ARNOLD WALFISZ.

O pewnem zagadnieniu dzielników Ramanujana.

(Über ein Ramanujansches Teilerproblem.)

Przy dowolnem rzeczywistem s oznaczmy przez

$$\sigma_s(m) = \sum_{d/m} d^s$$

sumę s-tych potęg dzielników liczby m, przez symbol zaś

$$d(m) = \sigma_0(m) = \sum_{d/m} 1$$

liczbę tych dzielników. Dla skrócenia piszemy

$$\sigma_s'(m) = \frac{d}{ds}\sigma_s(m).$$

Niechaj m_0 i k będą liczby całkowite, spełniające nierówność $1 \leq m_0 \leq k$, n zaś dowolna liczba naturalna. Określamy funkcje liczbowe $\alpha(m_0, n)$ i $\beta(m_0, n)$ jako spółczynniki następujących szeregów Dirichleta, zbieżnych bezwzględnie dla $s > 1$,

$$\text{(1)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(m_0, n)}{n^s} = \frac{\zeta(s)\,\sigma_{-s}(m_0)}{\zeta(1+s)},$$

$$\text{(2)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta(m_0, n)}{n^s} = -\frac{\zeta(s)\,\sigma_{-s}(m_0)}{\zeta(1+s)} \left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{\zeta'(1+s)}{\zeta(1+s)} + \frac{\sigma'_{-s}(m_0)}{\sigma_{-s}(m_0)} \right).$$

Niech wreszcie C będzie stałą Eulera.

Według S. R a m a n u j a n a [1]) zachodzi wtedy wzór następujący [2])

$$(3)\qquad \sum_{\substack{m\leqq x\\ m\equiv m_0 \pmod k}} d(m)=\alpha(m_0,k)\,x(\log x+2C-1)+\beta(m_0,k)\,x+O(x^{\frac{1}{3}}\log x).$$

Dla przypadku szczególnego $k=1,\ m_0=1$ (zagadnienie dzielników D i r i c h l e t a), wobec (1) i (2), mamy

$$\alpha(1,1)=1,\ \beta(1,1)=0.$$

Wzór (3) zawiera więc słynną ocenę W o r o n o j a [3])

$$(4)\qquad \sum_{m\leqq x} d(m)=x(\log x+2C-1)+O(x^{\frac{1}{3}}\log x).$$

Elementarny dowód wzoru

$$\sum_{\substack{m\leqq x\\ m\equiv m_0 \pmod k}} d(m)=\alpha(m_0,k)\,x(\log x+2C-1)+\beta(m_0,k)\,x+O(\sqrt{x}),$$

wprawdzie znacznie słabszego od wzoru (3), podał w ostatnim czasie T. E s t e r m a n n. [4])

Symbolem $P(x)$ — posługując się wrazie potrzeby wskaźnikami — oznaczmy dowolny wyraz

$$(5)\qquad P(x)=\alpha_1\,x\log x+\alpha_2\,x$$

ze spółczynnikami stałemi, t. j. niezależnemi od x. Jest wówczas oczywistem, że każda ocena typu

$$\sum_{\substack{m\leqq x\\ m\equiv m_0 \pmod k}} d(m)=P(x)+O(x^{\gamma}\log^{\delta}x)\qquad(\gamma<1)$$

[1]) S. R a m a n u j a n, Messenger of Mathematics **45** (1916), pg. 83 podaje wzór (3) bez dowodu.

[2]) Wszystkie zmienne sumacyjne są $\geqq 1$, o ile nie podajemy kresów dolnych.

[3]) G. V o r o n o ï „Sur un problème du calcul des fonctions asymptotiques" [Journal für die reine und angewandte Mathematik **126** (1903), pg. 241 — 282].

[4]) T. E s t e r m a n n „On the Divisor-Problem in a Class of Residues" [The Journal of the London Mathematical Society **3** (1928), pg. 247 — 250].

pociąga za sobą wzór

$$P(x)=\alpha(m_0,k)\,x(\log x+2C-1)+\beta(m_0,k)\,x.$$

Wystarczy więc udowodnić, że ocena (6) zachodzi dla jakiegolwiek $P(x)$ typu (5). Nie będziemy tedy zgoła troszczyli o wartości $\alpha(m_0,k)$ i $\beta(m_0,k)$, określone na zasadzie wzorów (1) i (2).

Aby osiągnąć ocenę (6), wystarczy udowodnić, iż

$$(7)\qquad \sum_{\substack{ab\leqq x\\ a\equiv a_0,\ b\equiv b_0 \pmod k}} 1=P(x)+O(x^{\gamma}\log^{\delta}x),$$

dla dowolnych reszt a_0 i b_0. W rzeczy samej, załóżmy, iż zachodzi wzór (7). Niechaj

$$a\equiv a_1,\ b\equiv b_1;\ a\equiv a_2,\ b\equiv b_2;\ \ldots;\ a\equiv a_\rho,\ b\equiv b_\rho \pmod k$$

będą pierwiastki kongruencji

$$ab\equiv m_0 \pmod k.$$

Wzór (7) daje nam wtedy

$$\sum_{\substack{m\leqq x\\ m\equiv m_0 \pmod k}} d(m)=\sum_{\substack{m\leqq x\\ m\equiv m_0 \pmod k}}\ \sum_{ab=m} 1=\sum_{\substack{ab\leqq x\\ ab\equiv m_0 \pmod k}} 1$$

$$=\sum_{\nu=1}^{\rho}\ \sum_{\substack{ab\leqq x\\ a\equiv a_\nu,\ b\equiv b_\nu \pmod k}} 1=\sum_{\nu=1}^{\rho}(P_\nu(x)+O(x^{\gamma}\log^{\delta}x))$$

$$=P(x)+O(x^{\gamma}\log^{\delta}x).$$

Pewne, znane już od lat szesnastu, twierdzenie E. L a n d a u a [5]) głosi, iż

[5]) E. L a n d a u „Die Bedeutung der P f e i f f e r'schen Methode für die analytische Zahlentheorie" [Sitzungsberichte der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse. Abt. II-a **121** (1912), pg. 2195 — 2332], pg. 2283.

Twierdzenie L a n d a u a, które podaliśmy powyżej w postaci nieco uproszczonej, brzmi jak następuje: dla $1\leqq a_0\leqq k,\ 1\leqq b_0\leqq l$ jest

$$\sum_{\substack{ab\leqq x\\ a\equiv a_0 \pmod k\\ b\equiv b_0 \pmod l}} 1=\frac{1}{kl}\,x\log x-\frac{1}{kl}\left(\log kl+1+\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{a_0}{k}\right)+\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{b_0}{l}\right)\right)x+O(x^{\frac{1}{3}}\log x).$$

$$\sum_{\substack{ab \leqq x \\ a \equiv a_0,\ b \equiv b_0 \pmod{k}}} 1 = P(x) + O(x^{\frac{1}{3}} \log x).$$

Widzimy więc, że wzór (3) Ramanujana jest prawdziwy.

