Also ist

$$\sum_{k=1}^{\alpha} \frac{1}{(k\, q_{n-1} + q_{n-2})^s \, ((k+1)\, q_{n-1} + q_{n-2})^s} \leqq \frac{\left(1 - \frac{1}{2\,\alpha}\right) (2\,\alpha)^{2-2s}}{q_{n-1}^s \, (q_{n-1} + q_{n-2})^s}$$

und wir haben nur

$$\left(1 - \frac{1}{2\,\alpha}\right) (2\,\alpha)^{2-2s} \leqq 1$$

zu zeigen; dies ist aber wegen

$$(2 - 2\,s) \log 2\,\alpha = \frac{1}{4\,\alpha \log \alpha} \log 2\,\alpha < \frac{1}{2\,\alpha}$$

$$< \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2\,\alpha}\right)^n = -\log\left(1 - \frac{1}{2\,\alpha}\right)$$

in der Tat der Fall, womit die Behauptung bewiesen ist.

Praha, den 2. Dezember 1929.

ARNOLD WALFISZ. [1])

Ueber einige neuere Ergebnisse der Gitterpunktlehre.

O niektórych nowszych wynikach nauki o punktach siatkowych.

Ich werde mir im folgenden erlauben, über die wichtigsten Fortschritte zu berichten, die die Gitterpunktlehre seit ungefähr Jahresfrist zu verzeichnen hat. Hierbei ist es jedoch geboten, auch über die früheren Forschungen auf diesem Gebiete einiges zu sagen, damit die jüngst erzielten Fortschritte im richtigen Lichte erscheinen.

Gitterpunkte sind Punkte mit ganzzahligen Koordinaten in einem 2,3 oder mehrdimensionalen Cartesischen Raume. Es wird in einem solchen Raume ein endlicher abgeschlossener Bereich $B(x)$ vorgegeben, der von einer positiven Variabeln x abhängt, und es handelt sich im wesentlichen darum, die Anzahl $G(x)$ der Gitterpunkte in $B(x)$ mit wachsendem x nach oben und unten abzuschätzen (O — und Ω - Probleme). Die Bereiche $B(x)$ müssen hierbei „anständig" sein, um eine Behandlungsweise in diesen Richtungen zuzulassen; was aber „anständig" heisst, darf ich übergehen, da im folgenden nur Gitterpunktprobleme ganz spezieller Art besprochen werden sollen, bei denen der Bereich $B(x)$ explizit aufgeschrieben wird. Bei diesen Problemen—wie auch bei den wichtigsten Fragestellungen des Gebietes überhaupt — bildet der geometrische Ursprung von $G(x)$ nur eine bequeme Einkleidung rein arithmetischer Kerne. Es darf daher nicht wundernehmen, dass die Gitterpunktlehre als ein Zweig der Zahlentheorie anzusehen ist.

Obwohl die klassischen Problemstellungen der Gitterpunktlehre recht weit zurückliegen, hat eine systematische Forschung nach modernen Grundsätzen erst seit einem Vierteljahrhundert eingesetzt. Das einzige

[1]) Erweiterte Fassung eines Vortrages, den ich während der Slavischen Mathematikertagung in Warschau am 26. September 1929 gehalten habe.

Lehrbuch, welches diesen Fragen gerecht wird, sind die 1927 erschienenen dreibändigen „Vorlesungen über Zahlentheorie“ von E. Landau. Ich verweise insbesondere auf den zweiten Band dieses monumentalen Werkes zur Ergänzung der folgenden Ausführungen.

Von den Gitterpunktproblemen stehen seit langem zwei im Mittelpunkt des Interesses, haben sich doch bereits Gauss und Dirichlet mit ihnen beschäftigt; ich meine das Gausssche Kreisproblem und das Dirichletsche Teilerproblem. Im ersten Falle ist $B(x)$ der Kreis

$$u^2 + v^2 \leqq x \tag{1}$$

mit dem Nullpunkt des Koordinatensystems (u, v) als Mittelpunkt und dem Radius $\sqrt{x}$, im zweiten das von zwei geradlinigen Stücken und einem Hyperbelbogen begrenzte Dreieck

$$u \geqq 1,\ v \geqq 1,\ uv \leqq x. \tag{2}$$

Der arithmetische Kern dieser Fragestellungen liegt auf der Hand. Die dem Kreise (1) entsprechende Gitterpunktfunktion $G(x)$ stellt die Anzahl aller Paare ganzer Zahlen (m, n) dar, die der Ungleichung

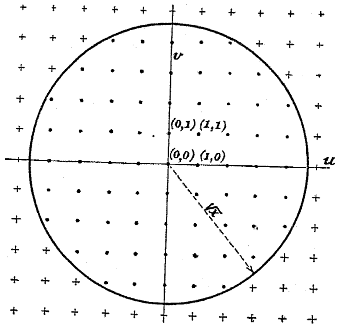
$$m^2 + n^2 \leqq x$$

genügen. $G(x)$ gibt also an, auf wieviele Arten alle ganzen nicht negativen Zahlen $\leqq x$ als Summe von zwei ganzen Quadraten darstellbar sind. Die dem Hyperbeldreieck entsprechende Gitterpunktfunktion $G(x)$, sie wird meistens mit $D(x)$ bezeichnet und auch wir wollen sie so nennen, zählt ab, wieviele Paare natürlicher Zahlen (m, n) der Ungleichung

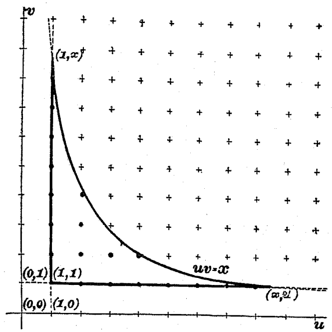
$$mn \leqq x$$

genügen, das heisst auf wieviele Arten alle natürlichen Zahlen $\leqq x$ als Produkte zweier ebensolcher Faktoren darstellbar sind, das heisst wieviele positive Teiler alle natürlichen Zahlen $\leqq x$ besitzen.

Kreis- und Teilerproblem sind als eine Art mathematischer Zwillinge anzusehen—obwohl ersteres um einige Dezennien früher geboren wurde—da ihre Behandlungsweise weitgehender Analogien fähig ist und bisher jedes Ergebnis für eines von ihnen auch auf das andere in ungefähr derselben Schärfe übertragen werden konnte (diese weitgehende Analogie beruht vor allem darauf, dass der bekannte Jacobische Satz über die Anzahl aller Darstellungen einer Zahl als Summe von zwei Quadraten diese Anzahl in Teilerfunktionen ausdrückt). Hierbei verhält sich das



Grundbereich des Kreisproblems.



Grundbereich des Teilerproblems.

Kreisproblem etwas manierlicher, was wohl in der Hauptsache auf die wohltuende Rundlichkeit seines Grundbereiches im Gegensatz zu den Spitzen des Hyperbeldreiecks zurückzuführen ist.

Ich werde im folgenden nur über das Teilerproblem berichten, weil der vor Jahresfrist erzielte Fortschritt J. G. van der Corputs[1]) diesem zugute kommt (van der Corput überliess es dann seinem Schüler L. W. Nieland, seine Methode auf den Kreis anzuwenden[2]); andere Anwendungen habe ich zu Anfang dieses Jahres gegeben[3])).

Es bezeichne, wie gesagt, $D(x)$ die Anzahl aller Gitterpunkte im Hyperbeldreieck (2). Dann wird, wie bereits Dirichlet elementar nachwies, $D(x)$ durch den Ausdruck

$$x \log x + (2C - 1)x$$

(C die Eulersche Konstante) angenähert, und zwar so, dass

$$D(x) - x \log x - (2C - 1)x = \Delta(x)$$

gesetzt,

$$\Delta(x) = O(\sqrt{x}) \tag{3}$$

ist.

In (3) tritt ein von P. Bachmann eingeführtes Abschätzungssymbol O auf, um dessen universelle Verbreitung sich namentlich Landau sehr verdient gemacht hat. (3) besagt, dass

$$\limsup_{x=\infty} \left| \frac{\Delta(x)}{\sqrt{x}} \right| < \infty$$

ist, und analog sind alle weiteren O-Formeln zu verstehen.

Es hat lange Jahrzehnte gedauert, bis man diese Abschätzung verschärfen konnte, obwohl es an Bemühungen hierzu nicht gefehlt hat. Erst 1903 gelang es dem russischen Forscher Voronoï

$$\Delta(x) = O\left(\sqrt[3]{x} \log x\right) \tag{4}$$

[1]) 1. „Zum Teilerproblem", Mathematische Annalen **98** (1928), S. 697—716. Vergleiche hierzu noch 2. „Neue zahlentheoretische Abschätzungen. (Zweite Mitteilung.)", Mathematische Zeitschrift **29** (1929), S. 397—426 und 3. „Zahlentheoretische Abschätzungen mit Anwendung auf Gitterpunktprobleme. (Zweite Mitteilung.)", Mathematische Zeitschrift **28** (1928), S. 301—310.

[2]) „Zum Kreisproblem", Mathematische Annalen **98** (1928), S. 717—736.

