S. MANDELBROJT.

Sur une classe des séries de Dirichlet.

O pewnej klasie szeregów Dirichleta.

Le théorème de M. Hadamard concernant les séries de Taylor lacunaires est bien connu: La série de Taylor $\Sigma\, a_n\, x^{m_n}$ de rayon de convergence fini et telle que

$$(1) \qquad \frac{m_{n+1} - m_n}{m_n} > m > 0$$

admet le cercle de convergence comme coupure (les m_n sont entiers).

On a trés profondement généralisé ce théorème aussi bien pour les séries de Taylor elles mêmes (comme par exemple le théorème de M. Fabry où l'on remplace (1) par

$$(1^{\text{bis}}) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{m_n}{n} = \infty)$$

que pour les séries de Dirichlet $\Sigma\, b_n\, e^{-l_n s}$.

Mais ces généralisations partent toujours de la densité des l_n (la condition la plus importante concernant cette densité est $\lim\limits_{n=\infty} \frac{n}{l_n} = 0$).

Nous généralisons le théorème de M. Hadamard d'une manière complètement différente: il est à remarquer que le théorème I de ce travail qui contient le théorème de M. Hadamard (avec une légère restriction facile à enlever tout en restant dans le même ordre d'idées) contient aussi le théorème II concernant une classe générale des séries de Dirichlet qui est caractérisée par une toute autre propriété que la densité des l_n (la proprieté 1^0 du théorème I ne pouvant pas être considerée comme une restriction sérieuse de la densité des l_n— il suffit pour le voir de la comparer à (1^{bis})). Ce n'est que pour les l_n entiers que l'hypothèse principale 4^0) du théorème I devient (1). Quand les l_n sont fractionnaires 4^0) est équivalent à (4^{bis}) du théorème II qui est plutôt une propriété arithmétique.

J'ai énoncé les théorèmes I et II de ce travail sous une forme un peu plus restrictive dans les Comptes Rendus de l'Académie des sciences, Décembre 1928 p. 1114[1]).

Commençons par le lemme suivant:

Lemme: Soit $F(s) = \Sigma a_n e^{-\lambda_n s}$ $(s = \sigma + it)$ une série de Dirichlet possédant les propriétés suivantes:

1⁰) Dans le domaine fermé D dont la frontière est composée d'une droite $\sigma = \sigma_0 < 0$ d'une droite $t = t_0$; et des segments $t = t_k > t_0$, $\sigma_0 \leqslant \sigma \leqslant 0$ $(k = 1, 2 \ldots)$ tels que

$$\lim_{k=\infty} t_k = \infty$$

et tels que la quantité $\frac{k}{t_k}$ reste bornée quand k croit, ce domaine contenant un point $a + bi$, $(a > 0,\ b > t_0)$ la fonction $F(s)$ est continue et bornée: $|F(s)| < M$.

2⁰) $F(s)$ est holomorphe dans D ouvert;

3⁰) $F(s)$ est holomorphe et bornée dans tout demi-plan $\sigma > \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$;

4⁰) $\delta > 0$ ètant arbitrairement choisi il existe une quantité $\eta > 0$ telle que dans les parties des cercles de rayon η et des centres it_k contenues dans D on ait $|F(s)| < \delta$.

Le fait suivant a alors lieu:

$$\lim a_n \lambda_n = 0.$$

Démonstration:

On sait que du fait que $F(s)$ est bornée pour $\sigma > \varepsilon$ il résulte que pour $\sigma_1 > 0$

$$a_n = \lim_{T=\infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{T} F(\sigma_1 + it)\, e^{\lambda_n(\sigma_1 + it)} dt. \tag{2}$$

Considérons le domaine Δ_m dont la frontière est composée des droites $\sigma = \sigma_1$; $\sigma = \sigma_2$ $(\sigma_0 < \sigma_2 < 0)$; $t = t_0$; $t = t_m$; et des segments $t = t_k$, $\sigma_2 \leqslant \sigma \leqslant 0$ $(k = 1, 2 \ldots m-1)$; σ_2 étant choisi de la manière suivante: $\delta > 0$ étant donné choisissons η $(0 < \eta < |\sigma_0|)$ vérifiant 4⁰) de l'hypothèse du lemme et posons $0 > \sigma_2 > -\eta$.