Załóżmy obecnie dla skrócenia

$$D(x) = D(x;\, m_0,\, n_0,\, k) = \sum_{\substack{m\,n \leqq x \\ m \equiv m_0,\ n \equiv n_0 \pmod{k}}} 1 = \sum_{m\,n \leqq x}{}' 1, \tag{8}$$

gdzie akcent w sumie Σ' wskazuje, że m i n, poza wymienionemi warunkami sumowania, czynią zadość kongruencjom

$$m \equiv m_0;\ n \equiv n_0 \pmod{k}.$$

Reszty m_0 i n_0 obieramy tak, aby spełnione zostały nierówności

$$1 \leqq m_0 \leqq k, \quad 1 \leqq n_0 \leqq k. \tag{9}$$

Wreszcie dla dowolnych rzeczywistych u określamy funkcję

$$\psi(u) = u - [u] - \tfrac{1}{2}. \tag{10}$$

Z wzoru (8) wynika, że

$$D(x) = \sum_{\substack{m\,n \leqq x \\ m \leqq \sqrt{x}}}{}' 1 + \sum_{\substack{m\,n \leqq x \\ m \leqq \sqrt{x}}}{}' 1 - \sum_{\substack{m \leqq \sqrt{x} \\ n \leqq \sqrt{x}}}{}' 1,$$

co napiszemy

$$D(x) = S_1 + S_2 - S_3. \tag{11}$$

Dla $y \geqq 1$ otrzymujemy, wobec nierówności (9),

$$\sum_{n \leqq y}{}' 1 = \sum_{1 \leqq n_0 + r\,k \leqq y} 1 = \sum_{\frac{1 - n_0}{k} \leqq r \leqq \frac{y - n_0}{k}} 1$$

$$= \sum_{0 \leqq r \leqq \frac{y - n_0}{k}} 1 = \left[\frac{y + k - n_0}{k}\right]. \tag{12}$$

Wzory (11) i (12) dają nam

$$S_1 = \sum_{m \leqq \sqrt{x}}{}' \sum_{n \leqq \frac{x}{m}}{}' 1 = \sum_{m \leqq \sqrt{x}}{}' \left[\frac{\frac{x}{m} + k - n_0}{k}\right]$$

$$= \sum_{m \leqq \sqrt{x}}{}' \left[\frac{x + m\,(k - n_0)}{m\,k}\right]$$

$$= \sum_{1 \leqq m_0 + r\,k \leqq \sqrt{x}} \left[\frac{x + (m_0 + r\,k)\,(k - n_0)}{(m_0 + r\,k)\,k}\right]$$

$$= \sum_{0 \leqq r \leqq \frac{\sqrt{x} - m_0}{k}} \left[\frac{x + (m_0 + r\,k)\,(k - n_0)}{(m_0 + r\,k)\,k}\right]. \tag{13}$$

Wprowadzając funkcje ψ według wzoru (10) i biorąc pod uwagę, że $\psi(u)$ ma okres 1, otrzymujemy na zasadzie wzoru (13),

$$S_1 = \frac{x}{k} \sum_{0 \leqq r \leqq \frac{\sqrt{x} - m_0}{k}}{}' \frac{1}{m_0 + r\,k}$$

$$+ \left(\frac{1}{2} - \frac{n_0}{k}\right) \sum_{0 \leqq r \leqq \frac{\sqrt{x} - m_0}{k}} 1 - \sum_{0 \leqq r \leqq \frac{\sqrt{x} - m_0}{k}} \psi\left(\frac{x}{(m_0 + r\,k)\,k} - \frac{n_0}{k}\right)$$

$$= \frac{x}{k} \sum_{0 \leqq r \leqq \frac{\sqrt{x} - m_0}{k}} \frac{1}{m_0 + r\,k} \tag{14}$$

$$+ \left(\frac{1}{2} - \frac{n_0}{k}\right) \frac{\sqrt{x}}{k} - \sum_{r \leqq \frac{\sqrt{x}}{k}} \psi\left(\frac{x}{(m_0 + r\,k)\,k} - \frac{n_0}{k}\right) + O(1).$$

Dla rosnącego y jest, jak wiadomo,

$$\sum_{r \leqq y} \frac{1}{r} = \log y + C - \frac{\psi(y)}{y} + O\left(\frac{1}{y^2}\right). \tag{15}$$

Wobec

$$\log \frac{\sqrt{x} - m_0}{k} = \tfrac{1}{2} \log x - \log k - \frac{m_0}{\sqrt{x}} + O\left(\frac{1}{x}\right)$$

oraz

$$\frac{x}{\sqrt{x}-m_0}=\sqrt{x}+O(1),$$

otrzymujemy zatem, posługując się wzorem (15),

$$\frac{x}{k}\sum_{0\leq r\leq\frac{\sqrt{x}-m_0}{k}}\frac{1}{m_0+rk}$$

$$=\frac{x}{k}\left(\frac{1}{m_0}+\frac{1}{k}\sum_{r\leq\frac{\sqrt{x}-m_0}{k}}\frac{1}{r}-\frac{m_0}{k}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r(m_0+rk)}\right.$$

$$\left.+\frac{m_0}{k}\sum_{r>\frac{\sqrt{x}-m_0}{k}}\frac{1}{r(m_0+rk)}\right)$$

$$=P(x)+\frac{x}{k^2}\log\frac{\sqrt{x}-m_0}{k}-\frac{1}{k}\frac{x}{\sqrt{x}-m_0}\psi\left(\frac{\sqrt{x}-m_0}{k}\right)+\frac{m_0}{k^2}x\sum_{r>\frac{\sqrt{x}-m_0}{k}}\frac{1}{r(m_0+rk)}+O(1)$$

$$=P(x)-\frac{m_0}{k^2}\sqrt{x}-\frac{1}{k}\sqrt{x}\,\psi\left(\frac{\sqrt{x}-m_0}{k}\right)+\frac{m_0}{k^2}\,x\sum_{r>\frac{\sqrt{x}-m_0}{k}}\frac{1}{r(m_0+rk)}+O(1). \tag{16}$$

Wobec

$$\int_{\frac{\sqrt{x}-m_0}{k}}^{\infty}\frac{du}{u(m_0+uk)}=\frac{1}{m_0}\log\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-m_0}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x}}+O\left(\frac{1}{x}\right),$$

mamy

$$\frac{m_0}{k^2}x\sum_{r>\frac{\sqrt{x}-m_0}{k}}\frac{1}{r(m_0+rk)}=\frac{m_0}{k^2}x\int_{\frac{\sqrt{x}-m_0}{k}}^{\infty}\frac{du}{u(m_0+uk)}+O(1)$$

$$=\frac{m_0}{k^2}\sqrt{x}+O(1), \tag{17}$$

a więc, na zasadzie wzorów (14), (16) i (17),

$$S_1=P(x)+\left(\frac{1}{2}-\frac{n_0}{k}\right)\frac{\sqrt{x}}{k}-\frac{1}{k}\sqrt{x}\,\psi\left(\frac{\sqrt{x}-m_0}{k}\right)$$
$$-\sum_{r\leq\frac{\sqrt{x}}{k}}\psi\left(\frac{x}{(m_0+rk)k}-\frac{n_0}{k}\right)+O(1). \tag{18}$$

Zważywszy, że S_2 powstaje z S_1, gdy się zamienia m_0 i n_0, otrzymujemy w jednej chwili

$$S_2=P(x)+\left(\frac{1}{2}-\frac{m_0}{k}\right)\frac{\sqrt{x}}{k}-\frac{1}{k}\sqrt{x}\,\psi\left(\frac{\sqrt{x}-n_0}{k}\right)$$
$$-\sum_{r\leq\frac{\sqrt{x}}{k}}\psi\left(\frac{x}{(n_0+rk)k}-\frac{m_0}{k}\right)+O(1). \tag{19}$$

Pozatem otrzymujemy z wzoru (11)

$$S_3=\sum_{m\leq\sqrt{x}}{}'\,1\,.\sum_{n\leq\sqrt{x}}{}'\,1=\left[\frac{\sqrt{x}+k-m_0}{k}\right]\left[\frac{\sqrt{x}+k-n_0}{k}\right].$$

Podstawiając tu funkcje ψ, na zasadzie wzoru (10), wnioskujemy, iż

$$S_3=\frac{x}{k^2}+\left(1-\frac{m_0+n_0}{k}\right)\frac{\sqrt{x}}{k}-\frac{1}{k}\sqrt{x}\,\psi\left(\frac{\sqrt{x}-m_0}{k}\right)$$
$$-\frac{1}{k}\sqrt{x}\,\psi\left(\frac{\sqrt{x}-n_0}{k}\right)+O(1). \tag{20}$$

Wzory (11), (18), (19) i (20) dają następującą ocenę:

$$D(x)=P(x)-\sum_{r\leq\frac{\sqrt{x}}{k}}\psi\left(\frac{x}{(m_0+rk)k}-\frac{n_0}{k}\right)$$
$$-\sum_{r\leq\frac{\sqrt{x}}{k}}\psi\left(\frac{x}{(n_0+rk)k}-\frac{m_0}{k}\right)+O(1). \tag{21}$$

W pracy o funkcji ideałowej kwadratowych ciał liczbowych [6]) udowodniłem, posługując się pewnem twierdzeniem van der Corputa [7]), iż

[6]) A. Walfisz „Über die Idealfunktion quadratischer Zahlkörper" [Prace matematyczno-fizyczne **34** (1927), pg. 35 — 47].