[3]) „O pewnem zagadnieniu dzielników Ramanujana. (Ueber ein Ramanujansches Teilerproblem)", Prace matematyczno-fizyczne, **34** (1929), S. 101—126.

zu beweisen. Wir müssen uns bei dieser Formel etwas aufhalten, um zu sehen, wie ungefähr der Fortschritt gegenüber (3) einzuschätzen ist.

Die Funktion $\log x$ wächst mit x ins Unendliche, aber doch schwächer als jede feste noch so kleine positive Potenz von x. Denn bei festem $\varepsilon > 0$ und beliebigem $x > 1$ ist

$$\log x = \int_1^x \frac{du}{u} < \int_0^x \frac{u^{\frac{\varepsilon}{2}}}{u}\, du = \frac{2}{\varepsilon}\, x^{\frac{\varepsilon}{2}},$$

also

$$\frac{\log x}{x^{\varepsilon}} < \frac{2}{\varepsilon}\, x^{-\frac{\varepsilon}{2}} \to 0.$$

Die Abschätzung (4) besagt also weniger als

$$\Delta(x) = O\left(x^{\frac{1}{3}}\right),$$

aber mehr als

$$\Delta(x) = O\left(x^{\frac{1}{3}+\varepsilon}\right) \tag{5}$$

bei jedem festen $\varepsilon > 0$.

Ein Vergleich von (5) und (4) ergibt also, dass es Voronoï gelungen ist, den Restexponenten $\frac{1}{2}$ in Dirichlets Fornel (3) „fast" zu $\frac{1}{3}$ herunterzudrücken.

Der elementare, aber ziemlich umständliche und lange (40 Druckseiten) Voronoïsche Beweis von (4), der auf einer eigentümlichen Verknüpfung geometrischer und arithmetischer Prinzipien beruhte, konnte in der Folge sehr vereinfacht werden. Die betreffenden Beweismethoden verdankt man in der Hauptsache den Bemühungen zweier Forscher. Seit 1912 widmete Landau dem Kreis- und Teilerproblem und verwandten Fragestellungen eine ganze Reihe von grundlegenden Abhandlungen und sieben Jahre später gesellte sich ihm van der Corput hinzu, der ebenfalls auf eine stattliche Anzahl von Veröffentlichungen zurückblicken kann. Beide Forscher schufen und vervollkommneten eine ganze Anzahl von Methoden, die mit den verschiedensten Hilfsmitteln operierten (reelle Funktionentheorie, komplexe Funktionentheorie, Geometrie, Arithmetik)

und alle diese Methoden, auf das Teilerproblem angewendet, führten einträchtig zu der Voronoïschen Abschätzung (4) [1]).

Parallel damit laufen seit 1915 einsetzende Untersuchungen von Hardy und Landau, die untere Abschätzungen von $\Delta(x)$ zum Ziele haben. Das schärfste erzielte Resultat (Hardy) lautet

$$\Delta(x) = \Omega\left(x^{\frac{1}{4}} \log^{\frac{1}{4}} x \log\log x\right). \tag{6}$$

Hierin tritt das von Hardy und Littlewood eingeführte Abschätzungssymbol Ω auf, welches im vorliegenden Falle aussagt, dass

$$\limsup_{x=\infty} \left| \frac{\Delta(x)}{x^{\frac{1}{4}} \log^{\frac{1}{4}} x \log\log x} \right| > 0$$

ist; alle anderen Ω-Formeln sind analog zu verstehen. In (6) fallen $\log^{\frac{1}{4}} x$ und $\log\log x$ natürlich wenig ins Gewicht. Die Formel besagt mehr als

$$\Delta(x) = \Omega\left(x^{\frac{1}{4}}\right), \tag{7}$$

aber weniger als

$$\Delta(x) = \Omega\left(x^{\frac{1}{4}+\varepsilon}\right)$$

für irgend ein festes $\varepsilon > 0$, also nicht „viel" mehr als (7).

Ich möchte hier noch erwähnen, dass man zwar nicht für $\Delta(x)$, wohl aber für den Mittelwert

$$\Delta_1(x) = \frac{1}{x} \int_0^x |\Delta(u)|\, du$$

[1]) In diesem Zusammenhang wäre noch zu erwähnen, dass W. Sierpiński bereits 1906 die Voronoïsche Methode auf das Kreisproblem angewandt hat. Seit etwa 1916 liegen Veröffentlichungen von Hardy, Wigert und Winogradoff vor. Eine seiner fruchtbarsten Methoden verdankt Landau einem misslungenen Versuche Pfeiffers aus den achtziger Jahren des vorigen Jahrhunderts. Diese „Pfeiffersche Methode" ist auch von Cauer, Hammerstein, Rogosinski und van der Corput angewandt und ausgebaut worden; sie ist aber, ebenso wie die Methode Voronoïs, heute als veraltet anzusehen. Eine andere Methode verdanken Landau und van der Corput unveröffentlichten Aufzeichnungen von Piltz, dem es aber nicht gelungen war, selbst (5) zu beweisen.

(es ist klar, dass dieses Integral existiert, da $D(x)$ eine stückweise konstante Funktion, Treppenfunktion, ist) Abschätzungen nach oben erzielen konnte, welche das Voronoïsche Ergebnis (4) an Schärfe weit übertreffen. Nach Hardy (1916) ist nämlich für jedes feste $\varepsilon > 0$

$$\Delta_1(x) = O\left(x^{\frac{1}{4}+\varepsilon}\right), \tag{8}$$

während H. Cramér (1922) hierin noch das ε im Exponenten streichen konnte:

$$\Delta_1(x) = O\left(x^{\frac{1}{4}}\right). \tag{9}$$

Dass man so weit gehen konnte liegt daran, dass sich die „Unebenheiten", Ausschwingungen, von $\Delta(x)$ durch die Integration weitgehend ausgleichen.

Aus (6) folgt, dass die Abschätzung (9) sicherlich falsch wird, wenn man in ihr $\Delta_1(x)$ durch $\Delta(x)$ ersetzt. Denn

$$\Delta(x) = O\left(x^{\frac{1}{4}}\right) \tag{9a}$$

besagt, dass

$$\left|\frac{\Delta(x)}{x^{\frac{1}{4}}}\right|$$

für grosse x beschränkt ist, woraus

$$\frac{\Delta(x)}{x^{\frac{1}{4}} \log^{\frac{1}{4}} x \log\log x} \to 0,$$

im Widerspruch zu (6) folgt. Man vermutet aber, wohl schon seit etwa 50 Jahren, dass die Abschätzung (8) auch für $\Delta(x)$ zutrifft, das also

$$\Delta(x) = O\left(x^{\frac{1}{4}+\varepsilon}\right) \tag{10}$$

für jedes feste $\varepsilon > 0$ ist. Es würde mich überaus freuen, einen Beweis von (10) zu erleben, die Wahrscheinlichkeit dafür ist aber sehr gering.

Es mag sonderbar anmuten, dass man an die Abschätzung (10) glaubt, obwohl so viele verschiedenartige Methoden, die von den hete-

rogensten Hilfsmitteln Gebrauch machen, in wunderbarer Harmonie alle das Voronoïsche Ergebnis liefern, das somit das naturgemässe, definitive zu sein scheint. Aber jede dieser Methoden, so sinnreich sie auch konstruiert sind, enthält an irgendeiner Stelle Abschätzungen, welche man zwar nicht durch bessere ersetzen konnte, deren Unzulänglichkeit man aber deutlich spürte, während die Ω - Methoden keine solchen fühlbaren Schwächen aufzuweisen hatten. Zudem gewann die Vermutung (10) an Wahrscheinlichkeit, seitdem die Hardysche Abschätzung (8) bekannt wurde.

Das harmonische Gefüge von (4) wurde endlich 1922 gestört, indem es van der Corput durch eine elementare, aber unerhört komplizierte Methode nachzuweisen gelang, dass

$$\Delta(x) = O(x^{\Theta}) \text{ mit einem geeigneten } \Theta < 0{,}33$$

ist. Sein genaues Resultat lautet übrigens

$$\Delta(x) = O\left(x^{\frac{163}{494}}\right). \tag{11}$$

Der Fortschritt gegenüber (4) beruht hauptsächlich auf der Anwendung eines von Weyl 1914 geschaffenen, heute klassischen Satzes über Diophantische Approximationen. (Die Lehre von den Diophantischen Approximationen- der Name stammt von Minkowski - behandelt im wesentlichen Probleme, die mit der Annäherung irrationaler Zahlen durch rationale mittelbar oder unmittelbar zusammenhängen. Ich werde auf eine solche Fragestellung im zweiten Teile des Referates, gelegentlich der Besprechung einer Jarníkschen Arbeit eingehen.) Aber erst die mehrmalige, technisch überaus schwer durchzuführende Einschachtelung dieses Satzes ergab die Abschätzung (11). Den Bemühungen Littlewoods, Landaus und des Vortragenden gelang es in der Folge (1924), bereits mit der einmaligen Anwendung des Weylschen Satzes den Restexponenten von $\Delta(x)$ unter $\frac{1}{3}$ herunterzudrücken und wenigstens zu

$$\Delta(x) = O\left(x^{\frac{37}{112}+\varepsilon}\right) \tag{12}$$

für jedes $\varepsilon > 0$ zu gelangen (hierin konnte Landau das x^{ε} im Restgliede noch durch eine geeignete log - Potenz ersetzen).

