ZYGMUNT ZALCWASSER.

O funkcjach Köpckego.

Sur les fonctions de Köpcke.

---

§ 1. Wstęp

Funkcją Köpckego nazywam każdą funkcję $f(x)$ różniczkowalną w pewnym przedziale $I = (a \leqq x \leqq b)$ i spełniającą warunek

(α) Zbiór zer pochodnej $f'(x)$ jest wszędziegęsty w I.

Köpcke pierwszy udowodnił, że funkcje takie istnieją. Poza osobliwością (α) mogą mieć one jeszcze i inne interesujące własności. Istnieją więc, np. funkcje Köpckego:

I. stale rosnące [1]),
II. posiadające pantachiczne przedziały stałości [2]),
III. pantachicznie oscylujące [3]),
IV. posiadające pantachiczne maxima właściwe, ale nie posiadające wcale minimów właściwych [4])

W §§ 2—5 podaję proste przykłady takich funkcyj. Posługuję się jednolitą i przejrzystą metodą geometryczną, będącą, jak mi się wydaje, pewnem uproszczeniem klasycznych przepisów konstrukcyjnych Köpckego, Brodéna, Schöenfliessa.

W §§ 6—8 udowadniam pewien wynik nowy:

---

[1]) Pompeiu, Math. Ann. 63.

[2]) Mazurkiewicz, Prace Mat.-Fizyczne Tom XXVIII.

[3]) Köpcke, Math. Ann. 35; Brodén: Ofr. Vet. Ak. förhandl. Stockholm 57; Szonfliess: Math. Ann. 54; Pereno: Giorn. mat. (2) 4; Mazurkiewicz: „O budowie funkcyj różniczkowalnych pantachicznie oscyluiących" I i II. Spraw. Tow. Nauk. Warsz. 13. XII. 1917 i 7. III. 1918 r.

[4]) Mazurkiewicz, Spraw. Tow. Nauk. Warsz. r. 1919 (dotąd nie wyszło z druku).

„Mając dane dwa *dowolne* zbiory przeliczalne i rozłączne: $\overline{A}$ i $\overline{B}$ położone wewnątrz odcinka $I=(a,b)$, można zawsze zbudować funkcję $H(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ różniczkowalną w I, która

1⁰ ma maxima właściwe we wszystkich punktach zbioru $\overline{A}$,
2⁰ ma minima właściwe we wszystkich punktach zbioru $\overline{B}$,
3⁰ nie posiada żadnych extremów właściwych poza zbiorem $(\overline{A}+\overline{B})$.

§ 2. Konstrukcja funkcji p. Pompeiu.

Funkcja p. Pompeiu jest to funkcja $F(x)$ ciągła w przedziale $I=(0,1)$ posiadająca własności następujące:

(a) $F(x)$ stale rośnie w przedziale $I=(0,1)$,

(b) $F'(x)$ istnieje dla każdego $x \in I$,

(c) $F'(x) \leqq M$ $(M$ — stała dodatnia),

(d) Zbiór zer funkcji $F'(x)$ jest wszędziegęsty w I

Określenie funkcji szukanej. Dajemy sobie dwa ciągi liczb $\{\gamma_n\}$, $\{\varepsilon_n\}n=0,1,\ldots.$ spełniających warunki:

(1) $$0<\gamma_n<\gamma_{n+1}<1;\quad \lim_{n\to\infty}\gamma_n=1$$

(2) iloczyn $\prod_{n=0}^{\infty}\gamma_n=0$ jest rozbieżny do zera $\left(\text{np. } \gamma_n=\frac{n+1}{n+2}\right)$

(3) $$0<\varepsilon_{n+1}<\varepsilon_n<\tfrac{1}{2}$$

(4) $$\lim_{n\to\infty}\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n}=0\quad \left(\text{możnaby wziąć, np. } \varepsilon_n=\frac{1}{(n+3)\,!}\right).$$

Z warunku (4) wynika, oczywiście, że szereg

(5) $$\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n \quad \text{jest zbieżny.}$$

Krzywą szukaną $F(x)$ aproksymujemy przez ciąg łamanych

$$\{f_n(x)\},\quad n=0,1,2,\ldots.$$

które określamy indukcyjnie,
to f_0 składa się z jednego odcinka δ:

(6) $$f_0(x)=x,$$

Łamana f_1 będzie utworzona z 5 odcinków δ_i $(i=1,2,3,4,5)$, przechodząc do f_2, zastępujemy każdy z nich przez 5 nowych odcinków, np. δ_1 przez odcinki δ_{1i} $(i=1,2,3,4,5)$ i t. d. Ogólnie łamana f_n będzie się składała z 5^n odcinków

$$\delta_{c_1 c_2 \ldots c_n}=\delta_N,\quad c_s=1,2,3,4,5.$$

N oznacza dla krótkości grupę n wskaźników $c_1, c_2, \ldots c_n$.

Przypuśćmy, że łamana f_n została już określona i niech $\delta_N=AB=A_N B_N$ będzie jednym z odcinków tej łamanej. Rzut odcinka δ_N na oś x-ów jest pewnym przedziałem $I^*_N=(a_N, b_N)$; spółczynnik kierunkowy odcinka δ_N oznaczymy przez $m_N=\operatorname{tang}(\delta_N, Ox)$; długość przedziału I^*_N oznaczymy przez $l_N=b_N-a_N$.

Przechodząc do f_{n+1}, zastępujemy odcinek $\delta_N=A\,B$ przez łamaną $A\,C\,D\,E\,F\,B=A_N\,C_N\,D_N\,E_N\,F_N\,B_N$ o wierzchołkach

(7) $$\begin{cases} A\colon\; a_N & ,\; f_n(a_N) \\ C\colon\; a_N+l_N.\frac{\varepsilon_n}{2} & ,\; f_n(a_N)+l_N.m_N.\frac{\varepsilon_n}{2}.\gamma_n \\ D\colon\; a_N+\frac{1}{2}(1-\varepsilon_n)\,l_n, & f_n(a_N)+\frac{1}{2}\,l_N.m_N(1-\varepsilon_n\gamma_n) \\ E\colon\; a_N+\frac{1}{2}(1+\varepsilon_n)\,l_n, & f_n(a_N)+\frac{1}{2}\,l_N.m_N(1+\varepsilon_n\gamma_n) \\ F.\; a_N+l_N(1-\frac{\varepsilon_n}{2}) & ,\; f_n(a_N)+l_N\,m_N.(1-\frac{\varepsilon_n}{2}.\gamma_n) \\ B\colon\; a_N+l_N=b_N & ;\; f_n(a_N)+l_N\,m_N=f_n(b_N) \end{cases}$$

$$A\,C=\delta_{N1},\; C\,D=\delta_{N2},\; D\,E=\delta_{N3},\; E\,F=\delta_{N4},\; F\,B=\delta_{N5}.$$

Przekształcenie to nazwiemy $\chi(\varepsilon_n, \gamma_n)$; stosujemy je do wszystkich odcinków łamanej f_n. Wzór (6) i przekształcenia χ określają jednoznacznie ciąg $\{f_n(x)\}$.

Z wzorów (7) odczytać możemy:

$(8)_1$ $$m_{N1}=m_{N3}=m_{N5}=m_N.\gamma_n$$

$(8)_2$ $$m_{N2}=m_{N4}.=m_N.\frac{1-2\,\varepsilon_n\gamma_n}{1-2\,\varepsilon_n}$$

Innemi słowy: bądź

$(9)_1$ $$f'_{+(n+1)}(x)=f'_{+n}(x).\gamma_n\,^{1)}\quad \text{bądź}$$

[1]) f'_{+} oznacza pochodną prawostronną; analogiczne wzory zachodzą dla pochodnych lewostronnych f'_{-}.

$$(8)_2 \qquad f'_{+(n+1)}(x) = f'_{+n}(x) \cdot \frac{1-2\varepsilon_n \gamma_n}{1-2\varepsilon_n}.$$

Stąd wynika natychmiast dla każdego x i n:

$$(10) \qquad f'_{+n}(x) = \prod_{s=0}^{n-1} \beta_s, \quad (f'_{+0} = 1), \quad \text{gdzie}$$

$$(11)_1 \qquad \text{bądź} \quad \beta_s = \gamma_s,$$

$$(11)_2 \qquad \text{bądź} \quad \beta_s = \frac{1-2\varepsilon_s \gamma_s}{1-2\varepsilon_s}$$

Ze względu na (5) iloczyn

$$(12) \qquad \prod_{s=0}^{\infty} \frac{1-2\varepsilon_s \gamma_s}{1-2\varepsilon_s} = L \quad \text{jest zbieżny.}$$

Wzory (10), $(11)_1$, $(11)_2$, (12) dają

$$(13) \qquad 0 < f'_{+n}(x) < L \quad \text{dla każdego } x \text{ i } n$$

Analogicznie dla każdego $x \in l_P^*$ $(P = c_1, c_2, \ldots c_p)$ i $n \geqq p$

$$(14) \qquad 0 < f'_{+n}(x) \leqq m_P \,.\, L_p, \quad \text{gdzie}$$

$$(15) \qquad L_p = \prod_{s=p}^{\infty} \frac{1-2\varepsilon_s \gamma_s}{1-2\varepsilon_s}.$$

Dowiedziemy teraz, że:

1⁰. Ciąg $\{f_n(x)\}$ jest zbieżny jednostajnie w przedziale $I = (0, 1)$ Istotnie z konstrukcji $\chi(\varepsilon_n, \gamma_n)$ widać, że dla $x \in l_N^*$

$$(16) \qquad |f_{n+1}(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon_n}{2} \cdot l_N \cdot m_N < \frac{\varepsilon_n}{2} \cdot l_N \, L \leqq \frac{\varepsilon_n}{2} \cdot L$$

Ponieważ szereg $\Sigma\, \varepsilon_s$ jest zbieżny, więc istnieje

$$(17) \qquad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = F(x) \quad \text{dla każdego } x \in I$$

i $F(x)$ jest funkcją ciągłą. Dla $x \in l_N^*$ otrzymujemy z (16)

$$(18) \qquad |F(x) - f_n(x)| < \tfrac{1}{2} \cdot L \,.\, \sum_{t=n}^{\infty} \varepsilon_t \, l_T < \varepsilon_n \,.\, l_N \,.\, L$$

ze względu na $\varepsilon_{t+1} < \varepsilon_t$ i $l_{T+1} < \frac{1}{2} l_T$; l_T^* $(T = c_1 c_2 \ldots c_t)$ i l_{T+1}^* $(T + 1 = c_1 c_2 \ldots . c_t c_{t+1})$ są to te przedziały rzędu t i $(t+1)$, które zawierają punkt x.