[1]) Il est évident que les théorèmes I et II de ce travail sont plus généraux que I et II de ma Note, car si 2) de la Note des C. R. a lieu, les conditions 2⁰) et 3⁰) de ce travail ont certainement lieu mais pas réciproquement.

$F(s)$ est holomorphe dans Δ_m ouvert et continue et bornée dans Δ_m fermé.

Soit C_m la frontière de Δ_m.

D'après le théorème de Cauchy

$$\int_{C_m} F(s)\, e^{\lambda_n(s)} ds = 0.$$

Donc:

$$i \int_{t_0}^{t_m} F(\sigma_2 + it)\, e^{\lambda_m(\sigma_2 + it)} dt$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} \int_{\sigma_2}^{0} F[\sigma + i(t_k - 0)]\, e^{\lambda_n(\sigma + it_k)} d\sigma$$

$$+ \sum_{k=1}^{m-1} \int_{0}^{\sigma_2} F[\sigma + i(t_k + 0)]\, e^{\lambda_n(\sigma + it_k)} d\sigma$$

$$= \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} F(\sigma + it_0)\, e^{\lambda_n(\sigma + it_0)} d\sigma + i \int_{t_0}^{t_m} F(\sigma_1 + it)\, e^{\lambda_n(\sigma_1 + it)} dt$$

$$+ \int_{\sigma_1}^{0} F(\sigma + it_m)\, e^{\lambda_n(\sigma + it_m)} d\sigma,$$

où nous avons désigné par $F[\sigma + i(t_k \pm 0)[$ les valeurs que prend $F(s)$ en s'approchant des points $\sigma + it_k$ respectivement par les points $\sigma + i(t + \varepsilon)$ et $\sigma + i(t - \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, $\lim \varepsilon = 0$.

Désignons par

$$I_1^m,\ I_2^m,\ I_3^m,\ I_4^m,\ I_5^m,\ I_6^m$$

les 6 termes de l'égalité précédente dans l'ordre où ils y interviennent.

On a

$$\lim_{m=\infty} \frac{I_4^m}{t_m} = 0.$$

Il résulte des hypothèses que I_6^m reste borné quand m varie, donc

$$\lim_{m=\infty} \frac{I_6^m}{t_m} = 0.$$

Donc d'après (2)

$$a_n = -i \lim_{m=\infty} \frac{I_5^m}{t_m} = -i \lim_{m=\infty} \frac{I_1^m + I_2^m + I_3^m}{t_m}. \tag{3}$$

On a d'autre part d'aprés les hypothèses

$$|I_1^m| = \left| \int_{t_0}^{t_m} F(\sigma_2 + it)\, e^{\lambda_n (\sigma_2 + it)}\, dt \right|$$

$$\leqslant \left| \int_{t_0}^{t_m} |F(\sigma_2 + it)|\, e^{\lambda_n \sigma_2}\, dt \leqslant M e^{\lambda_n \sigma_2} (t_m - t_0)\,.$$

Donc

$$\left| \frac{I_1^m}{t_m} \right| \leqslant M e^{\lambda_n \sigma_2}. \tag{4}$$

On a aussi d'après les hypothèses et le choix de σ_2

$$\left| \int_{\sigma_2}^{0} F[\sigma + i(t_k \pm 0)]\, e^{\lambda_n (\sigma + i t_k)}\, d\sigma \right|$$

$$\leqslant \delta \int_{\sigma_1}^{0} e^{\lambda_n \sigma}\, d\sigma = \frac{\delta}{\lambda_n} \left(1 - e^{\lambda_n \sigma_2} \right)$$

D'après les hypothèses il existe une quantité M_1 telle que

$$\frac{m}{t_m} < M_1\,.$$

D'après la définition de I_2^m et I_3^m on a alors

$$\left| \frac{I_2^m + I_3^m}{t_m} \right| \leqslant 2 M_1 \frac{\delta}{\lambda_n} \left(1 - e^{\lambda_n \sigma_2} \right). \tag{5}$$