Die zu (12) führenden Methoden sind weit durchsichtiger als der van der Corputsche Beweis von (11), das Resultat selbst steht aber gegenüber dem seinigen an Schärfe zurück, da ja

$$\frac{163}{494} < \frac{37}{112}$$

ist. Die Methode der drei Verfasser, wie auch diejenige van der Corputs, wurde von mir noch auf verschiedene Fragestellungen angewandt.

Die sehr komplizierte Herleitung von (11), welches Resultat man seitdem nicht einfacher beweisen konnte, flösste den Forschern wenig Mut ein, eine Verbesserung dieser Abschätzung zu versuchen. So war es wiederum van der Corput vorbehalten, einen erfolgreichen Vorstoss zu unternehmen. Zu Anfang dieses Jahres erschien eine hochbedeutende Arbeit von ihm (es ist die in Fussnote 1), S. 3 unter **2** genannte), in der neue, überaus tiefliegende Sätze über Diophantische Approximationen bewiesen werden. Auch hier handelt es sich um Einschachtelungssätze Weylscher Art, deren Herleitung aber nicht mehr so verwickelt ist. Durch Verwendung neuartiger Hilfsmittel (Interpolation durch Parabelbögen- ein in diesem Zusammenhange noch nicht angewandter Gedanke) gelingt es van der Corput ein Instrument zu schaffen, das eine Ueberbietung seines bisherigen Resultates (11) gestattet. Wie van der Corput (in der Fussnote 1), S. 3 unter **1** genannten Arbeit) nachwies, ist

$$(13) \qquad \Delta(x) = O\left(x^{\frac{27}{82}} \log^{\frac{11}{41}} x\right),$$

womit (11) in der Tat verschärft ist, da

$$\frac{27}{82} < \frac{163}{494}$$

und die log - Potenz in (13) offenbar nicht stört.

Wie Sie sehen, sind wir noch von dem Ziele (10) himmelweit entfernt. Der Fortschritt gegenüber Voronoï ist, wenn man allein die numerische Verbesserung des Restexponenten in Betracht zieht, recht gering. Die grosse Mühe, welche diese Verbesserung erfordert hat, zeigt jedenfalls, dass wir heute bei Behandlung des O-Problems noch nicht auf dem richtigen Wege sind - umsomehr als auch bei den van der Corputschen Untersuchungen die Unzulänglichkeit der angewandten Hilfsmittel aus der Theorie Diophantischer Näherungen ebenso klar zu Tage tritt, wie es vordem bei den weniger difficilen zu (4) führenden Hilfsmitteln der Fall war. Es scheint denn auch, dass die gegenwärtige Wissen-

schaft (wie so oft in der Zahlentheorie) zu schwach ist, um das ersehnte Ziel zu erreichen. Wir stehen vor einer verschlossenen Tür, die wir trotz aller Mühe nur um einige Millimeter eindrücken können.

Aber an Versuchen, jene Tür zu öffnen, wird es nicht fehlen- hat doch dieser Zweig der Mathematik auch noch ein sportliches Interesse, das jeden Forscher dazu veranlasst, den Rekorden seiner Vorgänger zu Leibe zu geben. Ich möchte dieses Wettrennen, um mich einer etwas vagen Analogie zu bedienen, mit einem Kurzstreckenlauf vergleichen. Trösten wir uns also damit, dass zum Beispiel im Hundertmeterlauf der vor hundert Jahren aufgestellte Rekord heute auch nur um eine Sekunde verbessert worden ist. In diesem Lichte besehen, darf man die van der Corputschen Leistungen nicht nach der minimalen Verminderung des Restexponenten messen, sondern muss den grossen Scharfsinn in Rechnung stellen, der bei unseren unzulänglichen Hilfsmitteln dazu nötig war, um diese Leistungen zu erzielen. Van der Corput ist seit 1922 O-Weltmeister über Gitterpunktkurzstreckendistanzen, und es wird nicht leicht sein, ihn zu enttronen.

Wir wenden uns jetzt einem anderen Gitterpunktproblem zu, das man als Langstreckenproblem ansprechen könnte.

Es sei $k \geqq 2$ ganz,

$$(14) \qquad Q(u_1, u_2, \ldots, u_k) = \sum_{\mu,\nu=1}^{k} a_{\mu\nu} u_\mu u_\nu \qquad (a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu})$$

eine positiv definite quadratische Form mit beliebigen reellen Koeffizienten — das heisst eine solche quadratische Form, die für alle reellen Wertsysteme der Veränderlichen $\geqq 0$ ist und nur dann verschwindet, wenn alle Veränderlichen $= 0$ sind. Die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

einer solchen Form ist eine positive Zahl. Wir deuten die reellen Wertsysteme $(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ als Punkte in einem k-dimensionalen Raume und nennen wohl auch die Form selbst k-dimensional. Als Grundbereich $B(x)$ wählen wir die Gesamtheit aller derjenigen Punkte, welche der Ungleichung

$$(15) \qquad Q(u_1, u_2, \ldots, u_k) \leqq x$$

genügen. Für $k=2$ stellt der Bereich (15) eine Ellipse, für $k=3$ ein Ellipsoid, also einen eiförmigen Körper, dar; für $k \geqq 2$ bezeichnet man (15), in Analogie zum dreidimensionalen Falle, als k-dimensionales Ellipsoid. Die dem Ellipsoid (15) entsprechende Gitterpunktfunktion nennen wir $A_Q(x)$; der Index Q soll hierbei andeuten, dass die Gitterpunktfunktion von der quadratischen Form Q abhängt. Wie Sie sehen, handelt es sich bei der Untersuchung von $A_Q(x)$ — dem Ellipsoidproblem — um eine, allerdings sehr weitgehende, Verallgemeinerung des Gaussschen Kreisproblems, auf welches man zurückkommt, wenn für Q die Form

$$Q(u_1, u_2) = u_1^2 + u_2^2$$

gewählt wird. Setzt man allgemeiner

$$\text{(14a)} \qquad Q(u_1, u_2, \ldots, u_k) = u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_k^2,$$

so liefert (15) die k-dimensionale Kugel

$$\text{(15a)} \qquad u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_k^2 \leqq x,$$

welche als Spezialfälle den Kreis ($k=2$) und die dreidimensionale Kugel ($k=3$) enthält.

Dem Ellipsoid (15) wird das Volumen

$$J_Q(x) = \underset{Q(u_1, \ldots, u_k) \leqq x}{\int \cdots \int} d u_1\, d u_2 \ldots d u_k$$

zugesprochen. Wertet man dieses k-fache über das Ellipsoid erstreckte Integral aus, so ergibt sich

$$\text{(16)} \qquad J_Q(x) = \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\sqrt{D}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)}\, x^{\frac{k}{2}},$$

womit man für $k=2$ und $k=3$ auf die üblichen Formeln kommt.

Mit dem Ellipsoidproblem — wenn auch nicht um seiner selbst willen — hat sich bereits Eisenstein beschäftigt. Aus seinen Untersuchungen geht hervor, dass für grosse x die Funktion $A_Q(x)$ durch das Ellipsoidvolumen (16) asymptotisch dargestellt wird:

$$A_Q(x) \sim J_Q(x).$$

Dies ist so zu verstehen, dass

$$\lim_{x=\infty} \frac{A_Q(x)}{J_Q(x)} = 1$$

ist.

Es liegt daher nahe, die Restfunktion

$$P_Q(x) = A_Q(x) - J_Q(x)$$

zu bilden. Da wohl kein Missverständnis zu befürchten ist, werde ich hierfür kurz $P(x)$ schreiben.

Wie Minkowski (1905) nachwies, ist

$$P(x) = O\left(x^{\frac{k-1}{2}}\right).$$

Dies Ergebnis entspricht an Schärfe der Dirichletschen Abschätzung (3); für den Kreis war es bereits durch Gauss bekannt.

Seit 1912 behandelte Landau das Ellipsoidproblem mit seinen komplexen Kurzstreckenmethoden. Wie er (1915) nachwies, ist

$$\text{(17)} \qquad P(x) = O\left(x^{\frac{k}{2} - \frac{k}{k+1}}\right).$$

Dies entspricht der Voronoïschen Abschätzung (4) und ist für den Kreis durch Sierpiński (1906) bekannt. Später (1919) leitete van der Corput (17) mit der Pfeifferschen reellen Methode ab.

Nach unten hin erreichte Landau (1924)

$$\text{(18)} \qquad P(x) = \Omega\left(x^{\frac{k-1}{4}}\right),$$

eine Abschätzung, die etwas schwächer als das Hardysche Resultat (6) ist. Für k-dimensionale Kugeln erhielt Szegö (1926)

$$\text{(19)} \qquad P(x) = \Omega\left(x^{\frac{k-1}{4}} \log^{\frac{k-1}{4}} x\right);$$

hierin ist für den Kreis eine von Hardy (1916) gegebene, der Formel (6) gleichkommende Abschätzung enthalten. Die zu (18) und (19) führenden Methoden gehören im wesentlichen auch dem Kurzstreckengebiete an.