2⁰. Funkcja $F(x)$ stale rośnie w przedziale $I = (0, 1) = l^*$.

Że F jest funkcją niemalejącą, to wynika już stąd, że funkcje f_n stale rosną. $F(x)$ nie może też mieć przedziałów stałości, gdyż krzywa $y = F(x)$ przechodzi przez wszystkie wierzchołki każdej łamanej $y_n = f_n(x)$

3⁰. Ciągi $\{f'_{+n}(x)\}$ i $\{f'_{-n}(x)\}$ są wszędzie zbieżne do tej samej granicy. Z wzoru (10) i założeń (2), (5) wynika zbieżność iloczynu $\prod_{s=0}^{\infty} \beta_s$ dla każdego x i równość

$$(19) \qquad \lim_{n\to\infty} f'_{+n}(x) = \prod_{s=0}^{\infty} \beta_s = G(x).$$

Jeżeli x nie jest żadnym a_N, to dla każdego $n: f'_{+n}(x) = f'_{-n}(x)$ $\lim f'_{-n}(x) = G(x)$. Jeżeli zaś $x = a_N$, to $G(x) = 0$, gdyż w iloczynie (19) dla $s \geqq n$ mamy stale $\beta_s = \gamma_s$. Jednocześnie $\lim f'_{-n}(x) = 0$.

Mamy więc dla każdego x

$$(20) \qquad \lim_{n\to\infty} f'_{+n}(x) = \lim_{n\to\infty} f'_{-n}(x) = G(x).$$

4⁰. Dla każdego $x \in I = (0, 1)$ istnieje $F'(x)$ oraz

$$(21) \qquad F'(x) = G(x)$$

W przypadku $G(x) = 0$ dowód jest bardzo łatwy. Jeżeli x nie jest krańcem jakiegoś przedziału l_N, to x należy do każdego z przedziałów określonego ciągu

$$(22) \qquad l_{c_1}^*, \; l_{c_1 c_2}^*, \ldots . \, l_N^*, \ldots . \, (N = c_1 c_2 \ldots c_n); \; n = 1, 2, \ldots ..$$

Dajemy sobie dowolnie $\sigma > 0$ i dobieramy takie p, żeby

$$(23) \qquad 0 < f'_p(x) = m_P < \sigma$$

Wtedy na mocy wzoru (14), dla każdego $x' \in l_P$ i $n \geqq p$:

$$0 < \frac{f_n(x') - f_n(x)}{x' - x} < \sigma \,.\, L_p \leqq \sigma \,.\, L$$

Stąd, biorąc $n \to \infty$, mamy:

$$(24) \qquad 0 < \frac{F(x') - F(x)}{x' - x} \leqq \sigma \,.\, L$$

Jest więc $F'(x) = 0$. Jeżeli x jest pewnem a_N, to analogicznie sprawdzamy kolejno, że: $F'_+(x) = 0$ i $F'_-(x) = 0$.

Uzasadnienie równości (21) w przypadku $G(x) \neq 0$ poprzedzimy 3 lemmatami pomocniczemi.

Lemmat I. Dla każdego $x \in l_N^*$ $(a_N < x < b_N)$ mamy

$$(25)_{1,2} \quad \frac{f_{n+1}(b_N) - f_{n+1}(x)}{b_N - x} \geqq m_N \cdot \gamma_n; \quad \frac{f_{n+1}(x) - f_{n+1}(a_N)}{x - a_N} \geqq m_N \cdot \gamma_n$$

Dla dowodu wystarczy zauważyć, że przedziale l_N^* stale $f'_{n+1}(x) \geqq m_N \cdot \gamma_n$ (wzory (9_1) i $(9)_2$).

Lemmat II. Jeżeli x należy do l_N^* ale nie należy do l_{N1}^* : $x \in l_N^* - l_{N1}$, to

$$(26) \quad \frac{F(x) - F(a_N)}{x - a_N} \geqq m_N \cdot \gamma_n - \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} \cdot L.$$

Istotnie. Niech $x \in l_{Nc}$ $(c > 1)$,

$$(27) \quad F(x) - F(a_N) = [F(a_{Nc}) - F(a_N)] + [F(x) - F(a_{Nc})].$$

Otóż:

$$(28) \quad F(a_{Nc}) - F(a_N) = f_{n+1}(a_{Nc}) - f_{n+1}(a_N), \ a$$

$$(29) \quad F(x) - F(a_{Nc}) \geqq f_{n+1}(x) - f_{n+1}(a_{Nc}) - \varepsilon_{n+1} \cdot l_{Nc} \cdot L$$

na zasadzie oceny (18). Wzory (27), (28) i (29) dają

$$(30) \quad F(x) - F(a_N) \geqq [f_{n+1}(x) - f_{n+1}(a_N)] - \varepsilon_{n+1} \cdot l_{Nc} \cdot L \geqq$$
$$\geqq m_N \cdot \gamma_n (x - a_N) - \varepsilon_{n+1} \cdot l_{Nc} \cdot L \quad \text{(ze względu na } (25)_2)$$

Wreszcie

$$(31) \quad l_{Nc} < \tfrac{1}{2} \cdot l_N = \frac{l_{N1}}{\varepsilon_n} \leqq \frac{x - a_N}{\varepsilon_n} \quad \text{(wzory (7))}$$

Z (30) i (31) wynika nierówność

$$F(x) - F(a_N) \geqq \left[m_N \cdot \gamma_n - \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} \cdot L \right] (x - a_N)$$

równoważna (26). Nierówność (26) pozostanie prawdziwa, gdy zastąpimy a_N przez b_N, a $x \in l_N^* - l_{N5}$.

Lemmat III. Jeżeli x należy do l_N^*, ale nie należy do $l_{N\,e_1 e_2 \ldots \ldots e_{h+1}}^*$ gdzie $e_1 = e_2 = \ldots\ldots = e_{h+1} = 1$, to

$$(32)_h \quad \frac{F(x) - F(a_N)}{x - a_N} \geqq m_N \cdot \gamma_n \cdot \gamma_{n+1} \ldots\ldots \gamma_{n+h} - \rho_n \cdot L, \quad \text{gdzie}$$

$$(33) \quad \rho_n = \text{Maxim.} \frac{\varepsilon_{s+1}}{\varepsilon_s} \quad \text{dla} \quad s \geqq n \quad (\lim_{n\to\infty} \rho_n = 0$$

na zasadzie wzoru (4)).

Dowód. Nierówność $(32)_0$ jest prawdziwa na zasadzie Lemmatu II. Załóżmy prawdziwość $(32)_{h-1}$. Rozpatrujemy dwa przypadki:

$$x \text{ nie należy do } l_{N\,e_1 e_2 \ldots\ldots e_h}^*$$

$$x \in l_{N\,e_1 e_2 \ldots\ldots e_h}^* - l_{N\,e_1 e_2 \ldots\ldots e_{h+1}}^*$$

W pierwszym przypadku na zasadzie $(32)_{h-1}$

$$\frac{F(x) - F(a_N)}{x - a_N} \geqq m_N \cdot \gamma_n \cdot \gamma_{n+1} \ldots \gamma_{n+h-1} - \rho_n \cdot L$$

skąd a fortiori wynika $(32)_h$. W drugim przypadku stosujemy Lemmat II do przedziału $l_{N\,e_1 e_2 \ldots\ldots e_h}^*$:

$$\frac{F(x) - F(a_N)}{x - a_N} \geqq m_{N\,e_1 e_2 \ldots\ldots e_h} \cdot \gamma_{n+h} - \frac{\varepsilon_{n+h+1}}{\varepsilon_{n+h}} \cdot L$$

skąd, ze względu na: $m_{N\,e_1 e_2 \ldots\ldots e_h} = m_N \cdot \gamma_n \cdot \gamma_{n+1} \ldots\ldots \gamma_{n+h-1}$ (wzór $(8)_1$) znów wynika $(32)_h$.

Nierówność $(32)_h$ pozostanie prawdziwa, jeżeli zastąpić a_N przez b_N i przyjąć $e_1 = e_2 = \ldots\ldots = e_{h+1} = 5$.