On a d'après (3), (4), et (5)

$$|a_n| \leqslant M e^{\lambda_n \sigma_2} + 2 M_1 \frac{\delta}{\lambda_n} \left(1 - e^{\lambda_n \sigma_2} \right)$$

comme $\sigma_2 < 0$

$$\lim_{n=\infty} \lambda_n e^{\lambda_n \sigma_2} = 0.$$

Donc

$$\lim |a_n|\, \lambda_n \leq 2 M_1 \delta$$

d'où

$$\lim |a_n|\, \lambda_n = 0$$

c. q. f. d.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème suivant:

Théorème I. Supposons que les conditions suivantes soient vérifieés:

1°) $$\lim \frac{\log n}{l_n} = 0,$$

2°) $$|b_n| > a > 0,$$

3°) La série $\Sigma\, b_n e^{-l_n s}$ admet la droite $\sigma = 0$ comme axe de convergence absolue.

4°) Pour p entier donné et quels que soient les deux entiers positifs n et m $(n \neq m)$ les deux développements $(x^p + x^{p+1})^{l_n} = \sum_k r_k x^{p\, l_n + k}$; $(x^p + x^{p+1})^{l_m} = \Sigma\, r_k' x^{p\, l_m + k}$ ne possèdent pas de puissances communes de x.

Alors on peut conclure que la fonction $f(s) = \Sigma\, b_n e^{-l_n s}$ est telle que quels que soient $\varepsilon > 0$ et t réel fixes les fonctions de la variable complexe η

$$f_k(\eta) = f[(t + 2k\pi) i + \eta] \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots)$$

jouissent de la propriété suivante:

Ou bien

$$\lim_{|k| = \infty} \operatorname{Max} |f_k(\eta)| = \infty \text{ pour } |\eta| \leqslant \varepsilon$$

ou bien pour un certain k la fonction $f_k(\eta)$ possède un point singulier dans le cercle $|\eta| \leqslant \varepsilon$.

Dans la démonstration de ce théorème c'est la transformation $e^{-s} = \dfrac{e^{-pz} + e^{-(p+1)z}}{2}$ qui joue un rôle important. Remarquons que le théorème de M. Hadamard cité dès le début a été démontré d'une manière fort élégante pas M. M. Faber[1]) et Mordell[2]) en employant la transformation $x = \dfrac{y^p + y^{p+1}}{2}$ et en constatant que si (1) a lieu avec $m = p$ les deux polynomes $(x^p + x^{p+1})^{m_n}$ et $(x^p + x^{p+1})^{m_{n'}}$ $(n \neq n')$ n'ont pas de puissances communes.

Démonstration du théorème I.

Posons:

$$e^{-s} = \frac{e^{-pz} + e^{-(p+1)z}}{2} \text{ avec } z = 0 \text{ pour } s = 0. \tag{6}$$

Posons aussi

$$\Theta(x) = (1 + x)^{l_n} = \sum_{k=0}^{\infty} d_k x^k.$$

---

[1]) Faber, Thèse. Munich 1903 p. 20.
[2]) Mordell, Journ. of the Lond. Math. ~~Soc. 2.~~ 1927 p. 146.

$$d_k = \frac{l_n(l_n-1)\dots(l_n-k+1)}{k!},$$

posons

$$\left(\frac{e^{-pz}+e^{-(p+1)z}}{2}\right)^{l_n} = \Sigma\, c_k\, e^{-(p\, l_n+k)\, z}$$

$$c_k = \frac{d_k}{2^{l_n}},$$

Soit

$$\sum_n b_n\, e^{-l_n s} = \Sigma\, b_n \left(\frac{e^{-pz}+e^{-(p+1)z}}{2}\right)^{l_n}$$

$$= \Sigma\, a_m\, e^{-\lambda_m z}$$

$$\text{et}\quad \Sigma\, e^{-l_n s} = \Sigma\, a'_m\, e^{-\lambda_m z}.$$

D'après l'hypothèse 4⁰) du théorème si $m_1 \neq m_2$ une égalite

$$l_{m_1} + k_1 = l_{m_2} + k_2$$

n'est pas possible, si k_1 et k_2 sont entiers.