Bereits 1912 wendete Landau bei Untersuchung der vierdimensionalen Kugel einen neuartigen Gedanken an, welcher zu der späteren Langstreckenbehandlung des Ellipsoidproblems überleitete. Er benutzte hierbei den bekannten Jacobischen Satz über die Anzahl aller Darstellungen einer Zahl als Summe von vier Quadraten und erhielt so

$$P(x) = O(x^{1+\varepsilon}) \tag{20}$$

für jedes $\varepsilon > 0$. Wie Landau später (1924) mit Recht bemerkte, führt seine (20) ergebende Methode auch zum schärferen Ergebnis

$$P(x) = O(x \log x). \tag{21}$$

Sowohl (20) als auch (21) sind natürlich wesentlich besser als das durch (17) für $k=4$ gelieferte Restglied

$$O\left(x^{\frac{6}{5}}\right).$$

Die Verminderung des Restexponenten beträgt „fast" $\frac{1}{5}$. Durch Verknüpfung der Landauschen Methode mit Hilfsmitteln aus der Theorie der Diophantischen Approximationen (Weylscher Satz) habe ich (1927) die Abschätzung (21) noch um eine Kleinigkeit zu

$$P(x) = O\left(\frac{x \log x}{\log \log x}\right) \tag{22}$$

verbessert.

Seit 5 Jahren setzte eine sehr intensive Durchforschung des Ellipsoid-O-Problems ein, die sich vor allem die berühmte Hardy-Ramanujan-Littlewoodsche Methode der additiven Zahlentheorie zunutze machte. Diese Methode erreicht allerdings ihren Kulminationspunkt bei einem anderen zahlentheoretischen Problem, das von der Zerfällung der Zahlen in gleichartige Potenzen, zum Beispiel in Kuben oder Biquadrate, handelt, dem Waringschen Problem. Bei den Ellipsoiden kommt sie in einer primitiveren Art zur Durchführung.

Das Grundprinzip dieser Methode ist, ganz kurz gesagt, folgendes (bezüglich näherer Einzelheiten verweise ich auf das oben erwähnte Landausche Werk). Man hat eine im Einheitskreise konvergente Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \tag{23}$$

die diesen Kreis als natürliche Grenze besitzt, also über ihn hinaus nicht fortsetzbar ist, und es handelt sich darum, die Koeffizienten a_n mit wachsendem n zu untersuchen. Nach der Cauchyschen Integralformel ist

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, dz, \tag{24}$$

wobei der Integrationsweg—ein Kreis um den Nullpunkt mit dem Radius $r < 1$ — positiv zu durchlaufen ist. Hierin werde, etwa durch die Wahl

$$r = 1 - \frac{1}{n},$$

r so in Abhängigkeit von n gesetzt, $r = r_n$, dass mit wachsendem n

$$r_n \to 1.$$

Dadurch färbt der mit Singularitäten von $f(z)$ vollgespickte Einheitskreis immer mehr auf den Integrationsweg von (24) ab. Dieser Integrationsweg $|z| = r_n$ wird nun mit Hilfe sogenannter Fareybrüche—ein den Diophantischen Approximationen entstammendes Prinzip — kunstvoll in Bögen zerlegt. Auf jedem solchen Fareybogen hinterlässt eine geeignete Singularität von $f(z)$ auf dem Einheitskreise einen „Fingerabdruck", wobei natürlich nicht jede Funktion $f(z)$ so freundlich ist, sich auf diese Weise bemerkbar zu machen. Diese Abdrücke ergeben in ihrer Gesamtheit einen approximativen Ausdruck für a_n — die singuläre Reihe, wie Hardy und Littlewood sie nennen, weil sie so viele merkwürdige Eigenschaften besitzt.

Beim Ellipsoidproblem ist die erzeugende Funktion $f(z)$ eine spezialisierte k-fache Thetareihe

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{n_k=-\infty}^{\infty} z^{Q(n_1, n_2, \ldots, n_k)}, \tag{25}$$

wobei Q durch (14) gegeben wird. Damit sich aber eine solche Reihe als Potenzreihe schreiben lässt, ist es notwendig, dass die Form Q ganzzahlige Koeffizienten besitzt, oder dass zum mindesten ihre Koeffizienten rationale Vielfache einer und derselben reellen Zahl sind — wir wollen solche Formen und die ihnen entsprechenden Ellipsoide r a t i o n a l nennen.[1])

[1]) Dass für Formen mit ganzzahligen Koeffizienten-ganzzahlige Formen-der Ausdruck (25) in eine Potenzreihe (23) übergeführt werden kann, liegt auf her Hand; man hat nur zu jedem $n \geqq 0$ diejenigen Glieder zu sammeln, welche

$$Q(n_1, n_2, \ldots, n_k) = n$$

ergeben. Und im allgemeinen Falle der rationalen Q setze man

$$Q = c\, Q',$$

Beim Sammeln der „Fingerabdrücke" werden dann primitive Transformationseigenschaften der Thetareihen benutzt.

Auf diese Weise leitete Hardy (1918—1920) eine Näherungsformel für die Lösungszahl $r_k(n)$ von

$$n_1^2+n_2^2+\ldots+n_k^2=n \qquad (k\geqq 5)$$

ab; hierbei stellte es sich heraus—was sehr schwer zu beweisen war—dass für $5\leqq k\leqq 8$ die singuläre Reihe $\mathfrak{S}_k(n)$ jene Lösungszahl $r_k(n)$ genau darstellt

$$r_k(n)=\mathfrak{S}_k(n) \qquad (5\leqq k\leqq 8), \tag{26}$$

während allgemein für $k\geqq 5$

$$r_k(n)-\mathfrak{S}_k(n)=O\left(n^{\frac{k}{4}}\right) \tag{27}$$

ist.

Wie ich später (1924) nachwies, folgt aus (26) und (27) sehr rasch

$$P(x)=O\left(x^{\frac{k}{2}-1}\right) \tag{28}$$

für $k\geqq 5$-dimensionale Kugeln. Auch ergab die Verallgemeinerung von (27) auf $k\geqq 5$-dimensionale ganzzahlige Q keine Schwierigkeit, lieferte aber (28) nur für $k\geqq 8$-dimensionale rationale Ellipsoide.

Landau zeigte (1924), wie man durch eine Modifikation der Hardyschen Methode (26) entbehren kann und erhielt so (28) für $k\geqq 5$-dimensionale rationale Ellipsoide. Zugleich erhielt Landau für vierdimensionale rationale Q

$$P(x)=Q(x\log^2 x), \tag{29}$$

wo die Form Q' rationale Koeffizienten besitzt. Ist dann N der Hauptnenner dieser Koeffiizenten, also

$$Q'=\frac{1}{N}Q'',$$

Q'' ganzzahlig, so folgt

$$Q=\frac{c}{N}Q'',$$

und die Reihe (25) ist dann eine Potenzreihe in

$$z'=z^{\frac{c}{N}}.$$

Uebrigens lässt sich eine solche Zurückführung rationaler auf ganzzahlige Q bereits aus der Definition von $A^Q(x)$ und der Formel (16) für das Ellipsoidvolumen leicht ablesen.

eine Abschätzung, die durch H. D. Kloosterman (1925—1927) zu

$$P(x)=O(x\log x) \tag{29a}$$

verschärft worden ist [1]).

Ebenfalls für rationale k-dimensionale Ellipsoide wies Jarnik (1925, veröffentlicht in einer Landauschen Abhandlung) elementar

$$P(x)=\Omega\left(x^{\frac{k}{2}-1}\right) \tag{30}$$

nach. Diese — auch für $k=2$ und $k=3$ gültige, aber dann nicht neue — Abschätzung gab dann den Auftakt zu zahlreichen Ω-Untersuchungen (Landau, Müntz, Petersson, Jarník, Walfisz), auf die ich aber nicht näher eingehen kann.

Verweilen wir einen Augenblick bei dem Formelpaar (28) — (30) so fällt uns sofort auf, dass beidemal rechts dieselbe Vergleichsfunktion $x^{\frac{k}{2}-1}$ auftritt. Die beiden Symbole O und Ω sind eine harmonische Ehe miteinander eingegangen — ein in der Zahlentheorie ganz seltenes Ereignis — und als Frucht dieser Ehe ist die vollständige Lösung des $O-\Omega$-Problems für $k\geqq 5$-dimensionale rationale Ellipsoide hervorgegangen. Dies kam umso überraschender, als im zweidimensionalen Falle eine vollständige Anpassung der zur Zeit besten Abschätzungen (6) und (13), wie ich mit allem Nachdruck hinwies, aussichtslos erscheint.

