], nous choisirons les congruences [1] et [2] de manière qu'il soit $\frac{\partial \omega}{\partial \sigma_1} = 0$, $\frac{\partial \omega}{\partial \sigma_1} \neq 0$, resp., si l'on a à la fois $\frac{\partial \omega}{\partial \sigma_1} = \frac{\partial \omega}{\partial \sigma_2} = 0$, qu'il soit $\frac{\partial \omega_3}{\partial \sigma_1} = 0$, $\frac{\partial \omega_3}{\partial \sigma_2} \neq 0$. Dans tout les autres cas nous prenons les congruences [1] et [2] d'une manière tout à fait arbitraire. Si les congruences [1] et [2] sont canoniques par rapport à la congruence [3], nous donnerons aux relations γ_{131}, γ_{232} le nom de *courbures principales* de la congruence [3]. Si celles-ci sont égales, nous dirons avec G. Ricci [2]) que la congruence [3] est *isotrope*.

Le choix du système (S) ainsi fixé, revenons aux équations (III″). Elles donnent dans le cas actuel

$$\varphi_{23} = -\sum_{i=1}^{3} \gamma_{23i}\, u_i\,, \quad \varphi_{31} = -\sum_{i=1}^{3} \gamma_{31i}\, u_i\,, \quad \varphi_{12} = -\sum_{i=1}^{3} \gamma_{12i}\, u_i + \varphi\,,$$

[1]) G. Ricci et T. Levi-Civita, l. c. Ch. II, § 3.

[2]) G. Ricci. Sulla determinasione di varietà dotate di proprietà intrinseche date a priori, Rend. Accad. Lincei, Ser. 5-a, vol XIX, 1910.

où φ désigne une inconnue auxiliaire. La substitution de ces expressions dans les équations (I) et (II) du n^0 1 conduit aux relations suivantes

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u_1}{\partial \sigma_1} = \gamma_{121}\, u_2 + \gamma_{131}\, u_3\,, \quad \frac{\partial u_2}{\partial \sigma_1} = -\gamma_{212}\, u_2 + \gamma_{123}\, u_3 + \gamma_{331}\, u_2 - \varphi\,, \\
&\qquad \frac{\partial u_3}{\partial \sigma_1} = -\gamma_{231}\, u_2 - \gamma_{312}\, u_2 - \gamma_{313}\, u_3, \\
&\frac{\partial u_1}{\partial \sigma_2} = -\gamma_{121}\, u_1 - \gamma_{312}\, u_3 - \gamma_{123}\, u_3 + \varphi\,, \quad \frac{\partial u_2}{\partial \sigma_2} = \gamma_{212}\, u_1 + \gamma_{232}\, u_3\,, \\
&\qquad \frac{\partial u_3}{\partial \sigma_2} = \gamma_{231}\, u_1 + \gamma_{312}\, u_1 = \gamma_{323}\, u_3, \\
&\frac{\partial u_1}{\partial \sigma_3} = -\gamma_{131}\, u_1 + \gamma_{312}\, u_2 + \gamma_{123}\, u_3, \quad \frac{\partial u_2}{\partial \sigma_3} = -\gamma_{123}\, u_1 - \gamma_{231}\, u_1 - \gamma_{232}\, u_2, \\
&\qquad \frac{\partial u_3}{\partial \sigma_3} = \gamma_{313}\, u_1 + \gamma_{323}\, u_2\,;
\end{aligned} \tag{13}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_1} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \gamma_{121}}{\partial \sigma_i}\, u_i + \gamma_{212}\, \varphi\,, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_2} = -\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \gamma_{212}}{\partial \sigma_i}\, u_i + \gamma_{121}\, \varphi\,, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma_3} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \gamma_{123}}{\partial \sigma_i}\, u_i\,; \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
&D(\gamma_{321}) - (\gamma_{131} - \gamma_{232})\, \varphi = 0\,, \quad D(\gamma_{131}) + (\gamma_{312} + \gamma_{321})\, \varphi = 0\,, \\
&D(\gamma_{313}) + \gamma_{313}\, \varphi = 0\,, \quad D(\gamma_{312}) - (\gamma_{131} - \gamma_{232})\, \varphi = 0\,, \quad D(\gamma_{232}) \\
&\qquad - (\gamma_{312} + \gamma_{321})\, \varphi = 0\,, \quad D(\gamma_{323}) - \gamma_{323}\, \varphi = 0.
\end{aligned} \tag{15}$$

