OTTON NIKODYM.

Sur une propriété de la mesure généralisée des ensembles.

Pewne twierdzenie o mierze uogólnionej.

La note présente contient un des résultats que j'ai présenté dans une communication pendant le *I Congrès des Mathématiciens des Pays Slaves à Varsovie* [1]).

Je m'occupe ici d'une généralisation d'un théorème de M. Ważewski [2]).

Soit 1 une variété non vide composée d'objets quelconques. Appelons *„corps relatif à 1"* toute famille **K** de sous—ensembles de 1, satisfaisant aux conditions suivantes:

$$1^0 \text{ si } E_n \in \mathbf{K},\ (n = 1, 2, \ldots),\ \text{on a } \sum_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathbf{K},$$

$$2^0 \text{ si } E \in \mathbf{K}, \text{ on a co } E \in \mathbf{K}\ ^{3)}.$$

Une fonction $f(E)$ d'ensembles du corps **K** s'appelle parfaitement additive, si, quels que soient les ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots, (n = 1, 2, \ldots)$ disjoints deux-à-deux et appartenant à **K**, on a

$$f\left(\sum_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} f(E_n).$$

---

[1]) Septembre 1929.

[2]) T. Ważewski. *C. R. Paris* 1923. (176) p. 69—70 16.IV. Le théorème de M. Ważewski est un cas particulier mais intéressant, d'un théorème de M. Fréchet. Voir M. Fréchet. *C. R. Paris* 1923 p. 1123. *Sur la distance de deux ensembles.*

[3]) co E désigne l'ensemble $1 - E$, c'est-à-dire, le complémentaire de E par rapport à 1.

Ajoutons que la fonction f doit être définie pour tout E appartenant à K; les valeurs de f sont des nombres réels.

Fixons une fonction $\mu(E)$ parfaitement additive et non négative partout. Nous l'appellerons *fonction mesurante du corps* ou plus brièvement „*mesure de E*".

Comme j'ai démontré [4]), le corps **K** peut être considéré comme une variété métrique au sens de M. H a u s d o r f f. En effet, si l'on pose

$$(1) \qquad \| E, F \|_{\mu} \underset{df}{=} \mu(E-F) + \mu(F-E)$$

pour tout E, F appartenant à **K**, le nombre (1) se comporte comme la notion ordinaire de la distance de deux points. En particulier, on a

$$\| E, F \|_{\mu} \leq \| E, G \|_{\mu} + \| G, F \|_{\mu},$$

quels que soient les ensembles E, F, G du corps **K**. La notion de la μ-distance donne naissance à la notion correspondante de la μ-*limite* d'une suite infinie d'ensembles de **K**. On définit $E_n \rightarrow_{\mu} E$ par la relation:

$$\| E_n, E \|_{\mu} \rightarrow 0 \text{ pour } n \rightarrow \infty.$$

Le but de la note présente consiste à démontrer une propriété du passage à la μ-limite en connexion avec l'ensemble limite complet et l'ensemble limite restreint d'une suite infinie d'ensembles. [5])

Lemme. Si $E = \overline{\lim}\, E_n$, l e s e n s e m b l e s E_n (e t p a r c o n s é q u e n t E) a p p a r t e n a n t à **K**, o n a

$$\| E, E_n \|_{\mu} \rightarrow 0 \text{ pour } n \rightarrow \infty.$$

Démonstration.

On a $$\overline{\lim}\, (E_n - E) = 0$$

et $$\overline{\lim}\, (E - E_n) = 0.$$

La fonction μ étant parfaitement additive, il en résulte que

[4]) J'ai démontré que la μ-limite satisfait à la condition connue de C a u c h y; par conséquent, l'espace dont les éléments sont les ensembles du corps, est complet. *Sur une généralisation des intégrales de M. Radon. Fund. Math.* T. XV.

M. A r o n s c h e i n (à Varsovie) est parvenu aux mêmes résultats d'une manière indépendante.

[5]) „Ensemble limite complet": $\overline{\lim}\, E_n$ désigne l'ensemble

$$(E_1 + E_1 + E_3 + \dots) \cdot (E_2 + E_3 + \dots) \cdot (E_3 + \dots) \dots .$$

„Ensemble limite restreint : $\underline{\lim}\, E_n$ désigne

$$(E_1 \cdot E_2 \cdot E_3 \dots) + (E_2 \cdot E_3 \dots) + (E_3 \dots) + \dots .$$

$$\lim_{n \to \infty} \mu(E_n - E) = 0$$

et $$\lim_{n \to \infty} \mu(E - E_n) = 0.$$

Le lemme peut être considéré comme établi. [6])

Théorème.

