EDMUND LANDAU.

Über einen Mordellschen Satz.

(O pewnem twierdzeniu Mordella.)

Einleitung.

Diese Arbeit ist angeregt durch Herrn Mordells Abhandlung *The magnitude of the derivative of a function* [1]).

Herr Mordell stellt in ihr die beiden im folgenden mit 1 und 2 bezeichneten Sätze auf und beweist sie.

In § 1 werde ich zu Satz 1

erstens zeigen, dass er ein Spezialfall eines von mir vor 15 Jahren in einer von Herrn Mordell zitierten Arbeit [2]) aufgestellten Satzes ist, den ich dort genau so bewiesen habe;

zweitens zeigen, dass die in jenem Satz 1 vorkommende Konstante 2 durch keine kleinere absolute Konstante ersetzt werden kann.

Satz 2 war mir neu. Ich werde in § 2 zeigen:

erstens, dass die in diesem Mordellschen Satz für jede Konstante $k > 2$ bewiesene Ungleichung auch für $k = 2$ gilt;

zweitens, dass sie für kein $k < 2$ gilt.

§ 3 beschäftigt sich mit einem Hardy-Littlewoodschen Satz (Satz 12 nachher). Herr Mordell glaubt einen Beweis gefunden zu haben, der einfacher (also anders) verläuft als ein früher von mir [3]) gegebener Beweis. Eine genauere Betrachtung zeigt indessen, dass beide Beweise im wesentlichen identisch sind [4]). Ich werde zeigen, dass Satz

[1]) The Journal of the London Mathematical Society, Bd. III (1928), S. 119—121.

[2]) *Einige Ungleichungen für zweimal differentiierbare Funktionen* [Proceedings of the London Mathematical Society, Ser. II, Bd. XIII (1914), S. 43—49], S. 44, Fussnote *.

[3]) *Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie* (Berlin, 1916), S. 54—55.

[4]) Abgesehen von rein formalen Änderungen (Ersetzung von $1-x$ durch x im Wortlaut und Beweis, Zusammendrängung der Abschätzungen von $f'(x)$ nach oben und unten in eine Formel mit $\pm$) besteht nämlich der einzige Unterschied darin, dass ich für meinen ungeübten Leser erst das eine und dann das andere Glied der grundlegenden Identität klein gemacht habe. Natürlich kann man das auch gleichzeitig machen; das tut Herr Mordell.

12 unmittelbar aus einem alten Satz von mir (Satz 3) gefolgert werden kann; man braucht gar nicht den Taylorschen Satz heranzuziehen, wenn man einmal im Rahmen der Betrachtungen ist, die den Gegenstand der Mordellschen Arbeit ausmachen.

Ich setze keine Vorkenntnisse aus der neueren Literatur (Hardy—Littlewood — Landau — Mordell) voraus und schreibe breiter als gewohnt; ist doch der Zusammenhang all dieser Tatsachen einem so ausgezeichneten Forscher wie Herrn Mordell entgangen.

Alle Zahlen in dieser Arbeit sind reell. „Zuletzt" bedeutet: für alle hinreichend grossen x; „immer wieder" bedeutet: bei jedem gegeben ω für ein $x(\omega) > \omega$. Wo in einem abgeschlossenen Intervall oder auf einer abgeschlossenen Halbgeraden von Stetigkeit, erster und zweiter Ableitung die Rede ist, beziehen sich diese Ausdrücke an den Endpunkten auf die Richtung nach innen. „Steigen" bezw. „fallen" bedeutet, dass der grösseren Variabeln ein grösserer bezw. kleinerer Funktionswert entspricht.

Satz 1: *$f(x)$ sei für $x > 0$ zweimal differentiierbar. $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ mögen zuletzt fallen. Es sei zuletzt*

$$|f(x)| < \varphi(x), \quad |f''(x)| < \psi(x). \tag{1}$$

Dann ist zuletzt

$$|f'(x)| < 2\sqrt{\varphi(x)\,\psi(x)}. \tag{2}$$

Satz 2:[5] *$f(x)$ sei für $x > 0$ zweimal differentiierbar. $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ mögen zuletzt steigen. Es gelte (1) zuletzt. Dann ist zuletzt*

$$|f'(x)| < (2+\varepsilon)\sqrt{\varphi(x)\,\psi(x)}, \quad \varepsilon = \varepsilon(x) \to 0.$$

Mit anderen Worten: Bei jeder Konstanten $k > 2$ ist zuletzt

$$|f'(x)| < k\sqrt{\varphi(x)\,\psi(x)}.$$

Oder auch

$$\limsup_{x=\infty} \frac{|f'(x)|}{\sqrt{\varphi(x)\,\psi(x)}} \leqq 2.$$

[5]) Übrigens sind die drei hierin enthaltenen Sätze, die Herr Mordell auf S. 119 zitiert und den Herren Hardy und Littlewood zuschreibt, von diesen nicht in vollem Umfange bewiesen worden, indem sie über $f''(x)$ mehr als Existenz und (1) voraussetzen.