Mając udowodnione lemmaty pomocnicze, wracamy do dowodu równości (21) w przypadku $G(x) \neq 0$. Niech x należy do każdego z przedziałów ciągu:

$$(22) \quad l_{c_1}^*, \ l_{c_1 c_2}^*, \ldots, l_N^*, \ldots\ldots (N = c_1 c_2 \ldots c_n), \ n = 1, 2, \ldots$$

mamy więc:

$$l^*_N = (a_N, b_N); \ a_N \leqq a_{N+1} < x < b_{N+1} \leqq b_N; \ \lim_{n\to\infty} a_N = \lim_{n\to\infty} b_N = x$$

Ponieważ $G(x) = \lim_{n\to\infty} f'_n(x) = \lim_{n\to\infty} m_N$, więc dla każdego $n \geqq p$ będzie

$$(34) \quad G(x) \cdot (1 - \sigma_p) \leqq m_N \leqq G(x) \cdot (1 + \sigma_p),$$

przyczem

$$(35) \quad \sigma_p > 0 \quad \text{i} \quad \lim_{p\to\infty} \sigma_p = 0$$

Rozumując analogicznie jak przy wyprowadzeniu nierówności (24), otrzymujemy dla $x' \in l^*_P$:

$$(36) \quad \frac{F(x') - F(x)}{x' - x} \leqq m_P \cdot L_p \leqq G(x) \cdot (1 + \sigma_p) \cdot L_p,$$

skąd, że względu na $\lim_{p\to\infty} L_p = 1$ [wzór (15)]:

$$\text{(37)} \qquad \limsup_{x' \to x} \frac{F(x') - F(x)}{x' - x} \leqq G(x)$$

Pozostaje okazać, że

$$\text{(38)} \qquad \liminf_{x' \to x} \frac{F(x') - F(x)}{x' - x} \geqq G(x)$$

Ograniczamy się znów do $x' \in l_P^*$, zakładamy dla ustalenia uwagi, że $x' > x$ i odnajdujemy $r \geqq p$ takie, że

$$\text{(39)} \qquad b_{R+1} < x' \leqq b_R$$

W przypadku rozważanym obecnie nie jest możliwe, aby było $b_{N+1} = b_N$ dla każdego $n \geqq r+1$, gdyż wtedy byłoby $x = \lim b_N = b_{R+1}$ i $G(x) = 0$. Istnieje więc h naturalne takie, że

$$\text{(40)} \qquad b_{R+H+1} < b_{R+H} = b_{R+H-1} = b_{R+H-2} = \ldots = b_{R+1}\ ^{1)}$$

Ocenimy teraz różnicę $[F(x') - F(b_N)]$, ograniczając się do $n > r+h$ (następnie weźmiemy $n \to \infty$). Mamy

$$\text{(41)} \qquad F(x') - F(b_N) = [F(x') - F(b_{R+1})] + [F(b_{R+1}) - F(b_N)]$$

$$\text{(42)} \qquad F(b_{R+1}) - F\, b_N) = \sum_{t=r+1}^{n-1} [F(b_T) - F\, b_{T+1})]$$

Otóż:

$$F(b_T) - F(b_{T+1}) = f_{t+1}(b_T) - f_{t+1}(b_{T+1}) \geqq m_T \,.\, \gamma_t (b_T - b_{T+1}) \geqq$$
$$\geqq G(x)(1 - \sigma_p) \,.\, \gamma_p (b_T - b_{T+1}) \quad [\textit{Lemmat I;}\ (34);\ (1)]$$

Sumując te nierówności dla $r+1 \leqq t \leqq n-1$, otrzymujemy

$$\text{(43)} \qquad F(b_{R+1}) - F(b_N) \geqq (b_{R+1} - b_N). \quad G(x) \,.\, (1 - \sigma_p) \,.\, \gamma_p$$

Część przyrostu funkcji F, odpowiadająca przedziałowi (b_N, b_{R+1}), jest taka jak potrzeba. Teraz $[F(x') - F(b_{R+1})]$. Niech.

$$\text{(44)} \qquad b_{R+1} = b_{R,c} \quad \text{i} \quad x' \in l_{R,d}^* \quad (d > c \geqq 1 \quad \text{wobec (39)}).$$

$$\text{(45)} \qquad F(x') - F(b_{R+1}) = [F(x') - F(a_{R,d})] + [F(a_{R,d}) - F(b_{R+1})]$$

Przyrost funkcji F w przedziale $(b_{R+1}, a_{R,d})$ jest znów taki jak trzeba, gdyż:

[1] $R+H$ oznacza grupę wskaźników: $c_1 c_2 \ldots c_r \ldots c_{r+h}$
$R+H+1$ oznacza grupę: $c_1 c_2 \ldots c_{r+h+1}$ i t. d.

$$\text{(46)} \quad F(a_{R,d}) - F(b_{R+1}) = f_{r+1}(a_{R,d}) - f_{r+1}(b_{R+1}) \geqq m_\Lambda \,.\, \gamma_r (a_{R,d} - b_{R+1}) \geqq$$
$$\geqq G(x)(1 - \sigma_p) \,.\, \gamma_p (a_{R,d} - b_{R+1}).$$

Co się tyczy przyrostu $[F(x') - F(a_{R,d})]$, to mówiąc ogólnikowo, będzie tak: jeżeli x' jest bardzo bliskie $a_{R,d}$, to można będzie wogóle pominąć ten przyrost; w przeciwnym razie przyrost ten znów będzie taki jak trzeba. Sprecyzujmy to. Rozpatrujemy dwa przypadki:

$$(\dagger) \qquad x' \in l^*_{R\,d\,e_1\,e_2 \ldots e_{h+1}}; \quad \text{gdzie} \quad e_1 = e_2 = \ldots e_{h+1} = 1$$

$$(\dagger\dagger) \qquad x' \in l^*_{R\,d} - l^*_{R\,d\,e_1\,e_2 \ldots e_{h+1}}$$

W pierwszym przypadku z wzorów (43) i (46), otrzymujemy

$$F(x') - F(b_N) \geqq F(a_{R,d}) - F(b_N) = [F(b_{R+1}) - F(b_N)]$$
$$+ [F(a_{R,d}) - F\, b_{R+1})] \geqq G(x) \,.\, (1 - \sigma_p) \,.\, \gamma_p (a_{R,d} - b_N), \text{ skąd}$$

$$\text{(47)} \qquad \frac{F(x') - F(b_N)}{x' - b_N} \geqq G(x) \,.\, (1 - \sigma_p) \,.\, \gamma_p \,.\, \left[1 - \frac{x' - a_{R,d}}{x' - b_N}\right]$$

W przypadku rozpatrywanym $(\dagger)$:

$$\text{(48)} \qquad x' - a_{R,d} \leqq l_{R\,d\,e_1\,e_2 \ldots e_{h+1}} = l_{R\,d} \,.\, \prod_{t=r}^{r+h} \tfrac{1}{2} \,.\, \varepsilon_{t+1} < l_R \,.\, \prod_{t=r}^{r+h} \tfrac{1}{2} \,.\, \varepsilon_{t+1}$$

(na zasadzie związku ogólnego: $l_{U,1} = l_U \,.\, \frac{1}{2}\varepsilon_u$ (wzory (7)))

Natomiast

$$\text{(49)} \qquad x' - b_N \geqq b_{R+H} - b_{R+H+1} \geqq x \,.\, \varepsilon_{r+h} \,.\, l_{R+H} \geqq l_R \,.\, \prod_{t=r}^{r+h} \tfrac{1}{2} \,.\, \varepsilon_t$$

(gdyż w każdym razie $l_{U,c} \geqq l_U \,.\, \frac{1}{2} \,.\, \varepsilon_u$).

Z (48) i (49) otrzymujemy

$$\frac{x' - a_{R\,d}}{x' - b_N} \leqq \prod_{t=r}^{r+h} \frac{\varepsilon_{t+1}}{\varepsilon_t} = \frac{\varepsilon_{r+h+1}}{\varepsilon_r} \leqq \rho_p; \quad [(33)].$$

Wobec tego nierówność (47) daje

$$\text{(50)} \qquad \frac{F(x') - F(b_N)}{x' - b_N} \geqq G(x) \,.\, (1 - \sigma_p)\, \gamma_p \,.\, (1 - \rho_p), \text{ a biorąc } n \to \infty$$

$$\text{(50')} \qquad \frac{F(x') - F(x)}{x' - x} \geqq G(x) \,.\, (1 - \sigma_p) \,.\, \gamma_p \,.\, (1 - \rho_p)$$

Rozważmy teraz przypadek $(\dagger\dagger)$. Na zasadzie Lemmatu III.

$$\text{(51)} \qquad F(x') - F(a_{R,d}) \geqq (x' - a_{R,d}) \{ m_{R\,d} \,.\, \gamma_{r+1} \,.\, \gamma_{r+2} \ldots \gamma_{r+h+1} - \rho_{r+1} \,.\, L \}$$

Otóż:

$$m_{R\,d} \geqq m_R\,.\,\gamma_r \geqq G\,(x)\,.\,(1-\sigma_p)\,.\,\gamma_p.$$

$$\gamma_{r+1}\,.\,\gamma_{r+2}\ldots\gamma_{r+h-1} = \frac{m_{R+H}}{m_{R+1}} \geqq \frac{1-\sigma_p}{1+\sigma_p} \text{ [ze względu na (40) i (34)]}$$

$$\gamma_{r+h}\,.\,\gamma_{r+h+1} \geqq \gamma_p^2$$

więc nierówność (51) możemy zastąpić przez:

$$(52)\quad F\,(x') - F\,(a_{R,\,d}) \geqq (x'-a_{R,\,d})\,.\left\{G(x)\,.\,\frac{(1-\sigma_p)^2}{1+\sigma_p}\,\gamma_p^3 - \rho_p\,.\,L\right\}$$

$$= (x'-a_{R,\,d})\,.\,K_p\ ^{1)}$$

W nierównościach (43) i (46) zastąpmy czynnik $G\,(x)\,.\,(1-\sigma_p)\,\gamma_p$ przez mniejszy od niego czynnik K_p i tak wzmocnione nierówności dodajemy do (52); otrzymamy

$$(53)\quad F\,(x') - F\,(b_N) \geqq (x'-b_N)\,K_p, \quad \text{skąd, biorąc } n\to\infty$$

$$(53')\quad \frac{F\,(x')-F\,(x)}{x'-x} \geqq K_p = G\,(x)\,.\,\frac{(1-\sigma_p)^2}{1+\sigma_p}\,.\,\gamma_p^3 - \rho_p\,.\,L$$

W obu przypadkach (†) i (††) otrzymujemy więc nierówności postaci

$$(54)\quad \frac{F\,(x')-F\,(x)}{x'-x} \geqq G\,(x) - \omega\,(p,\,x) \quad \text{[są to nierówności (50') i (53')]}$$

gdzie $\omega\,(p,\,x) > 0$ nie zależy od x' i przy stałym x: $\lim\limits_{p\to\infty} \omega\,(p,\,x) = 0$ (albowiem: $\sigma_p \to 0$, $\rho_p \to 0$; $\gamma_p \to 1$)

Nierówność typu (54) jest więc prawdziwa dla każdego $x' \in I^*_p$. Wynika stąd natychmiast własność żądana (38). Nierówności (37) i (38) dają $F'\,(x) = G\,(x)$ c. b. d. o.