[7]) J. G. van der Corput „Verschärfung der Abschätzung bein Teilerproblem" [Mathematische Annalen **87** (1922), pg. 39 — 65].

$$\sum_{r \leqq \frac{\sqrt{x}}{k}} \psi\left(\frac{x}{m_0 + r k}\right) = O\left(x^{\frac{163}{494}}\right).$$

Dowód ten, dosłownie tu zastosowany, daje nam

$$\sum_{r \leqq \frac{\sqrt{x}}{k}} \psi\left(\frac{x}{(m_0 + r k)\, k} - \frac{n_0}{k}\right) = O\left(x^{\frac{163}{494}}\right),$$

$$\sum_{r \leqq \frac{\sqrt{x}}{k}} \psi\left(\frac{x}{(n_0 + r k)\, k} - \frac{m_0}{k}\right) = O\left(x^{\frac{163}{494}}\right),$$

a więc, przy uwzględnieniu wzoru (21),

$$D(x) = P(x) + O\left(x^{\frac{163}{494}}\right), \tag{22}$$

czyli

$$\sum_{\substack{m \leqq x \\ m \equiv m_0 \pmod{k}}} d(m) = P(x) + O\left(x^{\frac{163}{494}}\right). \tag{23}$$

Jest to wynik lepszy od oceny (3) R a m a n u j a n a.

Udowodnimy obecnie, iż wzór (23) da się zaostrzyć do

$$\sum_{\substack{m \leqq x \\ m \equiv m_0 \pmod{k}}} d(m) = P(x) + O\left(x^{\frac{27}{82}} \log^{\frac{11}{41}} x\right). \tag{24}$$

Wystarczy w tym celu poprzestać na ocenie

$$D(x) = P(x) + O\left(x^{\frac{27}{82}} \log^{\frac{11}{41}} x\right), \tag{25}$$

która, jak wiemy, da nam natychmiast wzór (24).

Dla przypadku szczególnego zagadnienia dzielników D i r i c h l e t a wzór (24) udowodniony został przez v a n d e r C o r p u t a [8]), który posługuje się pewnem twierdzeniem z zakresu przybliżeń Diofantowych. Twierdzenie to, dostosowane do naszego celu, brzmi, w postaci nieco odmiennej [9]), jak następuje:

„Niechaj funkcja f(u) będzie pięć razy różniczkowalna w przedziale $a \leqq u \leqq b$ *(*$a < b$*, a i b liczby całkowite) i niechaj jej piąta pochodna w tym przedziale będzie* $\geqq \rho$ *lub* $\leqq -\rho$*, gdzie* $\rho > 0$ *nie zależy od u. Zakładając*

$$L \geqq \frac{1}{\rho}\left| f^{\mathrm{IV}}(b) - f^{\mathrm{IV}}(a) \right|, \tag{26}$$

będziemy mieli nierówność

$$\left| \sum_{r=a}^{b} e^{2\pi i f(r)} \right| < 100\left(L \rho^{\frac{1}{30}} + L^{\frac{11}{16}} \rho^{-\frac{1}{16}} + L^{\frac{15}{16}}\right).\text{''} \tag{27}$$

Zamiast wzoru (25), postaramy się osiągnąć wynik równoważny

$$D(k^2 x) = P(x) + O\left(x^{\frac{27}{82}} \log^{\frac{11}{41}} x\right), \tag{28}$$

nieco dogodniejszy rachunkowo.

Posłuży nam do tego, zamiast wzoru (21), wzór następujący

$$\int_0^x D(k^2 u)\, du = x P(x) + \frac{\sqrt{2}}{4\pi^2} x^{\frac{3}{4}} \sum_{a_1, a_2 = 0}^{1} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{c_r}{r^{\frac{5}{4}}} \cos\left(4\pi\sqrt{r x} - \gamma\right) + O\left(x^{\frac{5}{8}}\right), \tag{29}$$

gdzie założyliśmy

$$c_r = c_r(a_1, a_2) = \sum_{mn = r} \cos 2\pi\left(\frac{m m_0}{k} - \frac{a_1}{4}\right) \cos 2\pi\left(\frac{n n_0}{k} - \frac{a_2}{4}\right) \tag{30}$$

oraz

$$\gamma = \gamma(a_1, a_2) = \frac{\pi}{2}\left(a_1 + a_2 + \frac{3}{2}\right). \tag{31}$$

Oznaczamy poniżej przez $s = \sigma + i t$ zmienną zespoloną; w, w_1 i w_2 są to dowolne liczby rzeczywiste, spełniające nierówności

$$0 < w \leqq 1, \quad 0 < w_1 \leqq 1, \quad 0 < w_2 \leqq 1.$$

[8]) J. G. v a n d e r C o r p u t „Zum Teilerproblem" [Mathematische Annalen **98** (1928), pg. 697 — 716].

[9]) J. G. v a n d e r C o r p u t „Neue zahlentheoretische Abschätzungen. Zweite Mitteilung" [Mathematische Zeitschrift **29** (1929), pg. 397—426], Satz 5, pg. 403.

Funkcje $\zeta_0(s; w)$ i $\zeta_1(s; w)$ określamy, posiłkując się szeregami Dirichleta bezwzględnie zbieżnemi dla $\sigma > 1$

$$(32)\qquad \zeta_0(s; w) = \tfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+w)^s} + \tfrac{1}{2}\sum_{\substack{n=1\\ n \neq w}}^{\infty}\frac{1}{(n-w)^s},$$

$$(33)\qquad \zeta_1(s; w) = \tfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+w)^s} - \tfrac{1}{2}\sum_{\substack{n=1\\ n \neq w}}^{\infty}\frac{1}{(n-w)^s},$$

funkcję zaś $Z_{a_1, a_2}(s; w_1, w_2)$ oraz wartości b_n i l_n określamy na zasadzie wzorów

$$(34)\qquad Z_{a_1, a_2}(s; w_1, w_2) = \zeta_{a_1}(s; w_1)\,\zeta_{a_2}(s; w_2) \qquad (a_1, a_2 = 0 \text{ lub } 1),$$

$$(35)\qquad Z_{a_1, a_2}\left(s; \frac{m_0}{k}, \frac{n_0}{k}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{l_n^s} \qquad (\sigma > 1)$$

(b_n i l_n mogą zależeć od n, a_1, a_2, m_0, n_0 i k; z prawej strony wzoru (35) mamy szereg Dirichleta).

Ze wzorów (8), (32), (33), (34) i (35) wynika natychmiast, iż

$$(36)\qquad D(k^2 x) = \sum_{a_1, a_2 = 0}^{1}\ \sum_{l_n \leqq x} b_n.$$

Rozkład powyższy wprowadził Landau[10] [11] w celu zastosowania własności funkcyj analitycznych (32) i (33).

Załóżmy dla skrócenia

$$(37)\qquad G(s) = \frac{\Gamma\left(\dfrac{1+a_1-s}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{1+a_2-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{s+a_1}{2}\right)\ \Gamma\left(\dfrac{s+a_2}{2}\right)}.$$

[10]) E. Landau „Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen" [Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse, 1912, pg. 687 — 771], pg. 738 — 739.

[11]) E. Landau „Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen. Zweite Abhandlung" [Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse, 1915, pg. 209 — 243], pg. 240.