§ 1.

Satz 1.

Satz 3:[6]) *Es sei $a > 0$, $b > 0$, $l \geqq 2\sqrt{\frac{a}{b}}$ und für $\xi \leqq x \leqq \xi + l$*

$$|f(x)| \leqq a, \quad f''(x) \leqq b. \tag{3}$$

Dann ist

$$f'(\xi) \geqq -2\sqrt{ab}.$$

Vorbemerkung: Anwendung auf $f(2\xi - x)$ ergibt: Es sei $a > 0$ $b > 0$, $l \geqq 2\sqrt{\frac{a}{b}}$ und (3) für $\xi - l \leqq x \leqq \xi$ giltig. Dann ist

$$f'(\xi) \leqq 2\sqrt{ab}.$$

Beweis: Nach dem Taylorschen Satz mit Restglied zweiter Ordnung (den ich heute nur dies eine Mal anwende) ist, $h = 2\sqrt{\frac{a}{b}}$ gesetzt,

$$f(\xi+h) - f(\xi) = hf'(\xi) + \frac{h^2}{2} f''(\xi + \vartheta h) \quad (0 < \vartheta < 1),$$

$$f'(\xi) = \frac{f(\xi+h) - f(\xi)}{h} - \frac{h}{2} f''(\xi + \vartheta h) \geqq -\frac{2a}{h} - \frac{h}{2} b = -2\sqrt{ab}.$$

Satz 4:[7]) *Es sei $a > 0$, $b > 0$, $l \geqq 2\sqrt{\frac{a}{b}}$ und für $\xi \leqq x \leqq \xi + l$*

$$|f(x)| \leqq a, \quad |f''(x)| \leqq b. \tag{4}$$

Dann ist

$$|f'(\xi)| \leqq 2\sqrt{ab}, \quad |f'(\xi + l)| \leqq 2\sqrt{ab}. \tag{5}$$

Vorbemerkung: Werden in der Voraussetzung (4) die Gleichheitszeichen gestrichen, so gelten die Behauptungen (5) ohne Gleichheitszeichen. Denn es ist alsdann

$$|f(x)| \leqq \operatorname*{Max}_{\xi \leqq x \leqq \xi + l} |f(x)| = a_1 < a,$$

[6]) Satz 3 und 4 mit obigen Beweisen reproduziere ich aus meiner oben erwähnten Arbeit und meiner weiteren, auch von Herrn Mordell zitierten *Die Ungleichungen für zweimal differentiierbare Funktionen* [Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab, Matematisk-fysiske Meddelelser, Bd. VI (1924—1925), Nr. 10]. Satz 4, 1 und 5 sind triviale Korollare aus Satz 3.

[7]) Das ist der Satz, auf den ich in der Einleitung (vergl. Fussnote 2) anspielte

also nach Satz 4

$$|f'(\xi)| \leqq 2\sqrt{a_1 b} < 2\sqrt{a\,b}, \quad |f'(\xi+l)| \leqq 2\sqrt{a_1 b} < 2\sqrt{a\,b}.$$

Beweis: Nach Satz 3 nebst Vorbemerkung ist

$$f'(\xi) \geqq -2\sqrt{a\,b}, \quad f'(\xi+l) \leqq 2\sqrt{a\,b}.$$

Anwendung auf $-f(x)$ ergibt

$$-f'(\xi) \geqq -2\sqrt{a\,b}, \quad -f'(\xi+l) \leqq 2\sqrt{a\,b}.$$

Satz 1: *Siehe Einleitung.*
Beweis: Der Satz steckt in Satz 4, erster Behauptung. Denn für grosse x ist auf $y \geqq x$

$$|f(y)| < \varphi(y) \leqq \varphi(x) = a, \quad |f''(y)| < \psi(y) \leqq \psi(x) = b,$$

also nach der Vorbemerkung zu Satz 4

$$|f'(x)| < 2\sqrt{a\,b} = 2\sqrt{\varphi(x)\,\psi(x)}.$$

Satz 5: *Es sei $f(x)$ für $x \geqq 0$ zweimal differentiierbar und $f(x)$, $f''(x)$ dort beschränkt. Man setze für $x \geqq 0$*

$$\Phi(x) = \underset{y \geqq x}{\text{obere Grenze}}\, |f(y)|, \quad \Psi(x) = \underset{y \geqq x}{\text{obere Grenze}}\, |f''(y)|.$$

