Zusammenfassung.

Vorliegender Artikel enthält die Ergebnisse der Triangulation und der Nivellierung, welche in dem Zeitraum 1927 — 1929 angestellt wurder, zwecks Reduktion der Zentra der Instrumente und Beobachtungssäulen auf das Hauptzentrum der Warschauer Sternwarte, sowie zwecks Bestimmung der Höhe dieser Punkte über dem Meeresniveau und auch über dem mittleren Weichselniveau. Als Hauptzentrum V der Sternwarte wählte man den Vertikalkreis, welcher bis zum Jahre 1886 in der Mitte des Hauptsaals der Stenwarte aufgestellt war. Die Koordinaten X, Y, sowie $\Delta\varphi$ und $\Delta\lambda$ der erwähnten Punkte sind in Berug auf dieses Zentrum angegeben. Die astronomischen Koordinaten dieses Hauptzentrums sind:

$$\Phi = 52^0\,13'\;4''.60$$

$$\Lambda = \;1^h\,24^m\,7^s.245.$$

In der Tafel auf Seite 17 bezeichnen die benutzten Symbole:

V — Hauptzentrum der Sternwarte.
E — neuer (J. 1886) Meridiankreis von Ertel.
P — Passageinstrument der Firma Reichenbach aus dem J. 1816.
K — Meridiankreis „ „ „ „ „
M — westlicher Turm (Refraktor der Firma Merz).
H_{1845} — östlicher Turm (gemäss der Triangulation des Jahres 1845).
H_{1929} — „ „ (jetzt — Refraktor der Firma Heyde).
G — Eisenbetonsäule auf der oberen östlichen Terasse.
Σ — „ „ „ südlichen Terasse.
Q — Quadratpavillon.
C — Zentrallpavillon (Refraktor der Firma Cooke).
Z — östlicher Pavillon (Zenithteleskop).

Die Höhe des Barometergefässes der Sternwarte über der Erdoberfläche beträgt 10.5 Meter, und über dem mittleren Niveau des Baltischen und des Schwarzen Meeres 120.60 Meter.

D. POMPEIU.

Sur la condition des accélérations dans le mouvement d'un fluide incompressible.

O warunku przyśpieszeń w ruchu płynu nieściśliwego.

1. En Hydrodynamique pour écrire les équations du mouvement d'un fluide on se sert du principe de d'Alembert et, habituellement, on exprime que le fluide est en équilibre sous l'action des forces donneés (ou appliquées) et sous l'action des forces d'inertie.

Mais, à y regarder d'un peu plus près, en écrivant seulement les relations relatives à l'équilibre on exprime une partie seulement du principe de d'Alembert: celle qui utilise la Statique du système matériel considéré; mais pour traduire complètement la célèbre proposition, telle qu'elle a été énoncée par son auteur, il faut ajouter encore la condition (des accélérations) qui résulte de la Cinématique du système.

D'une façon précise:

Nous plaçant dans la cas des deux dimensions, soient:

$$\rho X, \quad \rho Y$$

les projections sur les axes, de la force appliquée, rapportée à l'unité d'aire; ensuite

$$\rho \frac{d^2x}{dt^2} = \rho X_1 \quad , \quad \rho \frac{d^2y}{dt^2} = \rho Y_1$$

les projections, sur les axes, de la force effective (la force d'inertie est la force effective changée de signe).

Maintenant, si nous posons

$$(1) \qquad \begin{aligned} X &= X_1 + X_2, \\ Y &= Y_1 + Y_2, \end{aligned}$$

le vecteur

$$\rho\,(X_2,\ Y_2)$$

est ce qu'on peut appeler force complémentaire.

En somme la relation (1) exprime la dècomposition de la force donnée F en une force F_1 (c'est la force effectivement observée) et une force F_2 complémentaire.

Il s'agit maintenant de poser des conditions pour que cette décomposition soit déterminée d'une façon unique.

Eh bien, c'est justement l'objet du principe de d'Alembert.