L a c o n d i t i o n n é c e s s a i r e e t s u f f i s a n t e a f i n q u e

$$(1) \qquad \| E_n, E \|_{\mu} \rightarrow 0 \text{ pour } n \rightarrow \infty$$

e s t q u ' o n p u i s s e e x t r a i r e d e t o u t e s u i t e p a r t i e l l e d e $\{E_n\}$ u n e s u i t e n o u v e l l e $\{E_{k_n}\}$, d e s o r t e q u e l ' i d e n t i t é

$$E = \overline{\lim_{n \to \infty}}\, E_{k_n} = \underline{\lim_{n \to \infty}}\, E_{k_n}$$

s u b s i s t e à u n e n s e m b l e d e μ-m e s u r e n u l l e p r è s.

Démonstration de la nécessité.

Soit $k_1 < k_2 < \dots$ une suite infinie d'indices telle que la somme $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n$, où $\sigma_n \underset{df}{=} \| E_{k_n}, E \|_{\mu}$, soit convergente.

Posons

$$E' \underset{df}{=} \underline{\lim_{n \to \infty}}\, E_{k_n}, \quad E'' \underset{df}{=} \overline{\lim_{n \to \infty}}\, E_{k_n}.$$

En posant

$$A_n' \underset{df}{=} E_{k_n} \cdot E_{k_{n+1}} \dots .$$

$$A_n'' \underset{df}{=} E_{k_n} + E_{k_{n+1}} + \dots,$$

on oblient

$$E' = A_1' + A_2' + \dots \; ; \; E'' = A_1'' \cdot A_2'' \dots .$$

$$A_n' \subset A'_{n+1} \; ; \; A_n'' \supset A''_{n+1} .$$

Comme $E' = \lim_{n \to \infty} A_n'$, $E'' = \lim_{n \to \infty} A_n''$, on a, en vertu du lemme:

$$(1) \qquad \| E', A_n' \|_{\mu} \rightarrow 0,$$

$$(2) \qquad \| E'', A_n'' \|_{\mu} \rightarrow 0.$$

[6]) Voir M. F r é c h e t. *Des familles et fonctions additives d'ensembles abstraits. Fund. Math.* IV. 1923, p. 345.

Mais:

$$||A_n', E||_\mu = ||E_{k_n} . E_{k_{n+1}} \dots , E||_\mu =$$

$$= \mu (E_{k_n} . E_{k_{n+1}} \dots - E) + \mu (E - E_{k_n} . E_{k_{n+1}} \dots)$$

$$\leq \mu (E_{k_n} - E) + \mu (E_{k_{n+1}} - E) + \dots .$$

$$+ \mu (E - E_{k_n}) + \mu (E - E_{k_{n+1}}) + \dots$$

parce que

$$E_{k_n} . E_{k_{n+1}} \dots - E = (E_{k_n} - E) . (E_{k_{n+1}} - E) \dots .$$

$$\subset (E_{k_n} - E) + (E_{k_{n+1}} - E) + \dots$$

et parce que

$$E - E_{k_n} . E_{k_{n+1}} \dots = E . \mathrm{co} (E_{k_n} . E_{k_{n+1}} \dots)$$

$$= E . (\mathrm{co}\, E_{k_n} + \mathrm{co}\, E_{k_{n+1}} + \dots)$$

$$= E . \mathrm{co}\, E_{k_n} + E . \mathrm{co}\, E_{k_{n+1}} + \dots$$

$$= (E - E_{k_n}) + (E - E_{k_{n+1}}) + \dots$$

Il s'ensuit:

$$||A_n', E||_\mu \leq ||E_{k_n}, E||_\mu + ||E_{k_{n+1}}, E||_\mu + \dots = \sum_{s=n}^{\infty} \sigma_n .$$