5^0. Zbiór zer funkcji $F'\,(x)$ jest wszędziegęsty *w* $I = (0,\,1)$, gdyż zawiera on wszystkie punkty $x = a_N$, które same tworzą już mnogość wszędziegęstą na I.

W ten sposób sprawdziliśmy już że funkcja $F\,(x)$ czyni zadość przepisanym warunkom (*a*), (*b*), (*c*) i (*d*).

Uwaga. Funkcja $F\,(x)$ czyni zadość warunkowi Lipschitza, gdyż

$$0 \leqq F'\,(x) = G\,(x) \leqq L \quad \text{[patrz (13)].}$$

[1]) Przez K_p oznaczamy wyrażenie w nawiasie { }

§ 3. Funkcja różniczkowalna niemalejąca, posiadająca pantachiczne przedziały stałości.

Konstrukcja jest bardzo podobna do poprzedniej. Zachowujemy oznaczenia § 2.

Funkcję szukaną aproksymujemy przez ciąg łamanych

$$\{f_n\,(x)\} \quad n = 0,\,1,\,2,\,\ldots$$

$$(1)\qquad f_0\,(x) = x.$$

Przejście od łamanej f_n, która znów składa się z 5^n odcinków

$$\delta_{c_1\,c_2\ldots c_n} = \delta_N \quad (N = c_1\,c_2\ldots c_n) \quad c_s = 1,\,2,\,3,\,4,\,5.,$$

do łamanej f_{n+1} uskutecznia się teraz przy pomocy konstrukcji podstawowej x $(\varepsilon_n,\,\gamma_n,\,\vartheta_n)$, która przekształca odcinek $\delta_N = A\,B = A_N\,B_N$ na łamaną $A\,C\,D\,E\,F\,B = A_N\,C_N\,D_N\,E_N\,F_N\,B_N$ o wierzchołkach:

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{lll}
A: & a_N & ,\ f_n\,(a_N) \\
C: & a_N + l_N\,.\,\frac{\varepsilon_n}{2} & ,\ f_n\,(a_N) + l_N\,.\,m_N\,.\,\frac{\varepsilon_n}{2}\,.\,\gamma_n \\
D: & a_N + \frac{1}{2}\,.\,l_N\,(1-\vartheta_n), & f_n\,(a_N) + \frac{1}{2}\,l_N\,.\,m_N \\
E: & a_N + \frac{1}{2}\ l_N\,(1+\vartheta_n), & f_n\,(a_N) + \frac{1}{2}\,l_N\,.\,m_N \\
F: & a_N + l_N\left(1-\frac{\varepsilon_n}{2}\right) & ,\ f_n\,(a_N) + l_N\,m_N\left(1-\frac{\varepsilon_n}{2}\,.\,\gamma_n\right) \\
B: & a_N + l_N = b_N & ,\ f_d\,(a_N) + l_N\,m_N = f_n\,(b_N)
\end{array}\right.$$

Liczby ε_n i γ_n spełniają te same warunki co w §-ie poprzednim, liczby zaś ϑ_n określamy jak następuje. Ponieważ iloczyn $\prod\limits_{s=0}^{\infty} \gamma_s = 0$ jest rozbieżny do zera, więc przy każdem $n \geqq 0$ istnieje najmniejsza liczba naturalna λ_n taka, że

$$(3)\qquad \prod_{s=n+1}^{\lambda_n} \gamma_s < \tfrac{1}{2}\ ^{1)}$$

Mając λ_n, kładziemy

$$(4)\qquad \vartheta_n = \frac{1}{n+1}\,.\prod_{s=n}^{\lambda_n} \frac{\varepsilon_s}{2}$$

[1]) Zamiast $\frac{1}{2}$ możnaby wziąść jakąkolwiek liczbę $0 < \alpha < 1$.

Oczywiście

(5) $$0 < \vartheta_{n+1} < \vartheta_n \leqq \tfrac{1}{2} \cdot \varepsilon_n$$

Z wzorów (2) odczytać możemy

(6)$_1$ $$m_{N1} = m_{N5} = m_N \cdot \gamma_n$$

(6)$_2$ $$m_{N2} = m_{N4} = m_N \cdot \frac{1 - \varepsilon_n \gamma_n}{1 - \varepsilon_n - \vartheta_n}$$

(6)$_3$ $$m_{N3} = 0$$

Skąd, jak w §-ie 2:

(7) $$f'_{+n}(x) = \prod_{s=0}^{n-1} \beta_s, \quad \text{gdzie}$$

(8)$_{1, 2, 3}$. $$\beta_s = \gamma_s \text{ bądź } \frac{1 - \varepsilon_s \gamma_s}{1 - \varepsilon_s - \vartheta_s} \text{ bądź } 0$$

Z (7) wynika dla każdego x i n:

(9) $$0 \leqq f'_{n+}(x) \leqq L, \quad \text{gdzie}$$

(10) $$L = \prod_{s=0}^{\infty} \frac{1 - \varepsilon_s \gamma_s}{1 - \varepsilon_s - \vartheta_s}$$

Analogicznie dla $x \in l^*_P$ $(P = c_1 c_2 \dots c_p)$ i $n \geqq p$

(11) $$0 \leqq f'_{+n}(x) \leqq m_P . L_p, \quad \text{gdzie}$$

(12) $$L_p = \prod_{s=p}^{\infty} \frac{1 - \varepsilon_s \gamma_s}{1 - \varepsilon_s - \vartheta_s}$$

Dowody punktów:

1^0. Istnieje:

(13) $$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = F(x); \quad F(x) \text{ — funkcja ciągła}$$

(14) $$|f_n(x) - F(x)| < \varepsilon_n . l_N . L \quad \text{dla każdego } x \in l^*_N$$

2^0 $F(x)$ jest funkcją niemalejącą

3^0 Istnieje

(15) $$\lim_{n \to \infty} f'_{+n}(x) = \lim_{n \to \infty} f'_{-n}(x) = G(x) \quad \text{dla każdego } x \in I = (0, 1)$$

są całkiem analogiczne do dowodu odpowiednich punktów w § 2.

Rozpatrzymy bliżej tylko 4^0;

4^0. (16) $$F'(x) = G(x) \quad \text{dla każdego } x \in I$$

Nierówność

(17) $$\limsup_{x' \to x} \frac{F(x') - F(x)}{x' - x} \leqq G(x)$$

otrzymuje się odrazu z (11), podobnie jak w §-ie 2 nierówność (37) z (14). Jeżeli $G(x) = 0$, to z (17) wynika natychmiast:

$$F'(x) = 0$$

Pozostaje udowodnić nierówność:

(18) $$\liminf_{x' \to x} \frac{F(x') - F(x)}{x' - x} \geqq G(x)$$

w przypadku $G(x) \neq 0$.

Lemmaty I, II, III § 2 ulegną nieznacznej modyfikacji:

Lemmat I. Dla $x \in l^*_N$ $(a_N < x < b_N)$ mamy

(19) $$\frac{f_{n+1}(b_N) - f_{n+1}(x)}{b_N - x} \geqq m_N \cdot \gamma_n \left[1 - \frac{2\vartheta_n}{1 - \varepsilon_n - \vartheta_n}\right]$$

Nierówność ta pozostanie prawdziwą, jeżeli zastąpimy b_N przez a_N.

Dowód otrzymuje się z łatwością z wzorów (6)$_{1, 2, 3}$ przez rozpatrzenie różnych możliwych przypadków:

$$x \in l^*_{Nc} \qquad c = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Lemmat II. Jeżeli $x \in l^*_N - l^*_{N1}$. to

(20) $$\frac{F(x) - F(a_N)}{x - a_N} \geqq m_N \cdot \gamma_n \cdot \left[1 - \frac{2\vartheta_n}{1 - \varepsilon_n - \vartheta_n}\right] - \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} \cdot L$$

Dowód jest zupełnie taki sam jak w § 2: otrzymuje się z Lemmatu I przy pomocy oszacowania (14). Gdyby $x \in l^*_N - l^*_{N5}$. to w nierówności (20) należałoby zmienić a_N na b_N

Lemmat III. Jeżeli $x \in l^*_N - l^*_{Ne_1 e_2 \dots e_{h+1}}$, gdzie $e_1 = e_2 = \dots e_{h+1} = 1$, to

(21) $$\frac{F(x) - F a_N)}{x - a_N} \geqq m_N \cdot \gamma_n \cdot \gamma_{n+1} \dots \gamma_{n+h} \left[1 - \frac{2\vartheta_n}{1 - \varepsilon_n - \vartheta_n}\right] - \rho_n . L,$$

(22) gdzie: $\rho_n = \text{Maxim.}\left(\frac{\varepsilon_{s+1}}{\varepsilon_s}\right)$ dla $s \geqq n$

Dowód taki sam jak w § 2 (opieramy się między innemi na tem, że wyrażenie $\frac{2\vartheta_n}{1-\varepsilon_n-\vartheta_n}$ maleje gdy n wzrasta). Gdyby $e_1 = e_2 = \ldots = e_{h+1} = 5$, to w nierówności (21) zamiast a_N występowałoby b_N.