Dann ist für $x \geqq 0$

$$(6) \qquad |f'(x)| \leqq 2\sqrt{\Phi(x)\,\Psi(x)}.$$

Beweis: 1) Ist $\Psi(x) = 0$, so ist $f''(y) = 0$ für $y \geqq x$, also $f(y)$ dort linear, also, da es beschränkt ist, konstant, und (6) ist trivial wegen $f'(x) = 0$.

2) Ist $\Psi(x) > 0$, so ist $\Phi(x) > 0$. Für $y \geqq x$ ist

$$|f(y)| \leqq \Phi(x), \quad |f''(y)| \leqq \Psi(x),$$

also (6) nach Satz 4, erster Behauptung, wahr.

Satz 6: *In (6) kann statt 2 keine Konstante $k < 2$ stehen.* Schärfer: *Es gibt ein Beispiel, das die Voraussetzungen von Satz 5 erfüllt und wo immer wieder*

$$(7) \qquad |f'(x)| = 2\sqrt{\Phi(x)\,\Psi(x)} > 0$$

gilt. (Obendrein wird $f''(x)$ überall vorhanden und stetig sein.)
Beweis: 1) Ich definiere zunächst $f(x)$ auf $0 \leqq x \leqq 4$.

$$f(x) = \begin{cases} -1 + 2x - \dfrac{x^2}{2} & \text{für } 0 \leqq x \leqq 2, \\ 1 - \dfrac{(x-2)^2}{2} + \dfrac{(x-2)^3}{6} & \text{für } 2 \leqq x \leqq 3, \\ \dfrac{2}{3} - \dfrac{x-3}{2} + \dfrac{(x-3)^3}{30} & \text{für } 3 \leqq x \leqq 4. \end{cases}$$

Die Definition klappt in $x = 2$ wegen $-1 + 4 - 2 = 1$, in $x = 3$ wegen $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$.

Im Inneren der drei Teilstrecken und in ihren Enden nach innen ist natürlich $f''(x)$ vorhanden und stetig.
In Bezug auf $f'(x)$ und $f''(x)$ klappt es in $x = 2$ und $x = 3$ wegen

$$f'_-(2) = 2 - 2 = 0 = f'_+(2), \; f''_-(2) = -1 = f''_+(2);$$

$$f'_-(3) = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} = f'_+(3), \; f''_-(3) = -1 + 1 = 0 = f''_+(3).$$

Ferner ist

$$f(0) = -1, \; f'_+(0) = 2, \; f''_+(0) = -1;$$

$$f(4) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{30} = \frac{1}{5}, \quad f'_-(4) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{10} = -\frac{2}{5}, \quad f''_-(4) = \frac{1}{5}.$$

Ausserdem gilt

$$|f''(x)| \leqq 1 \quad \text{für} \quad 0 \leqq x \leqq 4.$$

Denn auf den drei Teilstrecken ist bezw. $f''(x) = -1$, $= x - 3$ (steigt von -1 zu 0), $= \frac{x-3}{5}$ $\left(\text{steigt von } 0 \text{ zu } \frac{1}{5}\right)$.

Da $f''(x)$ für $0 \leqq x < 3$ negativ, für $3 < x \leqq 4$ positiv ist, fällt $f'(x)$ von $f'(0) = 2$ zu $f'(3) = -\frac{1}{2}$ und steigt dann zu $f'(4) = -\frac{2}{5}$. Es verschwindet also $f'(x)$ nur in 2 und ist vorher > 0, nachher < 0.