La somme des σ_s étant convergente, il en résulte que

$$||A_n', E||_\mu \to 0 \text{ pour } n \to \infty. \tag{3}$$

D'autre part on obtient sans peine:

$$||E, A_n''||_\mu = ||E, \; E_{k_n} + E_{k_{n+1}} + \dots||_\mu$$

$$\leq ||E, E_{k_n}||_\mu + ||E, E_{k_{n+1}}||_\mu + \dots$$

$$\leq \sigma_n + \sigma_{n+1} + \dots ,$$

ce qui entraîne que

$$||E, A_n''||_\mu \to 0 \text{ pour } n \to \infty . \tag{4}$$

En tenant compte de la relation:

$$||E', E||_\mu \leq ||E', A_n'||_\mu + ||A_n', E||_\mu ,$$

On obtient de (1) et (3):

$$||E', E||_\mu \to 0, \text{ c'est - à - dire}$$

$$||E', E||_\mu = 0 . \tag{5}$$

D'une manière analogue, on obtient de (2) et (4):

$$||E'', E||_\mu = 0, \tag{6}$$

donc, d'après (5):

$$||E', E''||_\mu = 0 \tag{7}$$

Les relations (5), (6) et (7) donnent la thèse.

Démonstration de la suffisance.

Supposons que la relation

$$||E_n, E||_\mu \to 0 \tag{1}$$

n'a pas lieu.

On peut extraire de la suite donnée d'ensembles une autre $\{E_{k_n}\}$, pour laquelle

$$\lim_{n\to\infty} ||E_{k_n}, E||_\mu > 0 . \tag{2}$$

Faisons extraire de $\{E_{k_n}\}$ une suite partielle — soit $\{E_{l_n}\}$ — de sorte que l'égalité

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} E_{l_n} = \underline{\lim_{n\to\infty}} E_{l_n} = E \tag{3}$$

subsiste presque μ - partout.

On a de (2):

$$\lim_{n\to\infty} ||E_{l_n}, E||_\mu > 0 . \tag{4}$$

En vertu de (3) il existe des ensembles E', E_{l_n}', $(n = 1, 2, \dots)$ qui 1) ne diffèrent respectivement des E, E_{l_n} qu'aux ensembles de μ - mesure nulle, 2) sont tels que les identités:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} E_{l_n}' = \underline{\lim_{n\to\infty}} E_{l_n}' = E'$$

sont strictes.

icm©

On a donc, en vertu du lemme:

$$||E'_{l_n}, E'||_\mu \to 0 \text{ pour } n \to \infty.$$

Comme

$$||E'_{l_n}, E_{l_n}||_\mu = 0 \text{ et } ||E', E||_\mu = 0,$$

on a

$$||E_{l_n}, E||_\mu = ||E'_{l_n}, E'||_\mu,$$

donc

$$||E_{l_n}, E||_\mu \to 0 \text{ pour } n \to \infty$$

contrairement à (4).

Le théorème est ainsi établi.

STRESZCZENIE.

Niechaj K będzie niepustą klasą podzbiorów pewnej rozmaitości 1, mającą własności: 1^0 jeżeli E należy do K, to dopełnienie zbioru E względem 1 też należy do K; 2^0 suma przeliczalnej ilości zbiorów, należących do K, też należy do K.

Niechaj $\mu(E) \geqslant 0$ będzie funkcją ściśle addytywną, zbioro-liczbową, określoną w K. Przez odległość wzajemną zbiorów E i F, należących do K, wziętą ze względu na μ, rozumieć będziemy liczbę

$$||E, F||_\mu \underset{df}{=} \mu(E-F) + \mu(F-E).$$

Powiadamy, że ciąg nieskończony $E_1, E_2 \ldots\ldots E_n, \ldots\ldots$ zbiorów, należących do K, zmierza ze względu na μ, do granicy E, jeżeli

$$\lim_{n\to\infty} ||E, E_n||_\mu = 0.$$

Nota niniejsza dowodzi następującego twierdzenia [1]):

Na to, żeby ciąg $\{E_n\}$ zmierzał do E ze względu na μ, potrzeba i wystarcza, by z każdego ciągu częściowego $\{E_{k_n}\}$ danego ciągu dał się wyjąć nowy ciąg częściowy $\{E_{l_n}\}$, taki, żeby zbiory

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} E_{l_n}, \underline{\lim_{n\to\infty}} E_{l_n}, E$$

różniły się między sobą co najwyżej o zbiory, dla których wartość funkcji μ równa się 0.

[1]) Jest ono uogólnieniem pewnego twierdzenia T. Ważewskiego: C. R. 1923. p. 96.