Bei vierdimensionalen rationalen Ellipsoiden besteht zwischen den Abschätzungen (20), (21) und (22) einerseits und (30) mit $k=4$

$$P(x)=\Omega(x) \tag{30a}$$

andererseits noch eine Lücke, die aber nicht mehr den Restexponenten von x beeinflusst, sondern sich nur noch im „Logarithmischen" bewegt. (30a) lässt sich bei der vierdimensionalen Kugel, wie ich (1927), eben-

[1]) In einer noch nicht publizierten Arbeit zeige ich, dass (22) auch für beliebige vierdimensionale rationale Ellipsoide zutrifft. An Stelle der Jacobischen Formel treten komplizierte Heckesche Sätze aus der Theorie elliptischer Modulformen; ausser dem Weylschen Satze erweist sich ferner die Anwendung einer Landauschen Kurzstrekkenmethode als notwendig. Auf die sehr interessanten Untersuchungen von Hecke, und in seinem Gefolge von Kloosterman und Estermann, kann ich hier lediglich hinweisen, um mich nicht allzusehr von meinem Hauptziele zu entfernen. Ferner darf ich nicht unerwähnt lassen, dass H. Petersson (1926) durch eine Potenzierung der Hardyschen Methode zu sehr bemerkenswerten Ellipsoidsätzen gelangt ist.

falls mit Hilfe des Jacobischen Satzes, zeigen konnte, noch um ein Weniges zu

$$P(x) = \Omega(x \log \log x) \tag{31}$$

verbessern. Aus (31) folgt, dass im Vierdimensionalen die Abschätzung (28) nicht mehr zuzutreffen braucht (dies sieht man genau ebenso ein, wie vordem die Unmöglichkeit von (9a) auf Grund von (6)). Damit ist zunächst gezeigt, dass die vierdimensionalen rationalen Ellipsoide ein von den höherdimensionalen abweichendes Verhalten zeigen. Das kommt auch analytisch dadurch zum Ausdruck, dass die singuläre Reihe im letzteren Fall ($k \geqq 5$) absolut konvergiert, im ersteren ($k = 4$) aber nicht. Die vierdimensionalen Probleme sind mit additiven Methoden gerade noch angreifbar — während man bei zwei- und dreidimensionalen nichts mehr mit diesen Methoden ausrichten kann — sie bereiten aber demgemäss viele Schwierigkeiten, die eine vollständige Lösung des $O - \Omega$-Problems für die nähere Zukunft unwahrscheinlich machen [1]).

War nun das O-Ω-Problem für rationale Ellipsoide vollständig ($k \geqq 5$) beziehungsweise „fast" vollständig ($k = 4$) erledigt, so entstand die weitere Frage: Wie verhalten sich die irrationalen Ellipsoide? Damit meine ich Ellipsoide, deren Q sich nicht mehr in die Form

$$Q = c\,Q', \; Q' \text{ rational}$$

setzen lässt, also, wie wir sagen wollen irrational ist. Hier bestand zwischen den Landauschen Abschätzungen (17) und (18) noch ein weiter Spielraum. Die letzte Abschätzung schien übrigens wegen (30) noch sehr verbesserungsfähig zu sein—obwohl man an ihre Güte im Zweidimensionalen glaubte—während die Verminderung des Restexponenten von (17) zu (28) nicht mehr so bedeutend war.

Bei irrationalen Ellipsoiden versagte die oben skizzierte Methode, weil die erzeugende Funktion (25) keine Potenzreihe mehr ist (ich komme darauf noch später zurück). Man kann sich das bildlich gleichsam so vorstellen, dass durch die Einführung des Irrationalen die „Fingerabdrücke" bis zur Unkenntlichkeit zerfliessen und die ganze singuläre Reihe in der Versenkung verschwindet.

1) Ich vermute, dass die Abtchätzung (31) definitiv ist, dass also auch

$$P(x) = Q(x \log \log x)$$

ist. Dieser Formel würde in der Theorie der Riemannschen Zetafunktion die Abschätzung

$$\zeta(1 + ti) = O(\log \log t)$$

entsprechen, welche man aber bisher nur mit Hilfe einer unbestätigten Hypotheseder berühmten Riemannschen Vermutung-begründen konnte.

Folgender Gedankengang sucht diese Schwierigkeit zu umgehen, löst sie aber nicht.

Es werde die Form (14) wie folgt spezialisiert:

$$Q(u_1, u_2, \ldots, u_k) = \alpha\, u_1^2 + Q_1(u_2, u_3, \ldots, u_k), \tag{32}$$

wobei $\alpha > 0$ irrational und Q_1 eine ganzzahlige Form ist (oder, was auf dasselbe hinauskommt, rationale Koeffizienten besitzt). Auf diese Form Q_1 lässt sich dann die Hardysche Methode anwenden, und man hat nur nötig, die betreffende singuläre Reihe, allerdings so behutsam wie ein Wickelkind, in die k-te Dimension „hineinzusummieren". Dies habe ich (1927) mit Hilfe einiger Weylscher Gleichverteilungssätze aus der Theorie Diophantischer Approximationen ausgeführt und erhielt so für die irrationale Form Q der Gestalt (32) und $k \geqq 10$

$$P(x) = o\left(x^{\frac{k}{2}-1}\right). \tag{33}$$

Hier tritt das dritte der bekannten Abschätzungssymbole, das Landausche o-Zeichen auf, welches im vorliegenden Falle besagt, dass

$$\lim_{x=\infty} \frac{P(x)}{x^{\frac{k}{2}-1}} = 0$$

ist. Von den beiden Zeichen o und Ω ist also jedes die Negation des anderen. (33) ist mithin mit (30) unverträglich, woraus folgt, dass die irrationalen Ellipsoide—wenigstens in gewissen Fällen—ein von den rationalen abweichenders Verhalten zeigen.

Dass sich die Abschätzung (33) nicht verschärfen lässt, sobald in (32) alle irrationalen $\alpha > 0$ zur Konkurrenz zugelassen werden, lässt sich ohne besondere Schwierigkeiten zeigen. Es entsteht aber die Frage, ob man für gewisse irrationale α den Restexponenten in (33) herunterdrücken oder diese Abschätzung sonst irgendwie verbessern kann. In dieser Richtung zeigte ich, dass für fast alle $\alpha > 0$ und $k \geqq 10$

$$P(x) = O\left(x^{\frac{k}{2}-\frac{6}{5}} \log^{\frac{1}{4}} x\right) \tag{34}$$

ist. Als fast alle $\alpha > 0$ seien hierbei alle $\alpha > 0$, höchstens unter Ausschluss einer Menge vom Lebesgueschen Masse Null, einer Nullmenge, bezeichnet. Beim Beweise von (34) wurde, neben einer asymptotischen

Thetatransformationsformel von Hardy und Littlewood, an einer der entscheidenden Stellen eine van der Corputsche Kurzstreckenmethode benutzt, von der Art, wie sie zu (4) führen. An der Mangelhaftigkeit von (34) war also nicht zu zweifeln. Immerhin war doch ein erster Schritt getan.

Boten nun zwar die Abschätzungen (33) und (34) eine gewisse Einsicht in die Gittertheorie irrationaler Ellipsoide, so war doch von vornherein klar, dass der zu ihnen führende Gedankengang nur ein Auskunftsmittel faute de mieux bildete. Es hiess also, die singuläre Reihe über Bord zu werfen und etwas ganz Neues zu erfinden. Ich glaubte, dass es damit noch seine Weile haben dürfte; umso überraschender kamen mir daher—und wohl nicht mir allein—die Entdeckungen Jarníks. In einer Reihe von Abhandlungen [1]), deren Publikation um die Mitte des vorigen Jahres begann und die an Originalität, Gedankentiefe und technischer Durchführung zu den bedeutendsten Leistungen moderner Forschung zählen, griff Jarník das Problem mit sehr kräftigen Hilfsmitteln an und erhielt eine Reihe überraschend präziser Ergebnisse.

Auch Jarník betrachtet nicht die allgemeinste Form (14), sondern er verlangt, dass in Q nur quadratische Glieder auftreten:

$$Q(u_1, u_2, \dots, u_k) = \alpha_1 u_1^2 + \alpha_2 u_2^2 + \dots + \alpha_k u_k^2; \tag{35}$$

hierbei müssen alle Koeffizienten positiv sein, damit die Form positiv definit ausfällt, sonst werden ihnen aber keinerlei Beschränkungen auferlegt. Sie sehen, dass hier gegenüber (32) ein bedeutender Fortschritt erzielt ist, indem keine rationalen Kerne vom Typus Q_1 vorausgesetzt werden und soviel „freie" Koeffizienten zum Wettbewerb antreten, wie die Dimension von Q beträgt. Bei einigen Untersuchungen erscheint es allerdings als zweckmässig, diese Koeffizienten durch Abhängigkeiten aneinander zu binden-dadurch werden sehr interessante Einblicke in das stufenweise Eingreifen des Irrationalen gewährt. Die singuläre Reihe ist

[1]) **1.** „Ueber Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden", Mathematische Annalen 100 (1928), S. 699—721; **2.** „Ueber Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden. Zweite Abhandlung.", Mathematische Annalen 101 (1929), S. 136—146; **3.** „O mřížových bodech ve vícerozměrných elipsoidech", Rozpravy 2. třídy české akademie **37** (1928), Nr. 27, S. 1—19; **4.** „Sur les points à coordonnées entières dans les ellipsoides à plusieurs dimensions", Bulletin international de l'Académie des Sciences de Bohême, 1928, S. 1—10; **5.** „Ueber Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden", The Tôhoku Mathematical Journal 30 (1929), S. 354—371. Diese Arbeiten werden kurz mit **1—5** zitiert.

jetzt tot, sie erscheint aber als Geist und fordert, dass man $k \geqq 4$ wähle, wobei der gerade noch angreifbare Fall $k = 4$ auch hier besonders unangenehm wird.