Jak wiadomo, mamy w każdym pasie $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma$ jednostajną ze względu na σ ocenę

$$(38)\qquad \Gamma(s) = e^{\frac{\pi}{2}(\sigma - \frac{1}{2})i + c + ti(\log t - 1)}\, e^{-\frac{\pi}{2}t}\, t^{\sigma - \frac{1}{2}}\left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right)\right),$$

gdzie c jest pewną dodatnią stałą liczbową.[12]) Ze wzoru (38) wynika oczywiście, że w każdym pasie $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$ jest jednostajnie

$$(39)\qquad \Gamma(s) = O\left(e^{-\frac{\pi}{2}t}\, t^{\sigma - \frac{1}{2}}\right).$$

Ze wzorów (37) i (39) wnosimy, że dla $z > 0$ całka

$$(40)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{3}{8} - i\infty}^{\frac{3}{8} + i\infty} G(s)\left(\frac{z}{4}\right)^s \frac{ds}{s(s+1)}$$

jest bezwzględnie zbieżna. Funkcja zmiennej s pod znakiem całki jest analityczną w całym pasie $-\frac{3}{8} \leqq \sigma \leqq \frac{3}{8}$, pomijając jeden tylko punkt $s = 0$, gdzie dla $a_1 = a_2 = 1$ ma biegun pierwszego stopnia. Ponieważ w tym pasie, na zasadzie wzorów (37) i (39), mamy jednostajnie

$$\frac{G(s)}{s(s+1)} = O\left(t^{-\frac{1}{4}}\right),$$

wolno więc nam, stosując twierdzenie Cauchy'ego, przesunąć we wzorze (40) linję całkowania z $\sigma = \frac{3}{8}$ do $\sigma = -\frac{3}{8}$. Wnosimy stąd, że całka

$$(41)\qquad J(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\frac{3}{8} - i\infty}^{-\frac{3}{8} + i\infty} G(s)\left(\frac{z}{4}\right)^s \frac{ds}{s(s+1)} \qquad (z > 0)$$

jest zbieżna oraz ciągła względem z w każdym przedziale $0 < z_1 \leqq z \leqq z_2$. Ocenimy teraz funkcję $J(z)$ dla rosnącego z, posługując się pewną me-

[12]) Bardzo prosty dowód tego twierdzenia znajdziemy w podręczniku Landaua „Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale" [Lipsk i Berlin, nakładem B. G. Teubnera], wyd. pierwsze (1918), pg. 80, wyd. drugie (1927), pg. 81. Wartość stałej c, a mianowicie $\frac{1}{2}\log 2\pi$, jest dla nas obojętna.

todą Landaua, zastosowaną po raz pierwszy w mojej rozprawie doktorskiej. [13])

Ze wzorów (37) i (38) wynika, że dla $\sigma = -\frac{3}{8}$

$$G(s) \frac{\Gamma\left(\frac{a_1+a_2+3}{2}+s\right)}{\Gamma\left(\frac{a_1+a_2+1}{2}-s\right)} \frac{4^{\frac{1}{2}-s}}{s(s+1)} = 1 + O\left(\frac{1}{t}\right),$$

skąd wnosimy dalej, że dla $\sigma = -\frac{3}{8}$

$$G(s)\left(\left(\frac{z}{4}\right)^s \frac{1}{s(s+1)}\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{a_1+a_2+1}{2}-s\right)}{\Gamma\left(\frac{a_1+a_2+3}{2}+s\right)} z^s + g(s)\, z^s, \tag{42}$$

$$g(s) = O(t^{-\frac{5}{4}}). \tag{43}$$

Według Landaua [14]) mamy wzór

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{3}{8}-i\infty}^{\frac{3}{8}+i\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{a_1+a_2+1}{2}-s\right)}{\Gamma\left(\frac{a_1+a_2+3}{2}+s\right)} z^s\, ds = J_{a_1+a_2+1}(2\sqrt{z}), \tag{44}$$

gdzie $J_{a_1+a_2+1}$ oznacza funkcję Bessela pierwszego rodzaju, rzędu $a_1 + a_2 + 1$, dla której, jak wiadomo, zachodzi ocena

$$J_{a_1+a_2+1}(2\sqrt{z}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, z^{-\frac{1}{4}} \cos(2\sqrt{z}-\gamma) + O(z^{-\frac{3}{4}}), \tag{45}$$

gdzie stała γ określona jest na zasadzie wzoru (31).

---

[13]) A. Walfisz „Über die summatorischen Funktionen einiger Dirichletscher Reihen" [Getynga (1922), nakł. W. Fr. Kaestnera], pg. 32 lub też „Über das Piltzsche Teilerproblem in algebraischen Zahlkörpern" [Mathematische Zeitschrift **22** (1925), pg. 153 — 188], pg. 154.

[14]) E. Landau „Zur analytischen Zahlentheorie der definiten quadratischen Formen (Über die Gitterpunkte in einem mehrdimensionalen Ellipsoid)" [Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften **31** (1915), pg. 458 — 476], pg. 468.

Dalej mamy oczywiście

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\frac{3}{8}-i\infty}^{-\frac{3}{8}+i\infty} g(s)\, z^s\, ds = O(z^{-\frac{3}{8}}), \tag{46}$$

gdyż całka ta jest, wobec (43), bezwzględnie zbieżna.

Ze wzorów (41), (42), (44), (45) i (46) wnosimy, iż

$$J(z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\, z^{-\frac{1}{4}} \cos(2\sqrt{z}-\gamma) + O(z^{-\frac{3}{8}}). \tag{47}$$

Wprowadzamy obecnie dla $z > 0$ funkcję

$$\mathrm{E}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\frac{3}{4}-i\infty}^{-\frac{3}{4}+i\infty} G(s) \frac{z^{s+3}}{s(s+1)(s+2)(s+3)}\, ds. \tag{48}$$

Ponieważ całka ta jest, wobec (37) i (39), bezwzględnie zbieżna, mamy natychmiast ocenę

$$\mathrm{E}(z) = O(z^{\frac{9}{4}}) \tag{49}$$

oraz wnosimy, że funkcja $\mathrm{E}(z)$ jest ciągła. Na zasadzie oceny (39) łatwo jest udowodnić, posługując się twierdzeniem Cauchy'ego, że we wzorze (48) linję całkowania można przesunąć do $\sigma = \frac{3}{4}$. Różniczkując potem dwa razy pod znakiem całki (która jest dla $\sigma = \frac{3}{4}$ dobrze zbieżna) i kierując się następnie znowu na lewo aż do linji $\sigma = -\frac{3}{8}$, otrzymujemy wzór

$$\mathrm{E}''(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\frac{3}{8}-i\infty}^{-\frac{3}{8}+i\infty} G(s) \frac{z^{s+1}}{s(s+1)}\, ds. \tag{50}$$

Z (50) i (41) wynika, iż

$$\mathrm{E}''(z) = z\, J(4z), \tag{51}$$

a więc, wobec (47), iż

$$\mathrm{E}''(z) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\, z^{\frac{3}{4}} \cos(4\sqrt{z}-\gamma) + O(z^{\frac{5}{8}}). \tag{52}$$

Aby udowodnić (29), stosujemy teraz następujący wzór Landaua[15])

$$\frac{1}{6}\sum_{l_n \leqq x} b_n (x - l_n)^3 = x^3 P(x) + \pi \sum_{r=1}^{\infty} c_r (\pi^2 r)^{-4}\, \mathrm{E}(\pi^2 r x), \tag{53}$$

w którym b_n, l_n, c_r i E określone są na zasadzie wzorów (35), (30) i (48). Szereg (53) jest, wobec (49), bezwzględnie zbieżny. Różniczkując go dwukrotnie wyraz za wyrazem, otrzymujemy

$$\sum_{l_n \leqq x} b_n (x - l_n) = x P(x) + \pi \sum_{r=1}^{\infty} c_r (\pi^2 r)^{-2}\, \mathrm{E}''(\pi^2 r x). \tag{54}$$

Po prawej stronie wzoru (54) mamy, wobec (51) i (52), szereg funkcyj ciągłych zmiennej x, bezwzględnie i jednostajnie zbieżny w każdym przedziale $0 < x_1 \leqq x \leqq x_2$. W myśl znanego twierdzenia Landaua o różniczkowaniu szeregów wyraz za wyrazem[16]), wzór (54) jest więc udowodniony.

