W. ŚLEBODZIŃSKI.

Note sur les variétés métriques.

Notatka o przestrzeniach metrycznych.

Considérons une variété métrique V_n' avec le déplacement semi-symmétrique; soit $g_{\lambda\mu}$ son tenseur métrique et $S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\,\nu}$ son affineur de torsion. Nous nous proposons de déterminer la variété V_n' de façon que sa courbure soit nulle. Désignons pour ce but par V_n la variété riemannienne ayant le même tenseur métrique que V_n' et par ∇_μ le symbole de la différentiation covariante dans la V_n [1]. Les composantes $R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\,\nu}$ de l'affineur de Riemann-Christoffel de la variété V_n' sont données par les formules [2]

$$R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\,\nu} = K_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\,\nu} - 2\,\nabla_{[\omega}\, T_{|\lambda|\mu]}^{\cdot\cdot\,\nu} + 2\, T_{\lambda[\omega}^{\cdot\cdot\,\varkappa}\, T_{|\varkappa|\mu]}^{\cdot\cdot\,\nu}, \tag{1}$$

on l'on a posé

$$T_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\,\nu} = S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\,\nu} - g^{\nu\beta}\left(g_{\lambda\alpha}\, S_{\beta\mu}^{\cdot\cdot\,\alpha} + g_{\mu\alpha}\, S_{\beta\lambda}^{\cdot\cdot\,\alpha}\right). \tag{2}$$

Le déplacement devant être semisymmétrique, on peut poser

$$S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\,\nu} = \tfrac{1}{2}\, S_{[\lambda}\, A_{\mu]}^{\nu},$$

où le vecteur S_λ désigne un vecteur arbitraire; la formule (2) peut donc s'écrire de la façon suivante

$$T_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\,\nu} = S_{[\lambda}\, g_{\alpha]\mu}\, g^{\alpha\nu}. \tag{3}$$

---

[1] Nous employons dans cette Note les méthodes et les symboles du livre de M. J. A. Schouten, Der Ricci-Kalkül 1924.

[2] J. A. Schouten, l. c. p. 86.

En substituant les expressions (3) dans l'équation $R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = 0$, on trouve

$$2(\nabla_{[\omega} S_{[\lambda)} g_{\mu]\nu]} = K_{\omega\mu\lambda\nu} + S_{[\omega} S_{[\lambda} g_{\mu]\nu]} - \tfrac{1}{2} S_\alpha S^\alpha g_{[\omega[\lambda} g_{\mu]\nu]}. \tag{4}$$

Eu égard à l'identité $K_{[\omega\mu\lambda]\nu} = 0$, on en déduit la relation

$$(\nabla_{[\omega} S_{\mu)} g_{\lambda]}^{\nu} = 0. \tag{5}$$

En y posant $\nu = \lambda$ et en sommant par rapport à λ, on obtient l'égalité

$$(n-2)\nabla_{[\omega} S_{\mu]} = 0. \tag{6}$$

Supposons dans la suite $n > 2$. L'équation (6) montre que, dans cette hypothèse, le vecteur S_μ est un gradient d'une fonction que nous désignerons par log σ. On a donc

$$S_\mu = \nabla_\mu \log \sigma, \quad S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = A_{[\mu}^{\nu} \nabla_{\lambda]} \log \sigma^{\frac{1}{2}} \tag{7}$$

Nous pouvons maintenant constater que les équations (4) sont identiques aux relations qui expriment les conditions pour que la forme $\sigma\, g_{\lambda\mu}\, dx^\lambda\, dx^\mu$ soit à courbure nulle [1]. Ceci nous permet d'énoncer le théorème suivant:

On obtient toutes les variétés V_n' $(n > 2)$ à courbure nulle, en prenant $\sigma^{-1} \sum_{\lambda=1}^{n} (dx^\lambda)^2$ pour forme métrique et

$$S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} = A_{[\mu}^{\nu} \nabla_{\lambda]} \log \sigma^{\frac{1}{2}}$$

pour affineur de torsion, σ désignant une fonction arbitraire.

Signalerons encore la conséquence suivante: *pour qu'une variété riemannienne V_n $(n > 3)$ puisse être transformée en une variété métrique semisymmétrique au même tenseur metrique et à courbure nulle, il faut et il suffit que son affineur de Weyl* [2] *(Konformkrümmungsgrösse) soit nul.*

---

[1]) J. A. Schouten, l. c. p. 168.
[2]) J. A. Schouten, l. c. p. 170.

Le raisonnement qui nous a conduit aux formules (7) ne s'applique pas, losque n est égal à 2. Dans ce cas le systéme (4) se réduit l'unique équation

$$\nabla_\alpha S^\alpha = 2K,$$

K désigne la courbure gaussienne de la forme métrique. On voit c que toute variété V_2 peut être transformée d'une infinité de mas en une variété métrique, semisymmétrique au même tenseurique que la V_2 et à courbure nulle.