A chaque m correspond donc un seul n et un seul k lels que

$$\lambda_m = l_n + k_1 \tag{7}$$

$$a'_m = c_k = \frac{d_k}{2^{l_n}}.$$

On peut donc écrire

$$a_m = a'_m\, b_n = \frac{d_k\, b_n}{2^{l_n}}.$$

Donc d'aprés l'hypothèse 2⁰) du théorème

$$|a_m| \geqslant a\,|a'_m| = a\,\frac{|d_k|}{2^{l_n}} = a\,\frac{|l_n(l_n-1)\dots(l_n-k+1)|}{k!\,2^{l_n}}.$$

Mais on constate immédiatement que

$$\frac{l_n(l_n-1)\dots\left(l_n-\left[\frac{l_n+1}{2}\right]+1\right)}{\left(\left[\frac{l_n+1}{2}\right]\right)!\,2^{l_n}} > \frac{1}{2} \quad {}^{1})$$

quel que soit n.

---

[1]) Nous désignons par $[x]$ la partie entiére de x.

Donc pour $\lambda_{m_1} = l_n + \left[\frac{l_n+1}{2}\right]$, n etant assez grand:

$$|a_{m_1}|\,\lambda_{m_1} = |a_{m_1}|\,\left(l_n + \left[\frac{l_n+1}{2}\right]\right) \geqslant \frac{a}{2}. \tag{8}$$

D'autre part

$$d_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (1+e^{i\varphi})^{l_n}\, e^{-ik\varphi}\, d\varphi$$

car la fonction $(1+x)^{l_n}$ est continue sur le cercle $|x|=1$, donc

$$|d_k| < 2^{l_n} \text{ d'où}$$

$$|a'_m| \leqslant 1.$$

Il en résulte que

$$\sum_{m=1}^{r} |a_m| \leqslant \sum_{n=1}^{l_n \leqslant \lambda_r} [\lambda_r - l_n + 1]\,|b_n|$$

$$\leqslant \lambda_r \sum_{n=1}^{l_n \leqslant \lambda_r} |b_n|.$$

Donc d'après l'hypothese (3⁰)

$$\lim_{r=\infty} \frac{\log \sum_{h=1}^{r} |a_m|}{\lambda_r} = 0$$

et $\Sigma\,|a_n|\,e^{-\lambda_n \sigma'}$ converge pour $\sigma' > 0$, (pour notre but il suffit de savoir que la série $\Sigma\, a_n\, e^{-\lambda_n s}$ n'est pas toujours divergente).

Quand s se trouve dans le demi-plan $\sigma' \geqslant 0$, z est situé dans le domaine D, dont la frontière est formée d'une courbe C dont l'équation dans le plan $\sigma'\, t'$ étant donnée par

$$\sigma' = \Psi(t')$$

on a

$$\left.\begin{aligned} \Psi(t'+2k\pi) &= \Psi(t') \\ \Psi(2k\pi) &= 0 \end{aligned}\right\}\ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

D'autre part à $z = (2k+1)\pi i$ correspond $s = +\infty$; donc en posant $l_1 \neq 0$ (ce qui est légitime) à tout $\delta > 0$ correspond un $\eta > 0$ tel que

$$|F(z)| < \delta \text{ pour } |z-(2k+1)\pi i| < \eta$$

en posant $F(z) = \Sigma\, a_n e^{-\lambda_n z}$ (car $\lim\limits_{\sigma=\infty} f(\sigma + it) = 0$).

Il résulte de 1⁰) et 3⁰) du théorème que $f(s)$ est bornée dans tout demi-plan $\sigma > \varepsilon_3$ ($\varepsilon_3 > 0$) [1]).