Les relations (III′) se réduisent à

$$D(\omega) = 0\,, \quad D(\omega_3) = 0. \tag{16}$$

En différentiant les dernières égalités et en tenant compte des équations (13), il vient

$$\begin{aligned}
&D\left(\frac{\partial \omega}{\partial \sigma_1}\right) - \frac{\partial \omega}{\partial \sigma_2}\, \varphi = 0\,, \quad D\left(\frac{\partial \omega}{\partial \sigma_2}\right) + \frac{\partial \omega}{\partial \sigma_1}\, \varphi = 0, \\
&D\left(\frac{\partial \omega_3}{\partial \sigma_1}\right) - \frac{\partial \omega_3}{\partial \sigma_2}\, \varphi = 0\,, \quad D\left(\frac{\partial \omega_3}{\partial \sigma_2}\right) + \frac{\partial \omega_3}{\partial \sigma_1}\, \varphi = 0.
\end{aligned} \tag{17}$$

Dans la suite nous traiterons séparément les deux cas suivants:

$$\text{a) } \gamma_{131} = \gamma_{232}, \quad \text{b) } \gamma_{131} \neq \gamma_{232}.$$

a) Il y a lieu ici de distinguer encore trois cas différents. Nous supposerons d'abord

a$_1$) que les *courbures* ω *et* ω_3 *ont des valeurs constantes.* Les hypothèses faites dans le cas présent conduisent, d'après les identités de Bianchi [1])

$$\frac{\partial \omega_h}{\partial \sigma_h} = \sum_{i=1}^{3} (\omega_i - \omega_h)\, \gamma_{hii},$$

aux égalités suivantes

$$\gamma_{131} = \gamma_{232} = \gamma_{313} = \gamma_{323} = \gamma_{321} + \gamma_{312} = 0.$$

Remarquons aussi que, le système (S) étant principal, on a $\omega_{1223} = \omega_{2331} = \omega_{3112} = 0$, ce qui entraîne les égalités

$$\frac{\partial \gamma_{312}}{\partial \sigma_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3).$$

En ayant égard aux relations ci-dessus, on verra facilement que toutes les égalités (15), (16), (17) sont identiquement satisfaites, c'est-à-dire que le système d'équations (13) et (14) est complètement intégrable, son intégrale génerale contenant quatre constantes arbitraires.

a$_2$) Supposons maintenant que, les *courbures* ω *et* ω_3 *n'étant pas toutes les deux constantes, elles gardent les mêmes valeurs le long des trajectoires orthogonales de la congruence* [3]:

$$\frac{\partial \omega}{\partial \sigma_i} = \frac{\partial \omega_3}{\partial \sigma_i} = 0 \qquad (i = 1, 2).$$

Il faut supposer $\dfrac{\partial \omega_3}{\partial \sigma_3} \neq 0$, car autrement les identités de Bianchi (v. plus haut), les relations $\omega_{1223} = \omega_{2331} = \omega_{3112} = 0$ et l'égalité $\gamma_{131} = \gamma_{232}$ nous conduiraient au cas a_1). En comparant les hypothèses faites plus haut avec la seconde des relations (16), on obtient $u_3 = 0$. En rapprochant ce résultat des équations (13), il vient $\gamma_{312} = \gamma_{321}$. D'autre part, les hypothèses faites au commencement de ce n^0 entraînent l'égalité $\gamma_{312} + \gamma_{321} = 0$,

[1]) G. Ricci, Sulle superficie geodetiche in una varietà qualunque, Rend. Accad. Lincei, Ser. 5-a, vol. XII, 1903.

d'où il suit $\gamma_{312} = \gamma_{321} = 0$. Ceci nous montre que la congruence [3] doit être une congruence normale. Ajoutons aussi que les identités de Bianchi, et les conditions $\omega_{1223} = \omega_{2331} = \omega_{3112} = 0$ conduisent dans le cas considéré aux égalités suivantes

$$\gamma_{313} = \gamma_{323} = \frac{\partial \gamma_{131}}{\partial \sigma_1} = \frac{\partial \gamma_{131}}{\partial \sigma_2} = 0.$$

On voit donc que toutes les relations (15), (16), (17) sont identiquement satisfaites et que, par conséquent, le système formé d'équations (13) et (14) devient un système complètement intégrable, si l'on y pose $u_3 = 0$; son intégrale générale dépend de trois constantes arbitraires.