$f(x)$ steigt also von $f(0) = -1$ zu $f(2) = 1$ und fällt dann zu $f(4) = \frac{1}{5}$. Daher ist

$$|f(x)| \leqq 1 \quad \text{für} \quad 0 \leqq x \leqq 4.$$

2) Nunmehr definiere ich bei jedem ganzen $n \gtreqless 0$

$$f(x) = \frac{(-1)^n}{5^n} f(x - 4n) \quad \text{für} \quad 4n \leqq x \leqq 4(n+1).$$

Damit ist $f(x)$ für alle $x \gtreqless 0$ eindeutig definiert, da

$$\frac{(-1)^{n-1}}{5^{n-1}} f(4) = \frac{(-1)^{n-1}}{5^n} = \frac{(-1)^n}{5^n} f(0)$$

ist. Ferner ist $f''(x)$ überall vorhanden und stetig. Denn für $4n < x < 4(n+1)$ $(n \gtreqless 0)$ ist dies klar, und bei jedem $n \gtreqless 0$ ist

$$f'_-(4n) = \frac{(-1)^{n-1}}{5^{n-1}} f'_-(4) = 2\,\frac{(-1)^n}{5^n} = \frac{(-1)^n}{5^n} f'_+(0) = f'_+(4n),$$

$$f''_-(4n) = \frac{(-1)^{n-1}}{5^{n-1}} f''_-(4) = \frac{(-1)^{n-1}}{5^n} = \frac{(-1)^n}{5^n} f''_+(0) = f''_+(4n).$$

Ferner ist auf $4n \leqq x \leqq 4(n+1)$

$$\operatorname{Max} |f(x)| = \frac{1}{5^n}, \quad \operatorname{Max} |f''(x)| = \frac{1}{5^n}.$$

Für $n \geqq 0$ ist also

$$\Phi(4n) = \frac{1}{5^n}, \quad \Psi(4n) = \frac{1}{5^n},$$

$$|f'(4n)| = \frac{2}{5^n} = 2\sqrt{\Phi(4n)\,\Psi(4n)} > 0.$$

Satz 7: *In Satz 1 kann statt* 2 *kein* $k < 2$ *stehen.*

Beweis: $k < 2$ sei gegeben und ohne Beschränkung der Allgemeinheit $> \frac{2}{5}$. Dann ist $0 < \delta = \frac{2}{k} - 1 < 4$. Man wähle das $f(x)$ aus dem Beweise des Satzes 6 und setze

$$\varphi(x) = \psi(x) = \frac{1}{5^n}\left(1 + \delta\,\frac{4(n+1) - x}{4}\right) \quad \text{für } n \geqq 0, \quad 4n \leqq x < 4(n+1).$$

Dann fallen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ für $x \geqq 0$ wegen

$$\frac{1}{5^{n-1}}\left(1 + \delta\,\frac{4n - 4n}{4}\right) = \frac{1}{5^{n-1}} > \frac{1}{5^n}(1 + \delta)$$

$$= \frac{1}{5^n}\left(1 + \delta\,\frac{4(n+1) - 4n}{4}\right) \quad \text{für } n \geqq 1.$$

Für $n \geqq 0$, $4n \leqq x < 4(n+1)$ ist

$$|f(x)| \leqq \frac{1}{5^n} < \varphi(x), \quad |f''(x)| \leqq \frac{1}{5^n} < \psi(x).$$

Für $x \geqq 0$ gilt also (1).

Schliesslich ist für $n \geqq 0$

$$|f'(4n)| = \frac{2}{5^n} = \frac{2}{1+\delta}\sqrt{\frac{1+\delta}{5^n}\,\frac{1+\delta}{5^n}} = k\sqrt{\varphi(4n)\,\psi(4n)}.$$

§ 2.

Satz 2.

Satz 8: *Für* $x \geqq 0$ *existiere* $f''(x)$, *sei aber nicht identisch Null.* $f''(x)$ *sei auf jeder endlichen Teilstrecke beschränkt. Man setze für* $x \geqq 0$

$$\Phi(x) = \operatorname*{Max}_{0 \leqq y \leqq x} |f(y)|, \quad \Psi(x) = \operatorname*{obere\ Grenze}_{0 \leqq y \leqq x} |f''(y)|.$$

Dann gilt (6) zuletzt.

Vorbemerkung: Von Anfang an ist natürlich bei keinem $k > 0$

$$|f'(x)| \leqq k\sqrt{\Phi(x)\,\Psi(x)},$$

wie das Gegenbeispiel $f(x) = 1 + 2kx + x^2$ mit

$$|f'(0)| = 2k > k\sqrt{1 \cdot 2} = k\sqrt{\Phi(0)\,\Psi(0)}$$

zeigt.