Zważywszy, iż ze wzoru (36) wynika

$$\int_0^x D(k^2 u)\, du = \int_0^x \sum_{a_1, a_2 = 0}^{1} \sum_{l_n \leqq u} b_n \,.\, du = \sum_{a_1, a_2 = 0}^{1} \sum_{l_n \leqq x} b_n (x - l_n),$$

mamy, w myśl wzoru (54),

$$\int_0^x D(k^2 u)\, du = x P(x) + \sum_{a_1, a_2 = 0}^{1} \pi \sum_{r=1}^{\infty} c_r (\pi^2 r)^{-2}\, \mathrm{E}''(\pi^2 r x).$$

Podstawiając tu za E'' wyraz (52), otrzymujemy ocenę (29).

Opierając się obecnie na wzorach (29) i (27), udowodnimy wzór (28) za pomocą znanej metody Landaua z zakresu teorji punktów siatkowych[17]).

---

[15]) E. Landau, *l. c.* 11), pg. 224, 236 — 242.

[16]) E. Landau „Über mehrfache gliedweise Differentiation unendlicher Reihen" [Archiv der Mathematik und Physik. Dritte Reihe **26** (1917), pg. 69 — 70].

[17]) Metodą tą posługiwał się Landau w następujących pracach: „The Lattice Points of a Circle" [Proceedings of the Royal Society **106** (1924), pg. 487 — 488]; „Computo asintotico dei nodi di un reticolato entro un cerchio" [Seminario matematico della facoltà di scienze della R. Università di Roma, serie 2-a **3** (1926), pg. 1 — 29]; „Über das Konvergenzgebiet einer mit der Riemannschen Zetafunktion zusammenhängenden Reihe" [Mathematische Annalen **97** (1926), pg. 251 — 290], jak również w swoim podręczniku „Vorlesungen über Zahlentheorie. Zweiter Band. Aus der analytischen und geometrischen Zahlentheorie" [Lipsk (1927), nakł. S. Hirzela], pg. 264 — 273.

Symbolem d ze wskaźnikami (a więc $d_1, d_2, \ldots$) oznaczamy poniżej pewne dodatnie stałe bezwzględne. Liczba rzeczywistą t oraz liczby całkowite R i R' mogą być dowolnie obrane, tak, aby spełnione zostały nierówności

$$t > 2,\ 1 \leqq R \leqq R' < 2R. \tag{55}$$

Zakładamy obecnie

$$a = R,\ b = R',\ f(u) = t\sqrt{u} + \beta u, \tag{56}$$

gdzie β jest dowolną liczbą rzeczywistą, niezależną od u. Przypuśćmy na chwilę, że $R' > R$. Wobec (55) i (56), wszystkie założenia przytoczonego powyżej twierdzenia van der Corputa są spełnione, gdy obierzemy

$$\rho = d_1 t R^{-\frac{9}{2}},\ L = d_2 R.$$

Nierówność (27) daje nam wtedy

$$\left|\sum_{r=R}^{R'} e^{2\pi i (t\sqrt{r} + \beta r)}\right| < d_3 \left(t^{\frac{1}{30}} R^{\frac{17}{20}} + t^{-\frac{1}{16}} R^{\frac{31}{32}} + R^{\frac{15}{16}}\right),$$

skąd, sumując według części, otrzymujemy

$$\left|\sum_{r=R}^{R'} \frac{e^{2\pi i (t\sqrt{r} + \beta r)}}{r^{\frac{3}{4}}}\right| < d_4 \left(t^{\frac{1}{30}} R^{\frac{1}{10}} + t^{-\frac{1}{16}} R^{\frac{7}{32}} + R^{\frac{3}{16}}\right), \tag{57}$$

$$\left|\sum_{r=R}^{R'} \frac{e^{2\pi i (t\sqrt{r} + \beta r)}}{r^{\frac{5}{4}}}\right| < d_5 \left(t^{\frac{1}{30}} R^{-\frac{2}{5}} + t^{-\frac{1}{16}} R^{-\frac{9}{32}} + R^{-\frac{5}{16}}\right). \tag{58}$$

Niechaj każda ze stałych d_4 i d_5 będzie > 1. Nierówności (57) i (58) spełnione będą wówczas oczywiście i dla $R' = R$.

Obieramy teraz do dowolnej liczby całkowitej $N \geqq 2$ taką liczbę całkowitą $\nu = \nu(N)$, iż

$$2^\nu < N \leqq 2^{\nu+1}. \tag{59}$$

Mamy wtedy, wobec (57),

$$\left|\sum_{r=1}^{N} \frac{e^{2\pi i (t\sqrt{r} + \beta r)}}{r^{\frac{3}{4}}}\right| \leqq \sum_{h=0}^{\nu-1} \left|\sum_{r=2^h}^{2^{h+1}-1}\right| + \left|\sum_{r=2^\nu}^{N}\right|$$

$$< d_4\left(t^{\frac{1}{30}}\sum_{h=0}^{\nu} 2^{\frac{h}{10}} + t^{-\frac{1}{16}}\sum_{h=0}^{\nu} 2^{\frac{7h}{32}} + \sum_{h=0}^{\nu} 2^{\frac{3h}{16}}\right)$$

$$< d_6\left(t^{\frac{1}{30}} 2^{\frac{\nu}{10}} + t^{-\frac{1}{16}} 2^{\frac{7\nu}{32}} + 2^{\frac{3\nu}{1}}\right),$$

skąd wnosimy, posługując się nierównością (59), iż

$$\left|\sum_{r=1}^{N}\frac{e^{2\pi i(t\sqrt{r}+\beta r)}}{r^{\frac{3}{4}}}\right| < d_6\left(t^{\frac{1}{30}}N^{\frac{1}{10}} + t^{-\frac{1}{16}}N^{\frac{7}{32}} + N^{\frac{3}{16}}\right). \tag{60}$$

Analogicznie wynika z (58), iż

$$\left|\sum_{r=N}^{\infty}\frac{e^{2\pi i(t\sqrt{r}+\beta r)}}{r^{\frac{5}{4}}}\right| \leqq \sum_{h=0}^{\infty}\left|\sum_{r=2^h N}^{2^{h+1}N-1}\right|$$

$$< d_5\left(t^{\frac{1}{30}}N^{-\frac{2}{5}}\sum_{h=0}^{\infty}2^{-\frac{2h}{5}} + t^{-\frac{1}{16}}N^{-\frac{9}{32}}\sum_{h=0}^{\infty}2^{-\frac{9h}{32}} + N^{-\frac{5}{16}}\sum_{h=0}^{\infty}2^{-\frac{5h}{16}}\right),$$

a zatem

$$\left|\sum_{r=N}^{\infty}\frac{e^{2\pi i(t\sqrt{r}+\beta r)}}{r^{\frac{5}{4}}}\right| < d_7\left(t^{\frac{1}{30}}N^{-\frac{2}{5}} + t^{-\frac{1}{16}}N^{-\frac{9}{32}} + N^{-\frac{5}{16}}\right). \tag{61}$$