a$_3$) Considérons enfin le dernier cas possible, où *l'une au moins des courbures* ω *et* ω_3 *ne garde pas les mêmes valeurs le long des courbes des congruences* [1] *et* [2]. Nous supposons que c'est la courbure ω qui satisfait à notre hypothèse, le second cas pouvant être traité de la même manière et conduisant aux résultats tout semblables. En ayant égard à la convention faite au commencement de ce n^0, on peut écrire

$$\frac{\partial \omega}{\partial \sigma_1} = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial \sigma_2} \neq 0.$$

La dernière des relations (17) donne alors $\varphi = 0$; grâce à cette égalité les équations (14) et (15) s'écriront comme il suit

$$D(\gamma_{hij}) = 0 \qquad (h, i, j = 1, 2, 3).$$

Ces dernières égalités et les relations (16) expriment les conditions d'intégrabilité des équations (13), où l'on doit poser $\varphi = 0$. Le problème recevant la même forme que celui des n^{os} 2 et 3, nous pouvons lui appliquer les mêmes raisonnements que dans ces n^{os}. On obtiendra ainsi le résultat suivant: pour que le système (13), dans lequel on pose $\varphi = 0$, soit complètement intégrable, il faut et il suffit que le nombre de fonctions indépendantes parmi les quantités (Γ) (*v.* n^0 2) soit égal à un ou à deux.

b) Considérons maintenant l'hypothèse $\gamma_{131} \neq \gamma_{232}$. D'après la convention faite sur le système (S) on doit avoir $\gamma_{312} + \gamma_{321} = 0$. En ajoutant la première et la quatrième des conditions (15), il vient

$$D(\gamma_{312} + \gamma_{321}) - 2(\gamma_{131} - {}_{232})\, \varphi = 0.$$

Les relations $\gamma_{131} \neq \gamma_{232}$, $\gamma_{312} + \gamma_{321} = 0$ entraînent donc l'égalité $\varphi = 0$. Par conséquent, les conditions (15) et (16) pourront être mises sous la forme suivante

$$D(\gamma_{hij}) = 0 \qquad (h, i, j = 1, 2, 3).$$

En faisant la même remarque que dans le cas a_3), on peut énoncer une proposition tout à fait identique.

En résumant les divers cas, nous avons le théorème suivant:

Une variété V_3 à deux courbures égales ($\omega_1 = \omega_2 \neq \omega_3$) admet un groupe transitif G_4, si ses courbures principales sont constantes et si la congruence [3] *est isotrope; elle admet un groupe intransitif G_3, si ses courbures n'étant pas toutes les deux constantes, elles gardent les mêmes valeurs le long des trajectoires orthogonales de la congruence* [3] *et si celle-ci est isotrope. En dehors de ces deux cas la variété admet un groupe intransitif G_1 ou G_2, si parmi les quantités γ_{hij}, $\frac{\partial \gamma_{hij}}{\partial \sigma_k}$, calculées pour le système* (S) *défini au commencement de ce n⁰, il y a au plus deux indépendantes.*

5. Dans son Mémoire sur les mouvements dans une variété riemannienne [6]) G. Ricci a donné les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une congruence soit formée de trajectoires d'un groupe de mouvements G_1. Nous allons présenter le théorème de Ricci pour $n = 3$ sous une forme nouvelle qui fait mieux voir les propriétés géométriques dela congruence cherchée. Reportons nous pour ce but aux équations (2) du n⁰ 1 en y supposant que la congruence [3] soit formée de trajectoires d'un groupe G_1, c'est-à-dire que l'on ait $u_1 = u_2 = 0$, $u_3 \neq 0$. Ceci nous donne

$$\gamma_{131} = \gamma_{232} = 0, \gamma_{312} + \gamma_{321} = 0, \tag{18}$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial \sigma_1} = -\gamma_{313} u_3, \frac{\partial u_3}{\partial \sigma_2} = -\gamma_{323} u_3, \frac{\partial u_3}{\partial \sigma_3} = 0. \tag{19}$$

Les conditions d'intégrabilité du système (19) prennent la forme suivante

$$\frac{\partial \gamma_{323}}{\partial \sigma_2} - \frac{\partial \gamma_{313}}{\partial \sigma_2} + \gamma_{121}\gamma_{313} - \gamma_{212}\gamma_{323} = 0, \frac{\partial \gamma_{313}}{\partial \sigma_3} + (\gamma_{321} - \gamma_{123})\gamma_{323} = 0,$$

$$\frac{\partial \gamma_{323}}{\partial \sigma_3} + (\gamma_{312} + \gamma_{123})\gamma_{313} = 0. \tag{20}$$

[6]) V. aussi L. P. Eisenhart, Riemannian Geometry, 1926, Ch. VI. Sect. 73.