Wracamy teraz do dowodu wzoru (18) w przypadku $G(x) \neq 0$, a więc

$$G(x) > 0 \tag{23}$$

Niech x należy do każdego z przedziałów ciągu

$$l^{\#}_{c_1},\ l^{\#}_{c_1 c_2}, \ldots l^{\#}_{N} \ldots \quad (N = c_1 c_2 \ldots c_n), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{24}$$

Ze względu na $\lim\limits_{n\to\infty} m_N = G(x)$ dla każdego $n \geqq p$ będzie:

$$G(x)(1-\sigma_p) < f'_n(x) = m_N < G(x).(1+\sigma_p); \quad \lim_{p\to\infty}\sigma_p = 0 \tag{25}$$

Ograniczamy się do $x' \in l^{\#}_P$, zakładamy dla ustalenia uwagi, że $x' > x$ i odnajdujemy r i h tak, żeby

$$b_{R+H+1} < b_{R+H} = b_{R+H-1} = \ldots = b_{R+1} < x' \leqq b_R \tag{26}$$

Rozważamy $[F x') - F(b_N)]$ przy $n > r + h$.

Podobnie jak w § 2 dowodzimy, że

$$F(b_{R+1}) - F(b_N) \geqq (b_{R+1} - b_N).G(x)(1-\sigma_p).\gamma_p\left[1 - \frac{2\vartheta_p}{1-\varepsilon_p-\vartheta_p}\right] \tag{27}$$

Pozostaje ocenić $[F(x') - F(b_{R+1})]$. Niech

$$b_{R+1} = a_{Rc} \quad (c > 1); \quad x' \in l^{\#}_{Rd} \quad (d \geqslant c) \tag{28}$$

Mamy tu 10 ewentualności możliwych zależnie od wartości c i d $(5 \geqslant d \geqslant c > 1)$. Najbardziej charakterystyczne są przypadki $c = 3 = d$ i $c = 3$, $d = 4$. W pierwszym przypadku

$$\begin{aligned} F(x') - F(b_N) &= F(b_{R+1}) - F(b_N) \\ &\geqq (b_{R+1} - b_N)\, G(x)(1-\sigma_p)\gamma_p\left[1 - \frac{2\vartheta_p}{1-\varepsilon_p-\vartheta_p}\right] \end{aligned} \tag{29}$$

na zasadzie (27). Stąd:

$$\frac{F(x') - F(b_N)}{x' - b_N} \geqq G(x).(1-\sigma_p).\gamma_p.\left[1 - \frac{2\vartheta_p}{1-\varepsilon_p-\vartheta_p}\right].\left[1 - \frac{x' - b_{R+1}}{x' - b_N}\right] \tag{30}$$

Otóż:

$$x' - b_{R+1} \leqq l_{R3} = \vartheta_r.l_R \quad \text{(wzory (2))} \tag{31}$$

Natomiast

$$x' - b_N > b_{R+H} - b_{R+H+1} \geqq l_{R+H}.\frac{\varepsilon_{r+h}}{2} \geqq l_R.\prod_{t=r}^{r+h}\frac{\varepsilon_t}{2} \tag{32}$$

na tej samej zasadzie co w § 2 wzór (49): jeżeli l^*_U i $l^*_{U+1} = l_{Uc}$ są 2 kolejnymi przedziałami ciągu (24), to $c \neq 3$ (przy $c = 3$: $m_{U+1} = G(x) = 0$), a więc $l_{U+1} \geqq l_U.\frac{\varepsilon_u}{2}$

Zestawiając (31) i (32):

$$\frac{x' - b_{R+1}}{x' - b_N} \leqq \vartheta_r : \prod_{t=r}^{r+h}\frac{\varepsilon_t}{2} \tag{33}$$

Twierdzę, że:

$$r + h \leqq \lambda_r \quad \text{(porówn. (3) i (4))} \tag{34}$$

Istotnie. Gdyby $r + h < \lambda_r$, to, uwzględniając (26) i $(6)_1$, mielibyśmy:

$$\frac{m_{R+H}}{m_{R+1}} = \prod_{t=r+1}^{r+h-1}\gamma_t \leqq \prod_{t=r+1}^{\lambda_r}\gamma_t < \tfrac{1}{2} \tag{35}$$

na podstawie (3). Z nierówności (25) wynika jednak

$$\frac{m_{R+H}}{m_{R+1}} \geqq \frac{1-\sigma_p}{1+\sigma_p} > \tfrac{1}{2}, \tag{36}$$

o ile $\sigma_p < \frac{1}{3}$ co można, naturalnie, z góry założyć.

Nierówność (34) jest więc prawdziwa, ale w takim razie (33) i (4) dają

$$\frac{x' - b_{R+1}}{x' - b_N} \leqq \frac{1}{r+1} \leqq \frac{1}{p+1} \tag{37}$$

Podstawiając do wzoru (30):

$$\frac{F(x') - F(b_N)}{x' - b_N)} \geqq G(x).(1-\sigma_p)\gamma_p.\left[1 - \frac{2\vartheta_p}{1-\varepsilon_p-\vartheta_p}\right]\left[1 - \frac{1}{p+1}\right] \tag{38}$$

Rozważmy teraz przypadek $c = 3$, $d = 4$ (patrz. (28)).

$$F(x') - F(b_{R+1}) = F(x') - F(a_{Rd}), \tag{39}$$

gdyż $F(b_{R+1}) = F(a_{Rd})$. Z różnicą $[F(x') - F(a_{Rd})]$ postępujemy jak w § 2.

Jeżeli:

$$(\dagger) \qquad x' \in l^{*}_{R\,d\,e_1 e_2 \ldots e_{h+1}}; \quad e_1 = e_2 = \ldots e_{h+1} = 1,$$

to pomijamy wprost przyrost $[F(x') - F(a_{R\,d})]$ i z (29) wnioskujemy, że:

$$(40)' \quad \frac{F(x') - F(b_N)}{x' - b_N} \geqq G(x) \,.\, (1 - \sigma_p) \,.\, \gamma_p \left[1 - \frac{2\,\vartheta_p}{1 - \varepsilon_p - \vartheta_p}\right] \left[1 - \frac{x' - b_{R+1}}{x' - b_N}\right]$$

$$(40) \quad x' - b_{R+1} = (a_{R\,d} - b_{R+1}) + (x' - a_{R\,d}) \leqq l_{R_3} + l_{R\,d\,e_1\,e_2 \ldots e_{h+1}} \leqq$$
$$\leqq l_R \left[\vartheta_r + \prod_{t=r}^{r+h} \frac{\varepsilon_{t+1}}{2}\right] \quad \text{(porówn. (49) § 2)}$$

Z (40), (32), (34) i (4) wynika

$$(41) \qquad \frac{x' - b_{R+1}}{x' - b_N} \leqq \frac{1}{p+1} + \frac{\varepsilon_{r+h+1}}{\varepsilon_r} \leqq \frac{1}{p+1} + \rho_p \quad ((22))$$

Podstawiając w nierówność (40)', otrzymujemy:

$$(42) \quad \frac{F(x') - F(b_N)}{x' - b_N} \geqq G(x) \,.\, (1 - \sigma_p) \,.\, \gamma_p \,.\left[1 - \frac{2\,\vartheta_p}{1 - \varepsilon_p - \vartheta_p}\right] \cdot \left[1 - \frac{1}{p+1} - \rho_p\right]$$

Jeżeli zaś

$$(\dagger\dagger) \qquad x' \in l^{*}_{R\,d} - l^{*}_{R\,d\,e_1\,e_2 \ldots e_{h+1}} \quad (e_1 = e_2 = \ldots e_{h+1} = 1),$$

to, podobnie jak w § 2, stosujemy Lemmat III. Wypadnie w końcu

$$(43) \quad F(x') - F(a_{R,\,d}) \geqq (x' - a_{R,\,d}) \,.\left\{G(x) \,.\, \frac{(1-\sigma_p)^2}{1+\sigma_p} \cdot \gamma_p{}^3 \left(1 - \frac{2\,\vartheta_p}{1 - \varepsilon_p - \vartheta_p}\right) - \right.$$
$$\left. - \rho_p L \right\} = (x' - a_{R,\,d}) \,.\, H_p$$

gdzie przez H_p oznaczyliśmy dla krótkości wyrażenie w nawiasie { }. Zastąpmy w nierówności (27) wyrażenie, przez które pomnożona jest różnica $(b_{R+1} - b_N)$, przez H_p i tak wzmocnioną nierówność dodajmy do (43). Uwzględniając, że $F(a_{R,\,d}) = F(b_{R+1})$, otrzymamy

$$(44) \qquad F(x') - F(b_N) \geqq (b_{R+1} - b_N + x' - a_{R\,d}) \,.\, H_p$$

skąd

$$(45) \qquad \frac{F(x') - F(b_N)}{x' - b_N} \geqq \left(1 - \frac{l_{R\,3}}{x' - b_N}\right) . \, H_p \geqq \left(1 - \frac{1}{p+1}\right) H_p,$$

gdyż $\dfrac{l_{R3}}{x' - b_N} \leqq \dfrac{1}{p+1}$ (porówn. uzasadnienie nierówności (37))