Niechaj y będzie dowolną liczbą rzeczywistą, R zaś liczbą całkowitą w przedziale

$$1 \leqq R \leqq \sqrt{y}. \tag{62}$$

Na zasadzie określenia (30), mamy

$$\sum_{r=1}^{R}\frac{c_r}{r^{\frac{3}{4}}}e^{4\pi i\sqrt{ry}} = \sum_{m\,n\leqq R}\cos 2\pi\left(\frac{m\,m_0}{k}-\frac{a_1}{4}\right)\cos 2\pi\left(\frac{n\,n_0}{k}-\frac{a_2}{4}\right)\frac{e^{4\pi i\sqrt{m\,n\,y}}}{m^{\frac{3}{4}}n^{\frac{3}{4}}}$$

$$= \sum_{\substack{m\,n\leqq R\\ m\leqq n}} + \sum_{\substack{m\,n\leqq R\\ n\leqq m}} - \sum_{\substack{m\,n\leqq R\\ m=n}}$$

$$= S_4 + S_5 - S_6, \tag{63}$$

skąd otrzymujemy przedewszystkiem

$$|S_4| \leqq \sum_{m\leqq\sqrt{R}}\frac{1}{m^{\frac{3}{4}}}\left|\sum_{m\leqq n\leqq\frac{R}{m}}\cos 2\pi\left(\frac{n\,n_0}{k}-\frac{a_2}{4}\right)\frac{e^{4\pi i\sqrt{m\,n\,y}}}{n^{\frac{3}{4}}}\right|$$

$$\leqq \frac{1}{2}\sum_{m\leqq\sqrt{R}}\frac{1}{m^{\frac{3}{4}}}\left|\sum_{m\leqq n\leqq\frac{R}{m}}\frac{e^{2\pi i(2\sqrt{m\,y}\sqrt{n}+\frac{n_0}{k}n)}}{n^{\frac{3}{4}}}\right| \tag{64}$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{m\leqq\sqrt{R}}\frac{1}{m^{\frac{3}{4}}}\left|\sum_{m\leqq n\leqq\frac{R}{m}}\frac{e^{2\pi i(2\sqrt{m\,y}\sqrt{n}-\frac{n_0}{k}n)}}{n^{\frac{3}{4}}}\right|.$$

Do każdej z dwuch wewnętrznych sum wzoru (64) stosujemy, wrazie potrzeby dwukrotnie, nierówność (60), zakładając $r = n$, $N = \left[\frac{R}{m}\right]$ i $N = m - 1$, o ile $m > 1$, $t = 2\sqrt{m\,y}$, $\beta = \pm\frac{n_0}{k}$. Otrzymamy wtedy

$$|S_4| < d_8\left(y^{\frac{1}{60}}R^{\frac{1}{10}}\sum_{m\leqq\sqrt{R}}\frac{1}{m^{\frac{5}{6}}} + y^{-\frac{1}{32}}R^{\frac{7}{32}}\sum_{m\leqq\sqrt{R}}\frac{1}{m} + R^{\frac{3}{16}}\sum_{m\leqq\sqrt{R}}\frac{1}{m^{\frac{15}{16}}}\right)$$

$$< d_9\left(y^{\frac{1}{60}}R^{\frac{11}{60}} + y^{-\frac{1}{32}}R^{\frac{7}{32}}\log R + R^{\frac{7}{32}}\right). \tag{65}$$

Wobec (62), wynika z (65), iż

$$|S_4| < d_{10}\,y^{\frac{1}{60}}R^{\frac{11}{60}}. \tag{66}$$

Podobnież znajdziemy

$$|S_5| < d_{11}\,y^{\frac{1}{60}}R^{\frac{11}{60}}. \tag{67}$$

Sumę S_6 oceniamy jak następuje

$$|S_6| \leqq \sum_{m\leqq\sqrt{R}}\frac{1}{m^{\frac{3}{2}}} < \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{\frac{3}{2}}} = d_{12}. \tag{68}$$

Ze wzorów (63), (66), (67) i (68) wnosimy, że

$$(69)\qquad \left|\sum_{r=1}^{R}\frac{c_r}{r^{\frac{3}{4}}}e^{4\pi i\sqrt{ry}}\right| < d_{13}\, y^{\frac{1}{60}} R^{\frac{11}{60}}.$$

Stosując wzór (30), mamy rozkład następujący

$$\sum_{r=R}^{\infty}\frac{c_r}{r^{\frac{5}{4}}}e^{4\pi i\sqrt{ry}}$$

$$=\sum_{mn\geqq R}\cos 2\pi\left(\frac{mm_0}{k}-\frac{a_1}{4}\right)\cos 2\pi\left(\frac{nn_0}{k}-\frac{a_2}{4}\right)\frac{e^{4\pi i\sqrt{mny}}}{m^{\frac{5}{4}}n^{\frac{5}{4}}}$$

$$=\sum_{\substack{mn\geqq R\\ m\leqq\sqrt{R}}}+\sum_{\substack{mn\geqq R\\ n\leqq\sqrt{R}}}+\sum_{\substack{mn\geqq R\\ n\geqq m>\sqrt{R}}}+\sum_{\substack{mn\geqq R\\ m\geqq n>\sqrt{R}}}-\sum_{\substack{mn\geqq R\\ m=n}}$$

$$(70)\qquad = S_7+S_8+S_9+S_{10}-S_{11},$$

z którego przedewszystkiem wynika, iż

$$|S_7|\leqq\sum_{m\leqq\sqrt{R}}\frac{1}{m^{\frac{5}{4}}}\left|\sum_{n\geqq\frac{R}{m}}\cos 2\pi\left(\frac{nn_0}{k}-\frac{a_2}{4}\right)\frac{e^{4\pi i\sqrt{mny}}}{n^{\frac{5}{4}}}\right|.$$

Stosując więc nierówność (61), obrawszy $r=n$, $N=\left[\frac{R}{m}\right]$ lub $\left[\frac{R}{m}\right]+1$, $t=2\sqrt{my}$ i $\beta=\pm\frac{n_0}{k}$, otrzymamy, jak wyżej,

$$|S_7|<d_{14}\left(y^{\frac{1}{60}}R^{-\frac{2}{5}}\sum_{m\leqq\sqrt{R}}\frac{1}{m^{\frac{5}{6}}}+y^{-\frac{1}{32}}R^{-\frac{9}{32}}\sum_{m\leqq\sqrt{R}}\frac{1}{m}\right.$$

$$\left.+R^{-\frac{5}{16}}\sum_{m\leqq\sqrt{R}}\frac{1}{m^{\frac{15}{16}}}\right)$$

$$(71)\qquad < d_{15}\left(y^{\frac{1}{60}}R^{-\frac{19}{60}}+y^{-\frac{1}{32}}R^{-\frac{9}{32}}\log R+R^{-\frac{9}{32}}\right).$$

Wobec (62) wnosimy z (71), iż

$$(72)\qquad |S_7|<d_{16}\,y^{\frac{1}{60}}R^{-\frac{19}{60}}.$$

Podobnież udowodnilibyśmy, że

$$(73)\qquad |S_8|<d_{17}\,y^{\frac{1}{60}}R^{-\frac{19}{60}}.$$

Z rozkładu (70) wynika pozatem

$$|S_9|\leqq\sum_{m>\sqrt{R}}\frac{1}{m^{\frac{5}{4}}}\left|\sum_{n\geqq m}\cos 2\pi\left(\frac{nn_0}{k}-\frac{a_2}{4}\right)\frac{e^{4\pi i\sqrt{mny}}}{n^{\frac{5}{4}}}\right|;$$

obrawszy więc $r=n$, $N=m$, $t=2\sqrt{my}$, $\beta=\pm\frac{n_0}{4}$, otrzymujemy na zasadzie nierówności (61) i (62),

$$|S_9|<d_{18}\left(y^{\frac{1}{60}}\sum_{m<\sqrt{R}}\frac{1}{m^{\frac{49}{30}}}+y^{-\frac{1}{32}}\sum_{m<\sqrt{R}}\frac{1}{m^{\frac{25}{16}}}+\sum_{m>\sqrt{R}}\frac{1}{m^{\frac{25}{16}}}\right)$$

$$<d_{19}\left(y^{\frac{1}{60}}R^{-\frac{19}{60}}+R^{-\frac{9}{32}}\right),$$

$$(74)\qquad |S_9|<d_{20}\,y^{\frac{1}{60}}R^{-\frac{19}{60}}.$$

Traktując tak samo sumę S_{10}, mamy

$$(75)\qquad |S_{10}|<d_{21}\,y^{\frac{1}{60}}R^{-\frac{19}{60}}.$$

Zważywszy, iż oczywiście zachodzi nierówność

$$(76)\qquad |S_{11}|\leqq\sum_{m\geqq\sqrt{R}}\frac{1}{m^{\frac{5}{2}}}<d_{22}\,R^{-\frac{3}{4}}\leqq d_{22}\,y^{\frac{1}{60}}R^{\frac{19}{60}},$$

wobec (70), (72), (73), (74), (75) i (76) wnosimy

$$(77)\qquad \left|\sum_{r=R}^{\infty}\frac{c_r}{r^{\frac{5}{4}}}e^{4\pi i\sqrt{ry}}\right|<d_{23}\,y^{\frac{1}{60}}R^{-\frac{19}{60}}.$$