Beweis: 1) $f'(x)$ habe für $x \geqq 0$ mindestens eine Nullstelle ξ. Dann funktioniert die Mordellsche Beweisanordnung seines Satzes 2, die sich mit Benutzung von Satz 4 hier so darstellen lässt: x sei alsbald so gross, dass

$$\Phi(x)>0,\ \Psi(x)>0.$$

11) Ist $x>2\sqrt{\frac{\Phi(x)}{\Psi(x)}}$, so folgt aus

$$|f(y)|\leqq\Phi(x),\ |f''(y)|\leqq\Psi(x) \text{ für } 0\leqq y\leqq x$$

nach Satz 4, zweiter Behauptung, sofort (6).

12) Ist $x\leqq 2\sqrt{\frac{\Phi(x)}{\Psi(x)}}$, so ist, wenn $x\geqq\xi$, nach dem Mittelwertsatz

$$f'(x)=f'(x)-f'(\xi)=(x-\xi)f''(\xi+\vartheta(x-\xi))\quad(0<\vartheta<1),$$

$$|f'(x)|\leqq(x-\xi)\Psi(x)\leqq x\Psi(x)\leqq 2\sqrt{\Phi(x)\Psi(x)}.$$

2) $f'(x)$ habe für $x\geqq 0$ keine Nullstelle, also festes Vorzeichen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $f'(x)>0$ für $x\geqq 0$ (sonst betrachte man $-f(x)$). Dann steigt $f(x)$ für $x\geqq 0$.

21) Falls $f(x)$ bei $x\to\infty$ gegen einen endlichen Grenzwert strebt, ist $\Phi(x)$ beschränkt, also zuletzt $\frac{\Phi(x)}{\Psi(x)}$ beschränkt, also zuletzt $x>2\sqrt{\frac{\Phi(x)}{\Psi(x)}}$, und 11) funktioniert wörtlich.

22) Falls $f(x)$ bei $x\to\infty$ über alle Grenzen wächst, tut dies auch $\Phi(x)$. Für alle grossen x ist also,

$$f(y)-\frac{\Phi(x)}{4}=F(y) \text{ für } 0\leqq y\leqq x$$

gesetzt,

$$-\frac{3}{4}\Phi(x)\leqq F(y)\leqq\frac{3}{4}\Phi(x),$$

$$|F''(y)|=|f''(y)|\leqq\Psi(x)$$

und $\Psi(x)>0$.

221) Ist hierbei $x>\sqrt{\frac{3\ \Phi(x)}{\Psi(x)}}$, so liefert die zweite Behauptung des Satzes 4

$$|f'(x)|=|F'(x)|\leqq 2\sqrt{\frac{3}{4}\Phi(x)\Psi(x)}\leqq 2\sqrt{\Phi(x)\Psi(x)}.$$

222) Ist jedoch $x\leqq\sqrt{\frac{3\ \Phi(x)}{\Psi(x)}}$, so ist $(0<\vartheta<1)$

$$|f'(x)|=|f'(0)+xf''(\vartheta x)|\leqq|f'(0)|+x\Psi(x)$$
$$\leqq|f'(0)|+\sqrt{3}\ \sqrt{\Phi(x)\Psi(x)},$$

und dies ist zuletzt

$$\leqq 2\sqrt{\Phi(x)\Psi(x)}.$$

Satz 9 (= Satz 2 ohne ε): *$f(x)$ sei für $x>0$ zweimal differentiierbar. $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ mögen zuletzt steigen. Es gelte (1) zuletzt. Dann gilt (2) zuletzt.*

Beweis: 1) Es sei zuletzt $f''(x)$ identisch Null, also $f(x)$ zuletzt linear. Ist $f(x)$ zuletzt konstant, so ist $f'(x)$ zuletzt identisch Null und die Behauptung trivial. Anderenfalls wächst $\varphi(x)$ über alle Grenzen, und die Behauptung ist trivial, weil $|f'(x)|$ zuletzt konstant ist.