Porównywając (42) z (45), widzimy, że w obu przypadkach $(\dagger)$ i $(\dagger\dagger)$ prawdziwa jest nierówność

$$(46) \qquad \frac{F(x') - F(b_N)}{x' - b_N} \geqq \left(1 - \frac{1}{p+1} - \rho_p\right) . \, H_p$$

Jest ona postaci:

$$(47) \quad \frac{F(x') - F(b_N)}{x' - b_N} \geqq G(x) - \omega(p, x) \text{ gdzie } \omega(p, x) > 0 \text{ i } \lim_{x = \text{const}\,;\; p \to \infty} \omega(p, x) = 0$$

i zachodzi ona w przypadku $c = 3$, $d = 4$ [patrz (28)]. Z równości (38) odczytać można, że nierówność tego samego typu prawdziwa jest i w przypadku $c = 3$, $d = 3$. To samo będzie w innych możliwych przypadkach $1 < c \leqq d \leqq 5$. biorąc $n \to \infty$, otrzymujemy więc

$$(48) \qquad \frac{F(x') - F(x)}{x' - x} \geqq G(x) - \omega(p, x) \quad \textit{dla każdego} \quad x' \in l^{*}_{p} \,.$$

Wynika stąd natychmiast nierówność żądana (18), która wraz z (17) daje $F'(x) = G(x)$. c. b. d. o.

5⁰. Funkcja $F(x)$ ma w przedziale $I = (0, 1)$ pantachiczne przedziały stałości: są to wszystkie możliwe przedziały l^{*}_{N3}. Z konstrukcji $\chi(\varepsilon_n, \gamma_n, \vartheta_n)$ wynika bowiem, że, jeżeli l^{*}_{N} jest przedziałem stałości dla funkcji f_n, to jest nim też i dla f_{n+1}, a więc i dla $f_{n+2} \ldots$ i t. d., a więc i dla $F(x)$. Sprawdziliśmy w ten sposób, że funkcja $F(x)$ czyni zadość wszystkim przepisanym warunkom. Zauważymy jeszcze, że spełnia ona warunek Lipschitza, gdyż

$$0 \leqq F'(x) = G(x) \leqq L.$$

§ 5. Funkcja Köpckego.

Jest to funkcja różniczkowalna, posiadająca pantachiczne maxima minima właściwe. Konstrukcja jest podobna do poprzednich, szczególnie dokonstrukcji § 3. Zachowujemy oznaczenia § 3.

Określenie funkcji szukanej. Funkcja szukana $F(x)$ będzie granicą łamanych:

$$\{f_n(x)\}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Kładziemy znów

$$(1) \qquad f_0(x) = x.$$

Przejście od f_n do f_{n+1} odbywa się przy pomocy konstrukcji podstawowej $\chi(\varepsilon_n, \gamma_n, \vartheta_n)$, która przekształca każdy odcinek

$$A\,B = \delta_N = \delta_{c_1 c_2 \dots c_n};\quad c_s = 1,\,2,\,3,\,4,\,5,\,6$$ [1]

łamanej f_n na łamaną $A\,C\,D\,E\,F\,G\,B = A_N\,C_N\,D_N\,E_N\,G_N\,B_N$ o wierzchołkach:

$$(2)\qquad\left\{\begin{array}{lll}
A\colon & a_N & ,\ f_n(a_N)\\
C\colon & a_N + \frac{\varepsilon_n}{2}.\,l_N & ,\ f_n(a_N) + \frac{\varepsilon_n}{2}\gamma_n.\,l_N.\,m_N\\
D\colon & a_N + \frac{1-\vartheta_n}{2}\,l_n, & f_n(a_N) + \frac{1}{2}\left(1+\frac{\vartheta_n}{2}\right) l_N.\,m_N\\
E\colon & a_N + \frac{1}{2}\,l_N & ,\ f_n(a_N) + \frac{1}{2}.\,l_N.\,m_N\\
F\colon & a_N + \frac{1+\vartheta_n}{2}\,l_n, & f_n(a_N) + \frac{1}{2}\left(1-\frac{\vartheta_n}{2}\right) l_N.\,m_N\\
G\colon & a_N + \left(1-\frac{\varepsilon_n}{2}\right) l_n, & f_n(a_N) + \left(1-\frac{\varepsilon_n}{2}.\,\gamma_n\right) l_N.\,m_N\\
B\colon & a_N + l_N = b_N & ,\ f_n(a_N) + l_N.\,m_N = f_n(b_N)
\end{array}\right.$$

Z wzorów (2) odczytujemy:

$$(3)_{1,2,3}\quad l_{N1} = l_{N6} = \frac{\varepsilon_n}{2}.\,l_N;\quad l_{N2} = l_{N5} = \frac{1-\varepsilon_n-\vartheta_n}{2}.\,l_N;\quad l_{N3} = l_{N4} = \frac{\vartheta_n}{2}.\,l_N$$

$$(4)_1\colon\qquad m_{N1} = m_{N6} = \gamma_n.\,m_N$$

$$(4)_2\colon\qquad m_{N2} = m_{N5} = \frac{1-\varepsilon_n\gamma_n+\frac{1}{2}\vartheta_n}{1-\varepsilon_n-\vartheta_n}.\,m_N$$

$$(4)_3\colon\qquad m_{N3} = m_{N4} = -\tfrac{1}{2}\,m_N$$

Liczby ε_n, γ_n, ϑ_n czynią zadość tym samym warunkom, co w §§ 2, 3
Dla każdego n i x mamy

$$(5)\qquad f'_{+n}(x) = \prod_{s=0}^{n-1}\beta_s,\quad \text{gdzie}$$

$$(6)_{1,2,3}\qquad \beta_s = \text{ bądź } \gamma_s,\ \text{ bądź } \frac{1-\varepsilon_s\gamma_s+\frac{1}{2}\vartheta_s}{1-\varepsilon_s-\vartheta_s},\ \text{ bądź } \left(-\tfrac{1}{2}\right)$$

Z wzorów $(4)_{1,2,3}$ wynika:

$$|f'_{+(n+1)}(x)| \leqq |f'_{+n}(x)|\,\frac{1-\varepsilon_n\gamma_n+\frac{\vartheta_n}{2}}{1-\varepsilon_n-\vartheta_n},\ \text{skąd}$$

[1]) Łamana f_n składa się z 6^n odcinków; odcinki $D\,E$ i $E\,F$ łamanej $A\,C\,D\,E\,F\,G\,B$ są współlinjowe, tak że faktycznie łamana ta składa się z 5 odcinków; wygodniej jednak będzie uważać punkt E również za wierzchołek, ze względu na modyfikację niniejszej konstrukcji, którą podejmiemy w § 6.

$$(7)\qquad |f'_{+n}(x)| \leqq L\quad \text{dla każdego } x \text{ i } n,\ \text{gdzie}$$

$$(8)\qquad L = \prod_{s=0}^{\infty}\frac{1-\varepsilon_s\gamma_s+\frac{1}{2}\vartheta_s}{1-\varepsilon_s-\vartheta_s}$$

Analogicznie dla $x \in l_P^*$ $(P = c_1\,c_2 \dots c_p)$ i $n \geqq p$:

$$(9)\qquad |f'_{+n}(x)| \leqq |m_P|.\,L_p,\quad \text{gdzie}$$

$$(10)\qquad L_p = \prod_{s=p}^{\infty}\frac{1-\varepsilon_s\gamma_s+\frac{1}{2}\vartheta_s}{1-\varepsilon_s-\vartheta_s},$$

Dowodzimy kolejno.

1^0. Istnieje

$$(11)\qquad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = F(x)\ \text{ i } F \text{ jest funkcją ciągłą}$$

$$(12)\qquad |f_n(x) - F(x)| \leqq \varepsilon_n.\,l_N.\,L\ \text{ dla każdego } x \in l_N^*$$

2^0. Dla każdego $x \in I = (0,\,1)$ istnieją granice

$$(13)\qquad \lim_{n\to\infty} f'_{+n}(x) = \lim_{n\to\infty} f'_{-n}(x) = G(x) = \prod_{s=0}^{\infty}\beta_s,$$

Iloczyn ten jest zawsze zbieżny, gdyż, jeżeli czynnik $\beta_s = -\frac{1}{2}$ występuje w nim ∞ wiele razy, to $G(x) = 0$, jeżeli zaś dla $s \geqslant p$ zachodzą stale ewentualności $(6)_{1,2}$, to mamy przypadek, zbadany już w §§ 2 i 3.

3^0. Funkcja $F(x)$ jest różniczkowalna i

$$(14)\qquad F'(x) = G(x)$$

W przypadku $G(x) = 0$ równość ta otrzymuje się łatwo z (9) podobnie jak w poprzednich §§-ach. Załóżmy teraz, że $G(x) \neq 0$, np.:

$$(15)\qquad G(x) > 0$$

Przy pomocy nierówności (9) dowodzimy bez trudu, że

$$(16)\qquad \limsup_{x'\to x}\frac{F(x') - F(x)}{x' - x} \leqq G(x).$$

Pozostaje udowodnić, że

$$(17)\qquad \liminf_{x'\to x}\frac{F(x') - F(x)}{x' - x} \geqq G(x)$$ [1]

[1]) Gdyby $G(x) < 0$, to z (9) wyprowadzilibyśmy odrazu (17) i trzebaby udowadniać nierówność (16).