We wzorach (69) i (77) R jest liczbą całkowitą, spełniającą nierówność (62). Przepisując te wzory w postaci

(78) $$\left|\sum_{r\leqq R}\frac{c_r}{r^{\frac{3}{4}}}e^{4\pi i\sqrt{ry}}\right| < d_{24}\, y^{\frac{1}{60}} R^{-\frac{11}{60}},$$

(79) $$\left|\sum_{r\geqq R}\frac{c_r}{r^{\frac{5}{4}}}e^{4\pi i\sqrt{ry}}\right| < d_{25}\, y^{\frac{1}{60}} R^{-\frac{19}{60}},$$

możemy założyć, że R jest dowolną liczbą rzeczywistą w przedziale

(62) $$1\leqq R\leqq\sqrt{y}.$$

Obecnie określamy $z=z(x)$ i $R=R(x)$ w sposób następujący

(80) $$z = x^{\frac{27}{82}}\log^{-\frac{30}{41}} x \text{ lub } z = x^{\frac{27}{82}},\quad R = x z^{-2}.$$

y jest dowolną liczbą każdego z przedziałów

(81) $$x\leqq y\leqq x+z,\quad x-z\leqq y\leqq x.$$

Warunek (62) spełniony jest oczywiście dla $x\geqq d_{26}\geqq 2$. Niechaj więc będzie $x\geqq d_{26}$. Wprowadzamy wreszcie następujące skrócenie

$$\Big\{f(y)\Big\}_u^v = f(v)-f(u).$$

Mamy wtedy

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{c_r}{r^{\frac{5}{4}}}\left\{y^{\frac{3}{4}}\cos(4\pi\sqrt{ry}-\gamma)\right\}_x^{x\pm z}$$

(82) $$=\sum_{r\leqq R}+\sum_{r>R} = S_{12}+S_{13}.$$

Wobec

$$\left\{y^{\frac{3}{4}}\cos(4\pi\sqrt{ry}-\gamma)\right\}_x^{x\pm z} = \int_x^{x\pm z}\frac{d}{dy}\left(y^{\frac{3}{4}}\cos(4\pi\sqrt{ry}-\gamma)\right)dy$$

i

$$\frac{d}{dy}\Big(\;\Big) = -2\pi r^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{4}}\cos(4\pi\sqrt{ry}-\gamma)+\frac{3}{4}y^{-\frac{1}{4}}\cos(4\pi\sqrt{ry}-\gamma),$$

jest

$$|S_{12}|\leqq d_{27}\left(\left|\int_x^{x\pm z} y^{\frac{1}{4}}\sum_{r\leqq R}\frac{c_r}{r^{\frac{3}{4}}}\sin(4\pi\sqrt{ry}-\gamma)\,dy\right|+\int_x^{x+z}dy\right)$$

(83) $$< d_{28}\int_{x-z,\,x}^{x,\,x+z} y^{\frac{1}{4}}\left(\left|\sum_{r\leqq R}\frac{c_r}{r^{\frac{3}{4}}}e^{4\pi i\sqrt{ry}}\right|+1\right)dy.$$

Stosując do sumy (83) nierówność (78) i uwzględniając wartość (80) wyrazu R, otrzymamy

$$|S_{12}| < d_{29}\int_{x-z}^{x+z} y^{\frac{1}{4}}\left(y^{\frac{1}{60}}R^{\frac{1}{60}}+1\right)dy$$

$$< d_{30}\, z\, x^{\frac{1}{4}+\frac{1}{60}+\frac{11}{60}}\, z^{-\frac{11}{30}},$$

a więc

(84) $$|S_{12}| < d_{30}\, x^{\frac{9}{20}} z^{\frac{19}{30}}.$$

Z (82) wynika dalej

$$|S_{13}|\leqq 2\operatorname*{Max}_{x-z\leqq y\leqq x+z} y^{\frac{3}{4}}\left|\sum_{r>R}\frac{c_r}{r^{\frac{5}{4}}}e^{4\pi i\sqrt{ry}}\right|,$$

a zatem, na zasadzie nierówności (79), jak wyżej,

$$|S_{13}| < d_{31}\, x^{\frac{3}{4}+\frac{1}{60}-\frac{19}{60}} z^{\frac{19}{30}},$$

czyli

(85) $$|S_{13}| < d_{31}\, x^{\frac{9}{20}} z^{\frac{19}{30}}.$$

Wzory (82), (84) i (85) dają nam nierówność

(86) $$\left|\sum_{r=1}^{\infty}\frac{c_r}{r^{\frac{5}{4}}}\left\{y^{\frac{3}{4}}\cos(4\pi\sqrt{ry}-\gamma)\right\}_x^{x\pm z}\right| < d_{32}\, x^{\frac{9}{20}} z^{\frac{19}{30}}.$$

Na zasadzie (80) i (81) jest oczywiście

(87) $$\left|\left\{y^{\frac{5}{8}}\right\}_x^{x\pm z}\right| < d_{33}\, x^{\frac{5}{8}} < d_{34}\, x^{\frac{9}{20}} z^{\frac{19}{30}}.$$

Zważywszy obecnie, że szereg (29) jest bezwzględnie zbieżny i że zatem możemy stosować działanie

$$\Big\{\;\Big\}_x^{x\pm z}$$

wyraz za wyrazem, otrzymamy, posługując się ocenami (86) i (87),

$$\int_x^{x\pm z} D(k^2 u)\,du = \Big\{y\,P(y)\Big\}_x^{x\pm z} + O\big(x^{\frac{9}{20}} z^{\frac{19}{30}}\big). \tag{88}$$

Ustalamy obecnie następującą wartość na z

$$z = x^{\frac{27}{82}} \log^{-\frac{30}{41}} x. \tag{80a}$$

Wobec (5) i (80a) mamy wtedy

$$\begin{aligned}\Big\{y\,P(y)\Big\}_x^{x\pm z} &= \pm z\,P(x) + O(z^2 \log x)\\ &= \pm z\,P(x) + O\big(x^{\frac{27}{82}} \log^{\frac{11}{41}} x\big).\end{aligned} \tag{89}$$

Ponieważ wyraz drugi po prawej stronie wzoru (88) jest, w myśl założenia (80a), rzędu wielkości

$$z\,O\big(x^{\frac{27}{82}} \log^{\frac{11}{41}} x\big),$$

przeto z (88) i (89) wynika, że

$$\frac{1}{z}\int_x^{x\pm z} D(k^2 u)\,du = \pm P(x) + O\big(x^{\frac{27}{82}} \log^{\frac{11}{41}} x\big). \tag{90}$$

Ponieważ funkcja $D(u)$ nie maleje dla rosnącego u, jak to widać z określenia (8), wnosimy, że

$$\frac{1}{z}\int_x^{x+z} D(k^2 u)\,du \geqq D(k^2 x), \tag{91}$$

$$\frac{1}{z}\int_x^{x-z} D(k^2 u)\,du = -\frac{1}{z}\int_{x-z}^{x} D(k^2 u)\,du \geqq -D(k^2 x). \tag{92}$$

Ze wzorów (90), (91) i (92) wynika, iż

$$O\big(x^{\frac{27}{82}} \log^{\frac{11}{41}} x\big) \leqq D(k^2 x) - P(x) \leqq O\big(x^{\frac{27}{82}} \log^{\frac{11}{41}} x\big).$$

Udowodniliśmy więc ocenę (28).