Les égalités (18) et (20) expriment toutes les conditions nécessaires et suffisantes pour que la congruence [3] jouisse de la propriété demandée. Observons en premier lieu que, d'après les relations (18), la congruence [3] doit être une congruence *isotrope à courbures principales nulles*. Quant aux égalités (20), elles sont satisfaites identiquement, dans le cas d'une congruence géodésique: $\gamma_{313} = \gamma_{323} = 0$. En écartant ce cas de nos considérations ultérieures, supposons, ce qu'il est toujours permis, que l'on ait $\gamma_{313} = 0$. Cela veut dire que la ligne appartenant à la congruence [2] est en chaque point tangente au vecteur normal principal du trièdre de Frenet de la courbe [3] passant par ce point. Nous dirons, pour simplifier le langage, que la congruence [2] est formée de *lignes de courbure géodésique* de la congruence [3]. En utilisant encore l'identité $\omega_{2331} = \omega_{31231}$, les conditions (20) deviennent

$$\frac{\partial \gamma_{312}}{\partial \sigma_3} = 0, \gamma_{321} = \gamma_{123}, \frac{\partial \gamma_{323}}{\partial \sigma_3} = 0. \tag{21}$$

La deuxième des égalités (21) montre que *la congruence* [2] *doit être une congruence normale.* Pour interpréter les deux autres des relations (21), calculons la courbure K_3 et la torsion S_3 des courbes de la congruence [3]; nous nous servirons des formules [1])

$$K_3^2 = \gamma_{313}^2 + \gamma_{323}^2, S_3 = \frac{\partial}{\partial \sigma_3} \operatorname{arctg} \frac{\gamma_{313}}{\gamma_{323}} - \gamma_{123}.$$

Il viendra

$$K_3^2 = \gamma_{323}^2, S_3 = -\gamma_{123}.$$

On voit qu'en vertu de (19) et (21) il doit être: $\frac{\partial K_3}{\partial \sigma_3} = \frac{\partial S_3}{\partial \sigma_3} = 0$. *Les courbes* [3] *sont donc des cercles* ($\gamma_{123} = 0$) *ou des hélices circulaires.* Dans le premier cas on a $\gamma_{123} = \gamma_{231} = \gamma_{312} = 0$, ce qui veut dire que la congruence de cercles est une congruence normale formée de trajectoires orthogonales d'une famille de surfaces totalement géodésiques ($\gamma_{131} = \gamma_{232} = 0$). Nous avons ainsi trouvé les propriétes nécessaires de la congruence de trajectoires d'un groupe de mouvements G_1. Un raisonnement facile montre presque immédiatement que ces propriétés sont aussi suffisantes. On peut donc énoncer le théorème suivant:

[1]) V. mon article: Contribution à la théorie des courbes et des congruences d'un expace riem. à trois dimensions, Prace mat.-fiz., t. 34, 1925/6, § 2.

Pour qu'une variété V_3 admette un groupe de mouvements à un paramétre, il faut et il suffit qu'elle contienne une congruence à courbures nulles, formée de géodésiques, ou de cercles normaux à une famille de surfaces totalement géodésiques, ou encore une congruence d'hélices circulaires telle que ses lignes de courbure géodésique constituent une congruence normale.

STRESZCZENIE.

W r. 1899 twórca Rachunku różniczkowego bezwzględnego, G. Ricci ogłosił rozprawę poświęconą następującemu zagadnieniu: mając daną dodatnią formę różniczkową, kwadratową i trójkową, rozpoznać, czy przestrzeń Riemanna, odpowiadająca tej formie dozwala na ciągłą grupę ruchów sztywnych. Analiza Ricci'ego dała szereg ważnych i interesujących twierdzeń, pozwalających w wielu przypadkach odpowiedzieć wystarczająco na postawione pytanie. Nie wszystkie jednak kryterja Ricci'ego sprowadzają się do zastosowania wyłącznie różniczkowania i operacyj algebraicznych. Niektóre z nich są w gruncie rzeczy interesującą z wielu względów redukcją danego zagadnienia do zagadnienia innego, równie trudnego. Celem naszego artykułu jest uzupełnienie badań Ricci'ego i znalezienie takich kryterjów, któreby w każdym przypadku spełniały podany poprzednio warunek. Ostatni wstęp artykułu zawiera nadto twierdzenie, określające cechy charakterystyczne kongruencji, złożonej z trajektoryj jednoparametrowej grupy ruchów sztywnych w przestrzeni V_3; twierdzenie to różni się tylko formą od analogicznego twierdzenia Ricci'ego.