Pour le vecteur (X_2, Y_2) on écrit des conditions d'équlibre tirées de la Statique du système considéré et c'est ce qu'on écrit habituellement. Mais, pour la détermination unique de la dècomposition (1) il reste encore à écrire des conditions pour le vecteur (X_1, Y_1) et ces conditions; c'est la Cinématique du système qui nous les fournit.

2. Mais nous allons interrompre, pour un instant, notre exposition et illustrer, par un exemple extrêmement simple, notre remarque.

Considérons, dans le plan, le système formé par deux points P_1 et P_2 qui restent à une distance invariable (système rigide).

Appliquons le principe de d'Alembert à la dynamique de ce système.

On a, au point $P_1\,(x_1, y_1)$:

$$(2)\qquad \begin{aligned} X_1 &= X'_1 + X''_1,\\ Y_1 &= X'_1 + Y''_1, \end{aligned}$$

et au point $P_2\,(x_2, y_2)$:

$$(3)\qquad \begin{aligned} X_2 &= X'_2 + X''_2,\\ Y_2 &= Y'_2 + Y''_2, \end{aligned}$$

c'est-à-dire la décomposition, en chacun des points, de la force donnée en: force effective et force complémentaire.

Maintenant, pour déterminer (d'une facon unique) les huit inconnues qui entrent dans les relations (2) et (3), nous allons écrire que les forces complémentaires se font équilibre sur le système en vertu de la liaison (rigidité):

Cela nous donne

$$X''_1 + X''_2 = 0,$$

$$Y''_1 + Y''_2 = 0,$$

$$(x_1\,Y''_1 - y_1\,X''_1) + (x_2\,Y''_2 - y_2\,X''_2) = 0.$$

Mais ces trois relations jointes aux quatre relations (2) et (3) ne suffisent pas pour détermirer les huit inconnues. Il faut encore utiliser une condition que nous donne la Cinématique, relative aux forces effectives

$$X'_1 = \frac{d^2 x_1}{d t^2}\ ,\quad X'_2 = \frac{d^2 x_2}{d t^2}$$

$$Y'_1 = \frac{d^2 y_1}{d t^2}\ ,\quad Y'^2 = \frac{d^2 y_2}{d t^2}$$

(Nous supposons, pour simplifier l'écriture, les masses des points P_1 et P_2 égales à l'unité).

En effet la condition de rigidité

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = \text{c}^{\underline{\text{te}}}$$

dérivée deux fois de suite donne:

$$(x_1 - x_2)\left(\frac{d^2 x_1}{d t^2} - \frac{d^2 x_2}{d t^2}\right) + (y_1 - y_2)\left(\frac{d^2 y_1}{d t^2} - \frac{d^2 y_2}{d t^2}\right)$$
$$+ \left(\frac{d x_1}{d t} - \frac{d x_2}{d t}\right)^2 + \left(\frac{d y_1}{d t} - \frac{d y_2}{d t}\right)^2 = 0$$

ou

$$(x_1 - x_2)\,(X'_1 - X'_2) + (y_1 - y_2)\,(Y'_1 - Y'_2)$$
$$+ \left(\frac{d x_1}{d t} - \frac{d x_2}{d t}\right)^2 + \left(\frac{d y_1}{d t} - \frac{d y_2}{d t}\right)^2 = 0.$$

C'est seulement avec cette huitième relation, fournie par la Cinématique du système, que la décomposition posée par le principe de d'Alembert est parfaitement déterminée.

3. Revenons maintenant à la Dynamique du fluide incompressible et reprenons les notations adoptées pour exprimer la décomposition de la force appliqué en force effective et force complémentaire:

$$(1)\qquad \begin{aligned} X &= X_1 + X_2,\\ Y &= Y_1 + Y_2. \end{aligned}$$

Nous supposerons, pour simplifier, la densité ρ égale à l'unité.

Donc, en écrivant seulement que les forces (X_2, Y_2) se font équilibre sur le fluide en vertu de son incompressibilité, on écrit une partie seule-

ment des conditions qui servent à déterminer, d'une façon unique, la décomposition (1).