Die erzeugende Funktion (25) sieht jetzt, nachdem man $z = e^{-s}$ setzt, für Q den Ausdruck (35) einführt und die Funktion selbst mit $\Theta_Q(s)$ bezeichnet, so aus:

$$\Theta_Q(s) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{n_k=-\infty}^{\infty} e^{-(\alpha_1 n_1^2 + \alpha_2 n_2^2 + \dots + \alpha_k n_k^2)s}. \tag{36}$$

Diese Reihe konvergiert für $|z| < 1$, das heisst $\mathfrak{R}(s) > 0$, absolut; hierbei bezeichnen wir mit $\mathfrak{R}(s)$ den Realteil u der komplexen Zahl $s = u + it$. Es seien nun

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots \tag{37}$$

alle Werte, welche die Form (36) bei ganzzahligen Veränderlichen annimmt, wachsend geordnet (also $\lambda_1 = 0$, $\lambda_n \to \infty$). Sammelt man dann alle diejenigen Glieder von (36), die zu demselben λ_n gehören, so erhält man für $\Theta_Q(s)$ eine Darstellung als einfache, für $u > 0$ absolut konvergente Reihe

$$\Theta_Q(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}. \tag{36a}$$

Die Reihen vom Typus (36a)—sie werden Dirichletsche genannt—sind seit Jahrzehnten Gegenstand eingehender Untersuchungen gewesen. Ein grundlegender Perronscher Satz ihrer Theorie erlaubt es, aus (36a) den Schluss zu ziehen, dass für jedes feste $u > 0$ und jedes x, das der Folge (37) nicht angehört,

$$A_Q(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{u-i\infty}^{u+i\infty} \Theta_Q(s) \frac{e^{xs}}{s}\, ds \tag{38}$$

ist. Hierin wird über die senkrechte unendliche Gerade $\mathfrak{R}(s) = u, -\infty < t < \infty$ von unten nach oben integriert. (38) vertritt jetzt die Stelle von (24), der Einheitskreis $|z| \leqq 1$ geht in die Halbebene $u \geqq 0$ über, seine Begrenzung $|z| = 1$ in die imaginäre Achse $u = 0$. Ueber diese Achse ist die Funktion $\Theta_Q(s)$ nicht fortsetzbar. Um die Singularitäten auf den Integrationsweg von (38) ausstrahlen zu lassen (sie hinterlassen keine „Abdrücke" mehr, wirken aber dennoch), muss man diesen Weg—diesmal in Abhängigkeit von x—in die Nähe der imaginären Achse verlegen. Demgemäss setzt Jarník $u = \frac{1}{x}$ und erhält so

$$(38a) \qquad A_Q(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{x} - i\infty}^{\frac{1}{x} + i\infty} \Theta_Q(s) \frac{e^{xs}}{s} ds.$$

(38a) gilt, wie gesagt, für solche x, die mit keinem der Werte (37) zusammenfallen. Wie Jarník zeigt, darf man sich sogar auf solche x beschränken, deren Entfernung von jedem λ_n nicht zu klein—nämlich mindestens $x^{-\frac{k}{2}}$—ist. Für jene x ergeben die drei Teilintegrale von (38a) mit

$$t \geqq x^k, \; -\frac{A}{\sqrt{x}} \leqq t \leqq \frac{A}{\sqrt{x}}, \; t \leqq -x^k,$$

wobei A eine geeignete, von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ abhängige positive Konstante ist, zusammengenommen das Ellipsoidvolumen (16)—welches nach links gebracht $A(x)$ in $P(x)$ verwandelt—nebst einem Restglied von der Grössenordnung $O\left(x^{\frac{k}{4}}\right)$ (für spätere Zwecke sei hier vermerkt, dass $J_Q(x)$ dem mittleren endlichen Stück entspringt). Von den beiden verbleibenden Integralen mit

$$(38b) \qquad \frac{A}{\sqrt{x}} \leqq t \leqq x^k, \; -x^k \leqq t \leqq -\frac{A}{\sqrt{x}}$$

genügt es aus Symmetriegründen, das erste

$$(39) \qquad P^*(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{x} + i\frac{A}{\sqrt{x}}}^{\frac{1}{x} + ix^k} \Theta_Q(s) \frac{e^{xs}}{s} ds$$

zu betrachten. Diese Zurückführung des Problems auf das Studium von $P^*(x)$ ist nicht besonders kompliziert und funktioniert auch noch für jedes beliebige Q der Gestalt (14). Erst bei der Betrachtung des Integrals (39) beginnen die eigentlichen Schwierigkeiten.

Beachtet man, dass sich in (36) die k Summationen trennen lassen und demzufolge

$$(40) \qquad \Theta_Q(s) = \Theta(\alpha_1 s)\,\Theta(\alpha_2 s) \ldots \Theta(\alpha_k s) \text{ mit } \Theta(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2 s}$$

ist, so liefert eine einfache, von (39) ausgehende Schlussweise die Ungleichung

$$(41) \qquad |P^*(x)| \leqq \sum_{m=1}^{k} \int_{\frac{A}{\sqrt{x}}}^{x^k} \left| \frac{\Theta^k(\alpha_m s)}{s} \right| dt.$$

Jedes der rechts in (41) auftretenden Integrale enthält nur einen Koeffizienten α, entspricht also gleichsam einer k-dimensionalen Kugel, da der Funktion

$$\Theta^k(\alpha s)$$

nach Definition (40) die Kugelform

$$Q = \alpha(u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_k^2)$$

zugeordnet ist. Daran liegt es, dass man diese Integrale nach ähnlichen Gesichtspunkten behandeln kann, wie sie bei rationalen Ellipsoiden massgebend waren. Jede der k Integrationsstrecken wird auf geeignete Weise unter Verwendung von Fareybrüchen in Teilstrecken—Fareystrecken—eingeteilt und auf jeder solchen Teilstrecke wird der Integrand unter Verwendung der Transformationseigenschaften von $\Theta(s)$ abgeschätzt; allerdings kommt man hier nicht mehr mit primitiven Transformationen aus, wie beim Beweise von (28), was vor allem auf der mit x ins Unendliche wachsenden Länge des Integrationsweges liegt. Die singuläre Reihe tritt nicht auf—dafür sorgen sowohl die Beschneidung des unendlichen Integrationsweges in (38), wie auch die Absolutstriche im Integranden.

Auf diese Weise gewinnt Jarník (1) für die Formen (35) die beiden folgenden Abschätzungen

$$(42) \qquad P(x) = O\left(x^{\frac{k}{2}-1} \log x\right) \qquad (k \geqq 5),$$

$$(43) \qquad P(x) = O(x \log^2 x) \qquad (k = 4).$$

(43) entspricht genau der Abschätzung (29), während (42) um den log-Faktor schwächer als (28) ist. Da auch der Fall rationaler Q der

Gestalt (35) zugelassen ist, so sieht man auf Grund von (30) und (30a), dass die mitgeteilten Jarníkschen Ergebnisse nicht sehr verbesserungsfähig, sogar „fast" genau sind.

In der Folge gelingt es Jarník (**3**—**4**), den log-Faktor in (42) zu streichen und demgemäss

$$\text{(44)} \qquad P(x) = O\left(x^{\frac{k}{2}-1}\right) \qquad (k \geqq 5)$$

zu beweisen. (44) entspricht genau der Abschätzung (28) und ist wegen (30) unverbesserlich. Der Fortschritt gegenüber (42) wird durch eine Abänderung des Ansatzes (38) erreicht.

Schon in der Kurzstreckentheorie ist man auf den Gedanken gekommen, nicht die Gitterpunktfunktion $G(x)$ direkt, sondern ihr Integral

$$\int_0^x G(v)\, dv$$

zu betrachten; ein einfacher, von Pfeiffer zuerst angewandter Kunstgriff, erlaubt es dann, auf $G(x)$ selbst zurückzukommen. Im vorliegenden Falle kann man, auf Grund von (36a) und einer Verallgemeinerung der Perronschen Formel, dieses Integral in die Form

$$\text{(45)} \qquad \int_0^x A_Q(v)\, dv = \frac{1}{2\pi i} \int_{u-i\infty}^{u+i\infty} \Theta_Q(s) \frac{e^{xs}}{s^2}\, ds$$

bringen. Diese Darstellung gilt für alle $x > 0$ und ist, im Gegensatz zu (38), absolut konvergent und daher rechnerisch leichter zu handhaben.

Auf Grund von (45) verläuft jetzt der Beweis von (44) analog, wie vordem der von (42). Auch in (45) erweisen sich die beiden Teilintegrale mit (38b) ale massgebend (wobei jetzt aber keine Einschränkung der x-Werte notwendig ist), und die α-Konstanten in (35) werden wiederum auf Grund von (40) und einer zu (41) analogen Ungleichung getrennt.