2) Es sei nicht zuletzt $f''(x)$ identisch Null. Bei passendem $\xi>0$ gilt für $F(x)=f(x+\xi)$ auf $x\geqq 0$

$$\max_{0\leqq y\leqq x}|F(y)|=\max_{\xi\leqq y\leqq x+\xi}|f(y)|<\max_{\xi\leqq y\leqq x+\xi}\varphi(y)=\varphi(x+\xi),$$

$$\underset{0\leqq y\leqq x}{\text{obere Grenze}}|F''(y)|=\underset{\xi\leqq y\leqq x+\xi}{\text{obere Grenze}}|f''(y)|\leqq\max_{\xi\leqq y\leqq x+\xi}\psi(y)=\psi(x+\xi).$$

Nach Satz 8 ist also zuletzt

$$|f'(x+\xi)|=|F'(x)|<2\sqrt{\varphi(x+\xi)\,\psi(x+\xi)},$$

d. h. zuletzt

$$|f'(x)|<2\sqrt{\varphi(x)\,\psi(x)}.$$

Satz 10: *Für kein $k<2$ folgt unter den Voraussetzungen des Satzes 8 zuletzt*

$$|f'(x)|\leqq k\sqrt{\Phi(x)\Psi(x)}.$$

Schärfer: *Es gibt ein Beispiel, wo immer wieder (7) gilt.* (Obendrein wird $f''(x)$ überall vorhanden und stetig sein.)

B e w e i s: Die Funktion $F(x) = f(-x)$ vom Beweise des Satzes 6 leistet dies. Denn für $n \geqq 0$ ist

$$\operatorname*{Max}_{0 \leqq y \leqq 4n} |F(y)| = \operatorname*{Max}_{0 \leqq y \leqq 4n} |F''(y)| = 5^n,$$

$$|F'(4n)| = 2 \cdot 5^n = 2\sqrt{\Phi(4n)\,\Psi(4n)}.$$

S a t z 11: *Für kein $k < 2$ folgt unter den Voraussetzungen des Satzes 9 zuletzt*

$$|f'(x)| < k\sqrt{\varphi(x)\,\psi(x)}.$$

B e w e i s: Es sei k mit $\frac{2}{5} < k < 2$ gegeben, $\delta = \frac{2}{k} - 1$. Man wähle das $F(x)$ vom Beweise des Satzes 10 und setze

$$\varphi(x) = \psi(x) = 5^{n+1}\left(1 + \delta\,\frac{x - 4n}{4}\right) \text{ für } n \geqq 0,\ 4n < x \leqq 4(n+1).$$

Dann steigen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ für $x > 0$ wegen

$$5^n\left(1 + \delta\,\frac{4n - 4(n-1)}{4}\right) = 5^n(1+\delta) < 5^{n+1} = 5^{n+1}\left(1 + \delta\,\frac{4n - 4n}{4}\right) \text{für } n \geqq 1.$$

Für $n \geqq 0$, $4n < x \leqq 4(n+1)$ ist

$$|F(x)| \leqq 5^{n+1} < \varphi(x),\ |F''(x)| \leqq 5^{n+1} < \psi(x).$$

Für $x > 0$ ist also

$$|F(x)| < \varphi(x),\ |F''(x)| < \psi(x).$$

Schliesslich ist für $n \geqq 1$

$$|F'(4n)| = 2 \cdot 5^n = \frac{2}{1+\delta}\sqrt{(1+\delta)\,5^n \cdot (1+\delta)\,5^n} = k\sqrt{\varphi(4n)\,\psi(4n)}.$$

§ 3.

Ein Satz bei $x \to 0$.

S a t z 12: *Es sei $c > 0$,*

$$x^2 f''(x) < c \text{ \textit{für} } 0 < x < p,$$

$$f(x) \to 0 \text{ \textit{bei} } x \to 0 \text{ (von rechts).}$$

Dann ist

$$x f'(x) \to 0 \text{ \textit{bei} } x \to 0 \text{ (von rechts).}$$

B e w e i s: Für jedes positive $\varepsilon \leqq \frac{c}{4}$ ist auf $\frac{x}{2} \leqq y \leqq \frac{3}{2}x$, wenn nur x hinreichend klein ist,

$$|f(y)| < \varepsilon,\quad f''(y) < \frac{4c}{x^2},$$

also nach Satz 3 $\left(\text{nebst Vorbemerkung; man beachte } \frac{x}{2} \geqq 2\sqrt{\varepsilon : \frac{4c}{x^2}}\right)$

$$|x f'(x)| \leqq x \cdot 2\sqrt{\varepsilon\,\frac{4c}{x^2}} = 4\sqrt{\varepsilon c}.$$

Göttingen, den 1. Februar 1929.