Reste à écrire aussi la condition de compatibilité cinématique pour

$$X_1 = \frac{d^2 x}{d t^2}, \qquad Y_1 = \frac{d^2 y}{d t^2},$$

en d'autres termes: la condition pour les vecteurs-accélérations dans le mouvement d'un fluide incompressible.

Nous allons y parvenir par trois voies différentes.

4. On sait que pour la distribution des vecteurs-vitesses (dans un fluide incompressible) la condition de compatibilité cinématique est

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

u et v étant les projections du vecteur-vitesse sur les axes coordonnés.

On peut donc poser

$$u = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

et alors

$$\frac{d u}{d t} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial t},$$

$$\frac{d v}{d t} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t},$$

Maintenant posant

$$X_1 = \frac{d u}{d t} \text{ et } Y_1 = \frac{d v}{d t}$$

nous allons calculer

$$\frac{\partial X_1}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial Y_1}{\partial y}.$$

On trouve

$$\frac{\partial X_1}{\partial x} = \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial y} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial y^2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial y \partial t},$$

$$\frac{\partial Y_1}{\partial y} = -\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial y} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial y^2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\right)^2 + \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial y \partial t}.$$

Réductions faites, on trouve

$$\frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial Y_1}{\partial y} - 2\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0$$

ou, revenant aux projections u et v du vecteur-vitesse,

$$\frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial Y_1}{\partial y} + 2\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = 0.$$

C'est la condition du vecteur-accélération (X_1, Y_1) dans un fluide incompressible.

5. Nous allons suivre maintenant, pour arriver au même résultat, une voie élémentaire toute différente et qui nous donnera l'occasion de toucher à d'intéressantes questions d'Analyse.

Prenons d'abord le cas simple d'une système de trois points qui se meuvent dans un plan, en conservant l'aire du triangle qu'ils déterminent.

Soiènt $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ et $P_3(x_3, y_3)$ ces points: on aura

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \text{c}^{\underline{\text{te}}}$$

d'où, par dérivation (et posant

$$u = \frac{d x}{d t}, \quad v = \frac{d y}{d t}$$

d'une manière générale):

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} 1 & u_1 & y_1 \\ 1 & u_2 & y_2 \\ 1 & u_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & x_1 & v_1 \\ 1 & x_2 & v_2 \\ 1 & x_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0.$$

C'est la condition des vitesses.

En supposant les points P_1, P_2, P_3, infiniment voisins (et pris dans un fluide incompressible) la relation ci-dessus peut conduire à la condition des vitesses:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

si l'on admet pour le calcul des dérivées partielles un procédé, sur lequel j'ai appelé l'attention dans un article des Rendiconti de Palermo (Tomo LIV) et que j'ai illustré par quelques exemples.

Voici en quoi consiste ce procédé:

Pour une fonction analytique (je prends, comme on le voit, un cas simple) de deux variables

$$u = u_0 + a_1 (x - x_0) + b_1 (y - y_0) + \ldots$$

au lieu de définir les dérivées partielles a_1 et b_1 par le procédé classique: dans le voisinage de (x_0, y_0) on fait $y = y_0$ et on fait varier seulement x pour obtenir, par un rapport, le nombre a_1; et, ensuite on fait $x = x_0$, pour obtenir $b_1 \ldots$. on peut prendre trois points dans le voisinage de $P_0 (x_0, y_0)$ et formant un véritable triangle $P_1 P_2 P_3$ (contenant P_0 dans l'intérieur) et alors, par le système d'équations

$$u_1 = u_0 + a_1 (x_1 - x_0) + b_1 (y_1 - y_0) + \ldots$$

$$u_2 = u_0 + a_1 (x_2 - x_0) + b_1 (y_2 - y_0) + \ldots$$

$$u_3 = u_0 + a_1 (x_3 - x_0) + b_1 (y_3 - y_0) + \ldots$$

on calcule a_1 et b_1.