Die Abschätzungen (42)—(44) bilden eine sehr willkommene Ergänzung von (28) und (29), sie sprechen aber keine charakteristischen Eigenschaften irrationaler Ellipsoide aus, da, wie gesagt, der Fall rationaler Q zugelassen ist. Der nächste Schritt wird also sein, dass man die Formen Q als beliebig irrational voraussetzt. Da dieser Fall die Formen (32), mit entsprechend spezialisiertem Q_1 umfasst, so wird man

erwarten dürfen, dass hier die Abschätzung (33) gilt. Das hat in der Tat Jarník (**2**) für $k \geqq 6$ nachgewiesen.

Beim Beweise wird das Integral (45) mit $u = \frac{1}{x}$ zugrunde gelegt und auf die Behandlung eines Teilintegrals mit

$$t \geqq \frac{A}{\sqrt{x}}$$

zurückgeführt. Diesmal verlaufen aber die Betrachtungen etwas umständlicher, da ja eine vollständige Trennung der α nach dem Muster von (41) den Charakter der Irrationalitäten verwischen würde. Es erweist sich als notwendig, die Fareystrecken in zwei Klassen einzuteilen. Auf der einen wird das Thetaprodukt (40) analog wie auf dem Wege zu (41) mit

$$\text{(46)} \qquad |\Theta_Q(s)| \leqq \sum_{m=1}^{k} |\Theta^k(\alpha_m s)|$$

abgeschätzt, während auf der anderen diese Abschätzung auf $k-1$ Faktoren angewendet und der k-te separat behandelt wird, also zum Beispiel

$$\text{(46a)} \qquad |\Theta_Q(s)| \leqq |\Theta(\alpha_1 s)| \sum_{m=2}^{k} |\Theta^{k-1}(\alpha_m s)|.^{1)}$$

Die zur Gabelung (46), (46a) führende Klasseneinteilung entspringt einer sehr einfachen Idee Jarníks, die im Grunde genommen darauf zurückgeht, dass eine Bruchfolge $\frac{p_n}{q_n}$ ($p_n > 0$, $q_n > 0$; $n = 1, 2, 3, \ldots$) nur dann gegen eine positive Irrationalität (hier also eines der $k-1$ Koeffi-

[1]) Die hier rechts aufretenden Θ-Potenzen entsprechen $(k-1)$ — dimensionalen Kugeln; für $k=5$ wären dies vierdimensionale, und bei weiterer Fortsetzung der Rechnungen würde der letzten Endes auftauchende logarithmische Faktor alles verderben. Aber bereits die gerinfügige Modifikation von (46a) zu

$$|\Theta_Q(s)| \leqq |\Theta(\alpha_1 s)|^{\frac{1}{2}} \sum_{m=1}^{k} \left|\Theta^{k-\frac{1}{2}}(\alpha_m s)\right|,$$

worin rechts für $k=5$ „$4\frac{1}{2}$-dimensionale Kugeln" auftreten, gestattet es, auch für $k=5$ das Ziel (33) zu erreichen. Man kann ferner zeigen, dass (33) für $k=4$ nicht mehr zutrifft, was auf Grund von (31) plausibel erscheint. Vergleiche hierzu: V. Jarník und A. Walfisz „Ueber Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden"-erscheint demnächst in der Mathematishen Zeitschrift.

zientenverhältnisse $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \frac{\alpha_3}{\alpha_1}, \ldots, \frac{\alpha_k}{\alpha_1}\Big)$ konvergiert, wenn $p_n \to \infty$, $q_n \to \infty$. Durch sinngemässe Anwendung dieser Idee umgeht J a r n í k die Weylschen Hilfsmittel, welche zum Beweise von (33) für die Formen (32) herangezogen wurden.

Dass die Jarníksche Abschätzung (33) für die Formen (35) definitiv ist, sobald man a l l e Koeffizienten α mit irrationalem Q zulässt, kann man unschwer zeigen. Um also weitergehende Ergebnisse zu zeitigen, ist man—wie beim Beweise von (34)—genötigt, diese Koeffizienten einzuschränken. Dabei wird es wiederum zweckmässig sein, zunächst einmal nach „fast alle" — Sätzen zu suchen. In sinngemässer Verallgemeinerung der bei (34) auftretenden Definition, wollen wir jetzt sagen, dass f a s t a l l e Wertsysteme $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r)$ von r positiven Zahlen eine gewisse Eigenschaft besitzen, wenn diese Eigenschaft allen solchen Wertsystemen, bis auf eine Menge vom Lebesgueschen Masse Null im r-dimensionalen Raume der $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r)$ zukommt.

Um nun in dieser Richtung vorzugehen, schränkt J a r n í k (1) die Formen (35) weiter ein, indem er voraussetzt, dass die k Koeffizienten α_m in mindestens zwei Serien von je mindestens vier gleichen zerfallen. Die Form Q sieht also jetzt folgendermassen aus:

$$(47)\qquad Q(u_1, u_2, \ldots, u_k) = \beta_1 (u_{1,1}^2 + \ldots + u_{r_1,1}^2) + \beta_2 (u_{1,2}^2 + \ldots + u_{r_2,2}^2) + \ldots + \beta_\sigma (u_{1,\sigma}^2 + \ldots + u_{r_\sigma,\sigma}^2)$$

mit $\sigma \geqq 2$; $\beta_m > 0$, $r_m \geqq 4$ $(m = 1, 2, \ldots, \sigma)$; $r_1 + r_2 + \ldots + r_\sigma = k$ und ist mindestens achtdimensional.

Das Ziel lautet (1): bei den Formen (47) mit den obigen Nebenbedingungen ist

$$(48)\qquad P(x) = O\left(x^{\frac{k}{2} - \sigma + \varepsilon}\right)$$

für jedes feste $\varepsilon > 0$ und fast alle $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\sigma)$ erfüllt.

Der Beweis von (48) gibt an Schwierigkeit dem von (13) kaum nach, wenngleich er auf ganz anderen Prinzipien beruht und wesentlich kürzer ist. Ausgangspunkt ist wiederum (39). Eine Trennung der α-Koeffizienten in (35) ist nur auf Grund ihrer Zusammenfassung in β-Serien möglich, während die β zusammenhalten müssen. Um dies zu ermöglichen, beweist J a r n í k einen tiefliegenden Satz aus der metrischen Theorie Diophantischer Approximationon (wozu ihn wohl Untersuchungen des russischen Forschers Khintchine veranlasst haben mögen), den er zum Ausgangs-

punkt für eine äusserst komplizierte Klasseneinteilung der Fareystrecken nimmt.

Wie scharf (48) ist, sieht man sofort, wenn man annimmt, dass k durch 4 teilbar ist und $\sigma = \frac{k}{4}$ Serien von je vier gleichen β-Gliedern auftreten. Dann besagt (48)

$$(49)\qquad P(x) = O\left(x^{\frac{k}{4} + \varepsilon}\right).$$

Man kann aber, wie Jarník (1) nachweist, aus (48) in wenigen Zeilen auf ganz einfache Weise schliessen, dass (49) für *fast alle* Formen (35) mit $k \geqq 4$ erfüllt ist (für $k = 4$ wird allerdings (49) durch (43) überboten).

Der Fortschritt gegenüber (28) beträgt „fast" $\frac{k}{4} - 1$. Dass eine solche Verschärfung möglich wäre, hätte wohl niemand vorausgesehen. Die Abschätzung (49) weist schlagend nach, welch eine Ausnahmestellung die rationalen Ellipsoide—deren es ja nur abzählbar viele Typen gibt—einnehmen. Zugleich bildet sie eine glänzende Rehabilitierung der Landauschen Ω-Formel (18).

Es ist möglich, dass bereits die nächsten Jahre eine vollständige oder fast vollständige Lösung dieses $O - \Omega$-Problems bringen; andererseits ist es auch nicht ausgeschlossen, dass man nach dem grossartigen Rennen Jarníks an ein unüberwindliches Kurzstreckenfinish gelangt ist. Mit O stat Ω ist (18) wegen (19) sicherlich falsch. Indessen ist es denkbar, dass für fast alle Formen (35) und jedes feste $\varepsilon > 0$

$$P(x) = O\left(x^{\frac{k-1}{4} + \varepsilon}\right)$$

ist. Das wäre dann genau die Verallgemeinerung von (10).

Wohl konnte aber Jarník (1) zeigen, dass die Abschätzung (48) für die Formen (47) fast definitiv ist, indem für a l l e jene Formen

$$(50)\qquad P(x) = \Omega\left(x^{\frac{k}{2} - \sigma}\right),$$

für f a s t a l l e

$$(51)\qquad P(x) = \Omega\left(x^{\frac{k}{2} - \sigma} \log^{\frac{\sigma - 1}{\sigma + 1}} x\right)$$

ist. Der Beweis von (50) beruht auf ganz einfachen Gedankengängen, während der von (51) von einem, auch nicht sehr komplizierten, Khintchinschen Satze aus der metrischen Theorie Diophantischer Approximationen Gebrauch macht.