Znów posługujemy się lemmatami pomocniczemi.

Lemmat I. Jeżeli $x \in l_N^*$ $(a_N < x < b_N)$, to

$$\frac{f_{n+1}(b_N) - f_{n+1}(x)}{m_N \cdot (b_N - x)} \geqq \gamma_n - \frac{3\,\vartheta_n}{1 - \varepsilon_n - \vartheta_n} \tag{18}$$

Dowód otrzymuje się przez rozpatrzenie różnych przypadków możliwych:

$$m_N > 0,\ m_N < 0;\ x \in l_{Nc}^*;\ c = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Rozpatrzymy dla przykładu przypadek: $m_N > 0$; $x \in l_{N3}^* + l_{N4}^*$.

$$f_{n+1}(b_N) - f_{n+1}(x) = [f_{n+1}(b_N) - f_{n+1}(a_{N5})] - [f_{n+1}(x) - f_{n+1}(a_{N5})]$$
$$\geqq (b_N - a_{N5})\, m_N \cdot \gamma_n - \tfrac{1}{2}\,\vartheta_n \cdot l_N \cdot m_N \quad \text{(na zasadzie (4) i (2)), stąd}$$

$$\frac{f_{n+5}(b_N) - f_{n+1}(x)}{m_N \cdot (b_N - x)} \geqq \gamma_n \left[1 - \frac{a_{N5} - x}{b_N - x}\right] - \tfrac{1}{2} \cdot \vartheta_n \cdot \frac{l_N}{b_N - x} \tag{19}$$

Ponieważ

$$a_{N5} - x \leqq l_{N3} + l_{N4} = \vartheta_n \cdot l_N;\ b_N - x \geqq l_{N5} = \frac{1 - \varepsilon_n - \vartheta_n}{2}\, l_N, \text{ (wzory (3))}$$

więc z (19) wynika:

$$\frac{f_{n+1}(b_N) - f_{n+1}(x)}{m_N \cdot (b_N - x)} \geqq \gamma_n \left[1 - \frac{2\,\vartheta_n}{1 - \varepsilon_n - \vartheta_n}\right] - \frac{\vartheta_n}{1 - \varepsilon_n - \vartheta_n},$$

skąd a fortiori wynika (18).

Nierówność (18) pozostanie prawdziwa, jeżeli zamienić b_N na a_N.

Lemmat II. Jeżeli $x \in l_N^* - l_{N1}^*$, to

$$\frac{F(x) - F(a_N)}{m_N \cdot (x - a_N)} \geqq \gamma_n - \frac{3\,\vartheta_n}{1 - \varepsilon_n - \vartheta_n} \mp \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} \cdot \frac{L}{m_n}, \tag{20}$$

gdzie znak — odpowiada przypadkowi $m_N > 0$. a znak + przypadków, $m_N < 0$.

Dowód otrzymuje się z lemmatu I przy pomocy oceny (12), podobnie jak w §§ 2 i 3. Gdyby $x \in l_N^* - l_{N6}^*$, to w nierówności (20) należałoby zmienić a_N na b_N.

Lemmat III. Jeżeli $x \in l_N^* - l_{Ne_1 e_2 \ldots e_{h+1}}^*$; $e_1 = e_2 = \ldots = e_{h+1} = 1$, to

$$\frac{F(x) - F(a_N)}{m_N \cdot (x - a_N)} \geqq \gamma_n \gamma_{n+1} \ldots \gamma_{n+1} - \frac{3\,\vartheta_n}{1 - \varepsilon_n - \vartheta_n} \mp \rho_n \cdot \frac{L}{m_N} \tag{21}$$

gdzie (22): $\rho_n = \text{Max.}\left(\frac{\varepsilon_{s+1}}{\varepsilon_s}\right)$ dla $s \geqslant n$.

Znak — odpowiada przypadkowi $m_N > 0$, znak + zaś przypadkowi $m_N < 0$.

Dowód — taki sam jak w § 3. Gdy $e_1 = e_2 = \ldots = e_{h+1} = 6$, to w nierówności (21) należy zmienić a_N na b_N.

Mając udowodnione lemmaty pomocnicze, wracamy do dowodu wzoru (17) w założeniu (15).

$$G(x) = \lim_{n \to \infty} f'_n(x) = \lim_{n \to \infty} m_N, \text{ gdzie} \tag{23}$$

$N = c_1 c_2 \ldots c_n$ jest to grupa wskaźników tego przedziału l_N^*, który zawiera wewnątrz punkt x. Ponieważ $\lim m_N = G(x)$, więc dla każdego $n \geqslant p$ będzie

$$0 < G(x)(1 - \sigma_p) < f'_n(x) = m_N < G(x)(1 + \sigma_p);\ \lim_{p \to \infty} \sigma_p = 0. \tag{24}$$

Rozważamy iloraz różnicowy (17), ograniczając się do $x' \in l_p^*$ i $x' > x$. Odnajdujemy takie r i h, że

$$b_{R+H+1} < b_{R+H} = b_{R+H-1} = \ldots = b_{R+1} < x' \leqslant b_R \tag{25}$$

i rozważamy przyrost $[F(x') - F(b_N)]$ przy $n > r + h$. Niech

$$b_{R+1} = a_{R,c}\ (c > 1) \quad \text{i} \quad x' \in l_{R,d}^*\ (d \geqq c) \tag{26}$$

Mamy tu 15 przypadków możliwych zależnie od wartości c i d. Rachunki całkiem analogiczne do przeprowadzonych w § 3 dają w każdym przypadku nierówność typu:

$$\frac{F(x') - F(b_N)}{x' - b_N} \geqq G(x) - \omega(p, x) \tag{27}$$

gdzie

$$\omega(p, x) > 0 \quad \text{i} \quad \lim_{p \to \infty;\ x = \text{const.}} \omega(p, x) = 0 \quad [1] \tag{28}$$

Nierówność tego samego typu jest więc prawdziwa dla każdego $x' \in l_p^*$.

Biorąc $n \to \infty$, otrzymamy

$$\frac{F(x') - F(x)}{x' - x} \geqq G(x) - \omega(p, x) \quad \text{dla każdego } x' \in l_p^* \tag{29}$$

Stąd bezpośrednio wynika (17) c. b. d. o.

[1]) Porówn. (54) § 2 i (48) § 3.

4°. Funkcja $F(x)$ ma w przedziale $I=(0,1)$ pantachiczne maxima i minima właściwe.

Dowiedziemy, mianowicie, że:

Zbiór $\mathfrak{B}$ maximów właściwych funkcji F składa się: [1])

$$(30)\quad \begin{cases} \text{z tych punktów } x = a_{N3} \text{ dla których } m_N > 0 \text{ i} \\ \text{z tych punktów } x = a_{N5} \text{ dla których } m_N < 0 \end{cases}$$

Zbiór $\mathfrak{B}$ minimów właściwych składa się:

$$(31)\quad \begin{cases} \text{z tych punktów } x = a_{N5} \text{ dla których } m_N > 0 \text{ i} \\ \text{z tych punktów } x = a_{N3} \text{ dla których } m_N < 0 \end{cases}$$

Aby się o tem przekonać, dowiedziemy naprzód ogólnie, że:

$$(32)\qquad \text{dla } a_N < x < b_N \text{ jest } F(a_N) < F(x) < F(b_N)$$
$$\text{wzgl. } F(a_N) > F(x) > F(b_N)$$

zależnie od tego, czy $m_N > 0$, czy też $m_N < 0$.

Niech x należy do każdego z przedziałów ciągu:

$$(33)\qquad l_N^*,\ l_{N+1}^*, \ldots\ l_K^*, \ldots$$

Naprzód sprawdzamy, że dla każdego $k \geqq n$ jest

$$(34)_k \qquad f_n(a_N) < f_k(x) < f_n(b_N)$$
$$\text{dla każdego } a_N < x < b_N \text{ (zakładamy } m_N > 0).$$

Nierówność $(34)_n$ jest, oczywiście, prawdziwa. Załóżmy, że zachodzi $(34)_k$. Ponieważ $x \in l_{K+1}^*$, więc $f_{k+1}(x)$ jest zawarte między $f_k(a_K)$ i $f_k(b_K)$ [wynika to natychmiast z określenia zwrotnego funkcji f_{k+1} w przedziale l_K^*]. Fakt ten w związku z $(34)_k$ pociąga za sobą natychmiast $(34)_{k+1}$. Istotnie więc nierówność $(34)_k$ zachodzi przy każdem $k \geqslant n$.

Biorąc $k \to \infty$, otrzymujemy z niej:

$$(35)\qquad f_n(a_N) \leqq F(x) \leqq f_n(b_N) \quad \text{dla} \quad a_N \leqq x \leqq b_N\ (m_N > 0)$$

Jeśli $a_N < x < b_N$, to dla dostatecznie wielkich k będzie: $a_N < a_K$, $b_K < b_N$. Zastosujmy nierówność (35) do przedziału l_K^*; orzeka ona, że $F(x)$ jest zawarte między $f_k(a_K)$ i $f_k(b_K)$. Ale w takim razie musi być:

[1]) Używamy tu skrótu: „x jest maximum dla funkcji F zamiast mówić: „x jest takim punktem, w którym funkcja F osiąga maximum".

$$f_n(a_N) < F(x) < f_n(b_N)$$

ze względu na $(34)_k$ i nierówność $a_N < a_K < b_K < b_N$. W ten sposob nierówność (32) jest uzasadniona.