En effet, on a. par exemple,

$$y_1 (u_2 - u_3) + y_2 (u_3 - u_1) + y_3 (u_1 - u_2)$$
$$= a_1 [y_1 (x_2 - x_3) + y_2 (x_3 - x_1) + y_3 (x_1 - x_2)] - S$$

d'où

$$a_1 = \frac{y_1 (u_2 - u_3) + y_2 (u_3 - u_1) + y_3 (u_1 - u_2)}{y_1 (x_2 - x_3) + y_2 (x_3 - x_1) + y_3 (x_1 - x_2)} + \frac{S}{\triangle},$$

S désignant des termes d'ordre supérieur et $\triangle$ l'aire (au signe près) du triangle T formé par les trois points P_1, P_2 et P_3.

On montre facilement que le terme complémentaire $\frac{S}{\triangle}$ tend vers zéro, lorsque le triangle T tend vers le point P_0 et l'on peut écrire ainsi

$$a_1 = \lim . \frac{\begin{vmatrix} 1 & u_1 & y_1 \\ 1 & u_2 & v_2 \\ 1 & u_3 & y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

et, d'une façon analogue

$$b_1 = \lim . \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & u_1 \\ 1 & x_2 & u_2 \\ 1 & x_3 & u_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}} = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Ce procédé de définition, reconnu (au moins pour les fonctions analytiques) équivalent au procédé classique, la relation (4) donne évidemment, par un passage à la limite, la condition des vitesses.

Mais, on peut dériver encore une fois, la relation (4), par rapport au temps, en posant d'une façon générale

$$\frac{du}{dt} = X, \quad \frac{dv}{dt} = Y.$$

Ou obtient la relation

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} 1 & X_1 & y_1 \\ 1 & X_2 & y_2 \\ 1 & X_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & x_1 & Y_1 \\ 1 & x_2 & Y_2 \\ 1 & x_3 & Y_3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & u_1 & v_1 \\ 1 & u_2 & v_2 \\ 1 & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0.$$

C'est la condition des accélérations pour les points P_1, P_2, P_3 du triangle T.

Ou peut se proposer de trouver, par une passage à la limite, la condition des accélérations dans un fluide incompressible.

Les deux premiers déterminants, divisés par l'aire du triangle T, donnent à la limite les dérivées partielles

$$\frac{\partial X}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial Y}{\partial y}.$$

Mais il faut transformer le troisième déterminant.

Pour cela j'utiliserai l'identité suivante:

$$\begin{vmatrix} 1 & u_1 & v_1 \\ 1 & u_2 & v_2 \\ 1 & u_3 & v_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & u_1 & y_1 \\ 1 & u_2 & y_2 \\ 1 & u_3 & y_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_1 & v_1 \\ 1 & x_2 & v_2 \\ 1 & x_3 & v_3 \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} 1 & x_1 & u_1 \\ 1 & x_2 & u_2 \\ 1 & x_3 & u_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & v_1 & y_1 \\ 1 & v_2 & y_2 \\ 1 & v_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

Divisant partout par le carré du déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

on obtient la relation

$$\lim \frac{\begin{vmatrix} 1 & u_1 & v_1 \\ 1 & u_2 & v_2 \\ 1 & u_3 & v_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Et alors, revenant à la relation (5), on peut conclure, par le passage à la limite

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + 2\left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0$$

qui est la condition cherchée.

6. Comme trolsième voie, pour arriver à cette même condition, ji'indiquerai seulement la méthode suivante.

On sait que la condition ponctuelle

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

est parfaitement équivalente à la condition intégrale

$$\int_C u\,dy - v\,dx = 0$$

safisfaite le long de toute ligne fermée C, tracée dans le fluide en mouvement.

En calculant la variation de l'intégrale curviligne ci-dessus et annulant cette variation on trouve justement la condition (6).

Cette méthode est évidemment la plus naturelle, mais elle fait appel à une partie très délicate de l'Analyse mathématique.