Ich erwähne noch, dass Jarník auch Formen (47) ohne die Nebenbedingung $r_m \geqq 4$, durch eine passende Abänderung seiner Methode, behandelt hat (**3—4**).

Es werde

$$\lambda_m = \frac{r_m}{4} \text{ für } r_m = 1 \text{ oder } 2 \text{ oder } 3;\ \lambda_m = 1 \text{ für } r_m \geqq 4;\ \lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_\sigma \tag{52}$$

gesetzt. Dann lautet die (48) entsprechende Abschätzung

$$P(x) = O\left(x^{\frac{k}{2} - \lambda + \varepsilon}\right). \tag{53}$$

Hierin ist (48) als Spezialfall enthalten. Dann falls stets $r_m \geqq 4$, ist nach (52) stets $\lambda_m = 1$, mithin $\lambda = \sigma$. Wählt man andererseits

$$\sigma = 2,\ r_1 = 1,\ r_2 = k - 1,\ k \geqq 5,$$

so folgt aus (52)

$$\lambda = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$$

und (53) liefert

$$P(x) = O\left(x^{\frac{k}{2} - \frac{5}{4} + \varepsilon}\right) \tag{54}$$

für Formen Q, die so aussehen:

$$Q(u_1, u_2, \ldots, u_k) = \beta_1 u_1^2 + \beta_2 (u_2^2 + \ldots + u_k^2),$$

das heisst, was auf dasselbe hinauskommt, für Formen

$$Q(u_1, u_2, \ldots, u_k) = \alpha u_1^2 + (u_2^2 + \ldots + u_k^2).$$

Dabei entsprechen fast allen Systemen (β_1, β_2) fast alle Werte von α. (54) ergibt also eine Verschärfung von (34), wen Q_1 eine Kugelform ist.

Der Spezialfall $\sigma = 2$ von (48) und (51) besagt: es sei

$$Q(u_1, u_2, \ldots, u_k) = \beta_1 (u_1^2 + \ldots + u_{r_1}^2) + \beta_2 (u_{r_1+1} + \ldots u_{r_1+r_2}^2), \tag{47a}$$

$$\beta_1 > 0,\ \beta_2 > 0,\ r_1 \geqq 4,\ r_2 \geqq 4,\ r_1 + r_2 = k;$$

dann ist für **fast alle** Systeme (β_1, β_2) und jedes feste $\varepsilon > 0$

$$P(x) = O\left(x^{\frac{k}{2} - 2 + \varepsilon}\right), \tag{48a}$$

$$P(x) = \Omega\left(x^{\frac{k}{2} - 2} \log^{\frac{1}{3}} x\right); \tag{51a}$$

andererseits ist nach (44) und (50) für die Formen (47a) bei **allen** (β_1, β_2)

$$P(x) = O\left(x^{\frac{k}{2} - 1}\right), \tag{44a}$$

$$P(x) = \Omega\left(x^{\frac{k}{2} - 2}\right). \tag{50a}$$

Man kann diese Ergebnisse unter folgendem Gesichtspunkt betrachten. Aus den Definitionen der O- und Ω-Symbole folgt, dass für festes Q das Abschätzungspaar

$$P(x) = O(x^u),\ P(x) = \Omega(x^v) \tag{55}$$

einerseits die Ungleichung $u \geqq v$, andererseits die Beziehungen

$$P(x) = O(x^{u'}),\ P(x) = \Omega(x^{v'})$$

für alle u', v' mit $u' > u$, $v' < v$ nach sich zieht. Hieraus ergibt sich, dass die Zahlen u und v, welche (55) genügen, einen Dedekindschen Schnitt bilden, der einer gewissen Zahl $\mu = \mu(Q)$ entspricht. Für dieses μ — wir nennen es den wahren Restexponenten — ist zugleich

$$P(x) = O(x^{\mu + \varepsilon}),\quad P(x) = \Omega(x^{\mu - \varepsilon}) \tag{56}$$

für jedes feste $\varepsilon > 0$ erfüllt. Bei den Formen (47a) ist nach (44a) und (55a) $\frac{k}{2} - 1$ eine Zahl der Klasse u, $\frac{k}{2} - 2$ eine Zahl der Klasse v. Der wahre Restexponent μ genügt daher der Ungleichung

$$\frac{k}{2} - 2 \leqq \mu \leqq \frac{k}{2} - 1. \tag{57}$$

Für fast alle Formen (47a) ist ferner nach (48a) und (51a)

$$\mu = \frac{k}{2} - 2. \tag{57a}$$

Es gelingt nun Jarník (5), die durch (48a) und (51a) ausgeschlossene Nullmenge der (β_1, β_2) in geeignete Klassen (Untermengen) mit Hilfe eines sehr einfachen Kriteriums einzuteilen und für jede dieser Klassen den wahren Restexponenten μ zu bestimmen, wobei jedes der Ungleichung (57) entsprechende μ auch tatsächlich vorkommen kann.

Das der Theorie Diophantischer Näherungen entsprungene Einteilungsprinzip ist folgendes: Es sei $\beta > 0$. Wir betrachten die Menge M_γ aller reellen Zahlen γ, für die es eine Folge von Paaren positiver ganzer Zahlen $p_1, q_1; p_2, q_2; p_3, q_3; \ldots$ mit

(58) $$p_n \to \infty,\ q_n \to \infty,\ \frac{p_n}{q_n} - \beta = O\left(\frac{1}{q_n^{2+\gamma}}\right)$$

gibt. Die obere Grenze von M_γ werde mit $\nu(\beta)$ bezeichnet und möge der wahre Exponent der Zahl β heissen.

Aus der Theorie Diophantischer Approximationen ist bekannt, dass für alle β die Zahl $\nu(\beta)$ nicht negativ ist, für fast alle β

$$\nu(\beta) = 0$$

ist. Allen positiven ν entspricht also eine Nullmenge der β. Für rationale β ist, wie leicht zu sehen,

(59) $$\nu(\beta) = \infty;$$

denn für $\beta = \frac{p}{q}$ ist (58) mit $p_n = np$, $q_n = nq$ für jedes $\gamma > 0$ erfüllt; umgekehrt braucht freilich eine Zahl β mit (59) nicht rational zu sein. Ferner ist nach (58) klar, dass

(60) $$\nu(\beta) = \nu\left(\frac{1}{\beta}\right)$$

ist. Für jedes γ, das (58) erfüllt, ist nämlich zugleich $\frac{1}{\beta}\frac{q_n}{p_n}$ beschränkt, also

$$\frac{1}{\beta} - \frac{q_n}{p_n} = \frac{1}{\beta}\frac{q_n}{p_n}\left(\frac{p_n}{q_n} - \beta\right) = O\left(\frac{1}{q_n^{2+\gamma}}\right).$$

Es sei nun Q eine Form (47a), $\beta = \frac{\beta_2}{\beta_1}$. Dann gilt nach Jarník für den durch (56) definierten wahren Restexponenten

(61) $$\mu = \frac{k}{2} - 1 - \frac{1}{\nu+1}\ (\nu < \infty),$$

(62) $$\mu = \frac{k}{2} - 1\ (\nu = \infty).$$

Auf dasselbe Resultat kommt man wegen (60) mit der Wahl $\beta = \frac{\beta_1}{\beta_2}$, die Unsymmetrie ist also nur eine scheinbare. Für $\nu = 0$ fällt (61) mit (57a) zusammen, für rationale Q steckt (62) wegen (59) in (28) und (30). In allen anderen Fällen sind die Abschätzungen (61) und (62) neu. Dass tatsächlich jeder Wert von μ im Intervall (57) vorkommen kann, ist auf Grund der Definition von ν wohlbekannt.

Beim Beweise von (61) und (62) geht Jarník vom Ansatz (45) aus, wobei sich auch diesmal das Teilintegral mit

$$t \geqq \frac{A}{\sqrt{x}}$$

als wesentlich erweist. Zur Behandlung des letzteren verwendet Jarník einen Satz aus der Theorie Diophantischer Approximationen, der dem bei (48) benutzten ähnlich ist, aber hier leichter zu beweisen geht (hauptsächlich darum, weil man es mit der eindimensionalen Menge der β zu tun hat, während der Fall $\sigma > 2$ auf mehrdimensionale analoge Mengen führt). Die diesem Satz entsprechende Klasseneinteilung der Fareystrecken ist allerdings ebenso kompliziert, wie die bei (48) angewandte, von der sie sich nur in unwesentlichen Einzelheiten unterscheidet.

Im Gegensatz zur Kurzstreckenforschung, die zu einem gewissen Stillstand gekommen ist (wenn auch ausser den O- und Ω-Problemen diverse andere Fragestellungen mit Erfolg behandelt werden), sind die Ellipsoiduntersuchungen, wie gerade die jüngsten Ergebnisse überzeugend dartun, in regem Fluss begriffen und es steht zu hoffen, dass noch manches interessante Resultat in den nächsten Jahren auftaucht. Allerdings wird sich auch hier mit der Zeit eine gewisse Versteifung geltend machen, sobald der „Rahm abgeschöpft" ist. Vorläufig aber liegt vor jedem, der an dieses Gebiet unbefangen herantritt, ein lohnendes Betätigungsfeld offen.