Pokażemy jeszcze, że wzór (88) łatwo daje dla funkcji ideałowej $H(x)$ kwadratowego ciała liczbowego ocenę

$$H(x) = \rho\,x + O\big(x^{\frac{27}{82}}\big), \tag{93}$$

gdzie ρ jest pewną stałą (pozostałością funkcji Zeta ciała w jej biegunie).

Jak wiadomo, istnieje taka całkowita, zależna od ciała, liczba $k > 1$ i taka funkcja liczbowa $\chi(\mu)$, określona dla $1 \leqq \mu \leqq k$, że

$$H(x) = \sum_{\mu=1}^{k} \chi(\mu) \sum_{\nu=1}^{k} \sum_{\substack{m\,n \leqq x\\ m \equiv \mu,\ n \equiv \nu \pmod{k}}} 1,$$

skąd wynika, na zasadzie wzoru (8), iż

$$H(x) = \sum_{\mu=1}^{k} \chi(\mu) \sum_{\nu=1}^{k} D(x;\ \mu, \nu, k),$$

a więc

$$\int_x^{x\pm z} H(k^2 u)\,du = \sum_{\nu=1}^{k} \chi(\mu) \int_x^{x\pm z} D(k^2 u;\ \mu, \nu, k\ du).$$

Stosując obecnie wzór (88), otrzymujemy

$$\int_x^{x\pm z} H(k^2 u)\,du = \Big\{y\,P(y)\Big\}_x^{x\pm z} + O\big(x^{\frac{9}{20}} z^{\frac{19}{30}}\big). \tag{94}$$

Lecz, wobec trywjalnej oceny

$$H(x) = \rho\,x + O(\sqrt{x}), \tag{95}$$

wyraz $P(y)$ po prawej stronie wzoru (94) nie zawiera składnika typu $x \log x$.

Ustalając więc wartość z w sposób następujący

$$z = x^{\frac{27}{82}}, \tag{80b}$$

będziemy mieli oczywiście

$$\begin{aligned}\Big\{y\,P(y)\Big\}_x^{x\pm z} &= \pm z\,P(x) + O(z^2)\\ &= \pm z\,P(x) + z\,O\big(x^{\frac{27}{82}}\big).\end{aligned} \tag{96}$$

Wobec (80b) wyraz drugi po stronie prawej wzoru (94) jest

$$z\, O(x^{\frac{27}{82}}).$$

Wynika zatem z (94) i (96), że

$$\frac{1}{z}\int_x^{x\pm z} H(k^2 u)\, du = \pm P(x) + O(x^{\frac{27}{82}}),$$

a więc, z uwagi, że $H(u)$ jest również funkcją monotoniczną,

$$H(k^2 x) = P(x) + O(x^{\frac{27}{82}}). \tag{97}$$

Wobec (95), wyraz $P(x)$ po prawej stronie wzoru (97) jest

$$= \rho k^2 x.$$

Udowodniliśmy zatem wzór (93).

W swojej wyżej wymienionej pracy o funkcji ideałowej podałem nieco słabszą oceną

$$H(x) = \rho x + O(x^{\frac{163}{494}}).$$

Dla ciała Gaussa $K(i)$, t. j. w najważniejszym szczególnym przypadku, wzór (93) udowodniony został przez Nielanda[18]), ucznia van der Corputa. Wynik Nielanda, w wysłowieniu teorji punktów siatkowych (zagadnienie koła), brzmi jak następuje

$$\sum_{0 \leqq a^2+b^2 \leqq x} 1 = \pi x + O(x^{\frac{27}{82}}).$$

[18]) L. W. Nieland „Zum Kreisproblem" [Mathematische Annalen **98** (1928), pg. 717 — 736].

Zusammenfassung.

Es sei s eine reelle Zahl,

$$\sigma_s(m) = \sum_{d/m} d^s$$

(die Summe der s-ten Potenzen aller Teiler der natürlichen Zahl m),

$$\sigma'_s(m) = \frac{d}{ds}\sigma_s(m),$$

$$d(m) = \sum_{d/m} 1$$

(die Teileranzahl von m),

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(m, n)}{n^s} = \frac{\zeta(s)\,\sigma_{-s}(m)}{\zeta(1+s)},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta(m, n)}{n^s} = -\frac{\zeta(s)\,\sigma_{-s}(m)}{\zeta(1+s)}\left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{\zeta'(1+s)}{\zeta(1+s)} + \frac{\sigma'_{-s}(m)}{\sigma_{-s}(m)}\right),$$

$k \geqq 1$ ganz, m_0 ganz, $1 \leqq m_0 \leqq k$, C die Eulersche Konstante.

Nach S. Ramanujan[1]) ist dann

$$\sum_{\substack{m \leqq x \\ m \equiv m_0 \,(\mathrm{mod}\, k)}} d(m) = \alpha(m_0, k)\, x(\log x + 2C - 1) + \beta(m_0, k)\, x + O(x^{\frac{1}{3}} \log x). \tag{1}$$

Einen elementaren Beweis von (1) mit dem weniger scharfen Restglied $O(\sqrt{x})$ gab kürzlich T. Estermann[2]). Sind die Konstanten α und β in (1) einmal bestimmt, so folgt (1) sofort aus einem älteren Satze E. Lan-

[1]) Messenger of Mathematics **45** (1916), S. 83.
[2]) The Journal of the London Mathematical Society **3** (1928), S. 247 — 250.

daus[3]). Durch Verschärfung dieses Satzes lässt sich, wie ich in dieser Arbeit zeige, das Restglied in (1) durch

$$O(x^{\frac{27}{82}} \log^{\frac{11}{41}} x)$$

ersetzen. Für den wichtigsten Spezialfall $k = 1$, $m_0 = 1$ (Dirichletsches Teilerproblem) ist diese Abschätzung, also

$$\sum_{m \leqq x} d(m) = x(\log x + 2C - 1) + O(x^{\frac{27}{82}} \log^{\frac{11}{41}} x),$$

von J. G. van der Corput[4]) bewiesen. Als wesentliches Hilfsmittel wird hierbei Satz über Diophantische Näherungen[5]) benutzt, der auch bei mir zur Anwendung kommt.

Für die Idealfunktion eines quadratischen Zahlkörpers leite ich, ebenfalls unter Zuhilfenahme des van der Corputschen Satzes die Abschätzung ab

$$H(x) = \rho x + O(x^{\frac{27}{82}}), \tag{2}$$

wo ρ eine vom Körper abhängige Konstante (das Residuum der Zetafunktion des Körpers in ihrem Pole) ist. Auch der wichtigste Spezialfall von (2) ist bereits durch Nieland[6]), einen Schüler van der Corputs, bekannt. Nimmt man den durch i erzeugten Körper und deutet $H(x)$ als Gitterpunktanzahl, so ist, wie Nieland gezeigt hat,

$$\sum_{0 \leqq a^2 + b^2 \leqq x} 1 = \pi x + O(x^{\frac{27}{82}}).$$

---

3) Wiener Akademieberichte, Abt. II-a **121** (1912), S. 2283.

4) Mathematische Annalen **98** (1928), S. 697 — 716.

5) J. G. van der Corput „Neue zahlentheoretische Abschätzungen. Zweite Mitteilung“ [Mathematische Zeitschrift **29** (1929), pg. 397 — 426], Satz 6, S. 404. Ich wende den etwas handlicheren und präziseren Satz 5, S. 403 an.

6) l. c. 3), S. 717 — 736.