Je dis que les conclusions de notre théorème ont lieu si l'on y pose $t = 0$; en effet si ceci n'avait pas lieu il résulterait de ce que nos venons de dire sur la transformation, sur $f(s)$ dans le demi-plan $\sigma > 0$ (ce qui correspond à la variation de $F(z)$ dans D_1) et sur $F(z)$ dans les cercles

$$|z-(2k+1)\pi i| < \eta$$

que $F(z)$ posséderait toutes les propriétès exigées par notre lemme (en y remplaçant la lettre s par z). Donc.

$$\lim_{m=\infty} |a_m| \lambda_m = 0,$$

ce qui est contradictoire avec (8).

Il suffit maintenant de considérer la série $\Sigma\, b_n e^{i l_n t'} e^{-l_n s}$ pour avoir le théorème entier.

On voit immédiatement que le théorème I contient le théorème de M. Hadamard au cas où le cercle de convergence de la série $\Sigma\, a_n x^{m_n}$ étant égal à un ou a en plus $|a_n| > a$, la condition (1) ayant lieu avec $m = \frac{1}{p}$.

Car alors toutes les conditions du théoréme I ont lieu, et les conclusions de ce théorème pour le cas oú les l_n sont entiers correspondent au fait que $\sigma = 0$ est une coupure (á cause de la périodicité de $f(s)$).

Le théorème I contient le théorème suivant au cas où les l_n ne sont pas entiers.

Théorème II. *Si les conditions 1⁰), 2⁰), 3⁰) du théorème I ont lieu et si en plus.*

4^{bis}) *aucune différence* $l_n - l_m$ $(n \neq m)$ *n'est un entier,—la conclusion du théorème I a lieu.*

---

1) Voir Valiron, Mémorial des sciences math. 17, 1926 formule (22).

Prof. M. KAMIEŃSKI.

Triangulacja i niwelacja centrów

Obserwatorjum Astronomicznego i Meteorologicznego Uniwersytetu Warszawskiego.

Triangulation und Nivellierung der Zentra des Astronomischen und Meteorologischen Observatorium der Universität in Warschau.

1. Wstęp. Obserwatorjum Astronomiczne i Meteorologiczne Uniwersytetu Warszawskiego należy do tych punktów Polski, których spółrzędne geograficzne są bardzo dobrze znane. Z długich seryj pomiarów, dokonanych w ubiegłem stuleciu, a zapoczątkowanych jeszcze przez F. Armińskiego w r. 1826, wyznaczano kilkakrotnie szerokość i długość Obserwatorjum; pomiary takie po części były kontynuowane — aczkolwiek z przerwami — aż do ostatniego czasu. Główne wyniki tych obserwacyj są zestawione w artykule S. Czornego, w Nr. 4666 A. N.; zauważyć należy, iż szerokość wyznaczano w kilku punktach, i otrzymywane wyniki zawsze redukowano do centrum Obserwatorjum. Różnice zaś długości wyznaczano drogą nawiązania Obserwatorjum do kilku innych obserwatorjów w Europie i w Rosji; wyrównanie tych długości zostało wykonane przez Albrechta i podane w A. N. 3993; dyskusja tych wyników znajduje się w A. N. 5138. Jako najbardziej prawdopodobny średni wynik, można przyjąć dla głównego centrum Obserwatorjum V:

$$\Phi = 52^0\ 13'\ 4.''60$$

$$\Lambda = 1^h\ 24^m\ 7.^s245$$

Z drugiej strony, Obserwatorjum odegrało w ubiegłem stuleciu bardzo ważną rolę, — mianowicie, służyło ono jako główny punkt wyjścia dla triangulacji Królestwa Polskiego. Za początek spółrzędnych obrane zostało centrum, założone w wieży wschodniej Obserwatorjum; do tego centrum były odnoszone spółrządne triangulacji. Centrum to — zarówno jak i inne centra Obserwatorjum — były powiązane za pomocą małej triangulacji z głównem centrum Obserwatorjum, za które, aż do r. 1886, służyło koło wierzchołkowe, znajdujące się pośrodku sali głównej. Triangulacji tej dokonał w r. 1845 adjunkt Obserwatorjum, A. Prażmowski; wyniki