Chcąc teraz okazać, że, np. w punkcie $x = a_{N3}$ przy $m_N > 0$ funkcja F ma maximum właściwe, stosujemy nierówność (32) do przedziałów l_{N2}^* i l_{N3}^*. Otrzymamy

$$(36)\qquad F(x) < F(a_{N3}) \quad \text{dla każdego} \quad a_{N2} < x < b_{N3} \text{ i } x \neq a_{N3},$$

co właśnie dowodzi, że w punkcie $x = a_{N3}$ $(m_N > 0)$ mamy maximum właściwe.

Dowiedziemy jeszcze, że w innych punktach, poza wymienionemi w (30) i (31), niema extremów. Istotnie. Jeżeli x nie jest żadnym a_N, to x leży wewnątrz każdego z przedziałów pewnego ciągu:

$$l_{c_1}^*,\ l_{c_1 c_2}^*, \ldots\ l_N^*, \ldots;\ (N = c_1 c_2 \ldots c_n)$$

Ale w takim razie na zasadzie (32) dowolnie blisko punktu x istnieją punkty x', dla których $F(x') < F(x)$ i punkty x'', dla których $F(x'') > F(x)$, więc w punkcie x niema extremum. Jeżeli zaś jest jednym z punktów a_N i nie należy ani do $\mathfrak{A}$ ani do $\mathfrak{B}$, to musi być $x = a_{Mc}$ gdzie $c \neq 3$ i $c \neq 5$ $(M = c_1 c_2 \ldots c_m)$, przyczem możemy założyć, że x nie jest żadnem $a_{M'}$ $(M' = c_1' c_2' \ldots c_m')$. Wtedy musi być $c = 2$ bądź $c = 4$ i przy pomocy (32) znów łatwo sprawdzamy, że w punkcie x extremum zachodzić nie może.

W ten sposób sprawdziliśmy, że funkcja $F(x)$ czyni zadość przepisanym warunkom. I ta funkcja spełnia warunek Lipschitza, gdyż

$$(37)\qquad |F'(x)| = |G(x)| \leqq L$$

ze względu na (7).

§ 5. Funkcja Mazurkiewicza. [1])

Jest to funkcja różniczkowalna posiadająca w przedziale $I = (0, 1)$ pantachiczne maxima właściwe, ale nie posiadająca wcale minimów właściwych.

Zachowujemy oznaczenia poprzednich §§.

Funkcję szukaną aproksymujemy przez ciąg łamanych $\{f_n(x)\}$ $n = 0, 1, 2, \ldots$

[1]) Patrz odnośnik str. 2 Konstrukcja podana niżej jest całkiem odmienna od konstrukcji prof. Mazurkiewicza.

Kładziemy

(1) $$f_0(x) = 0$$

Przejście od f_n do f_{n+1} odbywa się przy pomocy jednej z 3-ch konstrukcyj podstawowych: $\chi_1^{(n)}$, $\chi_2^{(n)}$, $\chi_3^{(n)}$. Niech

(2) $$A\,B = \delta_N = \delta_{c_1 c_2 \ldots c_n};\quad 1 \leqslant c_s \leqslant 6$$

będzie jakimś odcinkiem łamanej f_n. Możliwe są 3 przypadki:

I-szy przypadek: $m_N = 0$. Stosujemy konstrukcję $\chi_1^{(n)} = \chi_1(\varepsilon_n)$, która przekształca odcinek $A\,B$ na łamaną $A\,C\,D\,E\,B$ o wierzchołkach

(3)$_1$ $$\left\{\begin{array}{lll} A: & a_N & ,\ f_n(a_n) \\ C: & a_N + \frac{1}{4}\, l_N & ,\ f_n(a_n) \\ D: & a_N + \frac{1}{2}\, l_N & ,\ f_n(a_n) + \varepsilon_n \cdot \frac{l_N}{4} \\ E: & a_N + \frac{3}{4}\, l_N & ,\ f_n(a_n) \\ B: & a_N + l_N = b_N, & f_n(a_N) = f_n(b_N) \end{array}\right.$$

II-gi przypadek: $m_N > 0$. Odcinek $A\,B$ przekształcamy na łamaną $A\,C\,D\,E\,F\,G\,B$ o wierzchołkach:

(3)$_2$ $$\left\{\begin{array}{lll} A: & a_N & ,\ f_n(a_n) \\ C: & a_N + \frac{1}{2}\,\varepsilon_n \,.\, l_N & ,\ f_n(a_n) + \frac{1}{2}\,\varepsilon_n\,\gamma_n \,.\, l_N\, m_N \\ D: & a_N + \frac{1}{2}(1 - \vartheta_n)\, l_n, & f_n(a_N) + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\vartheta_n}{2}\right) l_N \,.\, m_N \\ E: & a_N + \frac{1}{2}\, l_N & ,\ f_n(a_N) + \frac{1}{2}\, l_N \,.\, m_N \\ F: & a_N + \frac{1}{2}(1 + \vartheta_n)\, l_N, & f_n(a_N) + \frac{1}{2}\, l_N \,.\, m_N \\ G: & a_N + \left(1 - \frac{1}{2}\,\varepsilon_n\right) l_N, & f_n(a_N) + \left(1 - \frac{1}{2}\,\varepsilon_n\,\gamma_n\right) l_N \,.\, m_N \\ B: & a_N + l_N = b_N & ,\ f_n(a_N) + l_N \,.\, m_N = f_n(b_N) \end{array}\right.$$

Jest to konstrukcja $\chi_2^{(n)} = \chi_2(\varepsilon_n, \gamma_n, \vartheta_n)$.

III-ci przypadek: $m_N < 0$. Przy pomocy konstrukcji $\chi_3^{(n)} = \chi_3(\varepsilon_n, \gamma_n, \vartheta_n)$ przekształcamy $A\,B$ na łamaną $A\,C\,D\,E\,F\,G\,B$. Wykres tej łamanej otrzymuje się z wykresu łamanej przypadku II przez symetrję względem prostej $x = a_N + \frac{1}{2} l_N$. Nie będziemy już wypisywali odnośnych wzorów na spółrzędne wierzchołków. Wzór (1) i konstrukcje $\chi_1^{(n)}$, $\chi_2^{(n)}$, $\chi_3^{(n)}$ określają jednoznacznie ciąg $\{f_n(x)\}$. Liczby ε_n, γ_n, ϑ_n są te same, co

w poprzednich §§. Zauważyć należy, że nie każdej grupie wskaźników $N = c_1\, c_2 \ldots c_n$ $(1 \leqslant c_s \leqslant 6)$ odpowiada jakiś odcinek δ_N łamanej f_n. Nie istnieją, np. odcinki δ_5, δ_{15}, $\delta_{46} \ldots$ [1]).

Z wzorów (3)$_{2,3}$ odczytać możemy w przypadku $f'_n(x) \neq 0$:

(4)$_{1,2,3,4,5}$: $$\frac{f'_{+(n+1)}(x)}{f'_{+n}(x)} = \text{bądź } \gamma_n, \text{ bądź } \frac{1 - \varepsilon_n\,\gamma_n + \frac{1}{2}\vartheta_n}{1 - \varepsilon_n - \vartheta_n} \text{ bądź } \left(-\tfrac{1}{2}\right), \text{ bądź } 0, \text{ bądź } \frac{1 - \varepsilon_n\,\gamma_n}{1 - \varepsilon_n - \vartheta_n}$$

Jeżeli zaś $f'_{+n}(x) = 0$, to na zasadzie (3)$_1$:

(5)$_{1,2,3}$ $$f'_{+(n+1)}(x) = \text{bądź } 0 \text{ bądź } (+\varepsilon_n), \text{ bądź } (-\varepsilon_n)$$

Łatwo sprawdzić indukcyjnie, że

(6)$_n$ $$|f'_{+n}(x)| \leqq \prod_{s=1}^{n-1} \tau_s \text{ dla każdego } x \text{ i } n \geqq 1.$$

Przez τ_s oznaczaliśmy dla krótkości:

(7) $$\tau_s = \frac{1 - \varepsilon_s\,\gamma_s + \frac{1}{2}\vartheta_s}{1 - \varepsilon_s - \vartheta_s} > 1$$

Istotnie. Wzór (6)$_1$, jest prawdziwy, gdyż $|f'_{+1}(x)| \leqq \varepsilon_0 < 1 < \tau_0$ (wzory (5)). Załóżmy prawdziwość wzoru (6)$_n$. Jeżeli $f'_{+n}(x) \neq 0$, to na zasadzie wzorów (4): $|f'_{+(n+1)}(x)| \leqq \tau_n \,.\, |f'_{+n}(x)|$. Stosując tu (6)$_n$, otrzymujemy (6)$_{n+1}$. Jeżeli zaś $f'_{+n}(x) = 0$, to na zasadzie wzorów (5): $|f'_{+(n+1)}(x)| \leqq \varepsilon_n < 1 < \prod_{s=0}^{n} \tau_s$, t. zn. znów zachodzi (6)$_{n+1}$.

Z (6)$_n$ wynika dla każdego x i n:

(8) $$|f'_{+n}(x) \leqq \prod_{s=0}^{\infty} \tau_s = L.$$

Analogicznie dla $x \in l_P^{\#}$ $(P = c_1\, c_2 \ldots c_p)$ i $n \geqq p$ mamy:

(9)$_1$ $$|f'_{+n}(x)| \leqq |m_P| \,.\, L_p \quad \text{przy} \quad m_P \neq 0 \quad \text{i}$$

(9)$_2$ $$|f'_{+n}(x)| \leqq \quad \varepsilon_p \,.\, L_p \quad \text{przy} \quad m_P = 0$$

[1]) δ bez wskaźników jest to odcinek $y = 0$; $0 \leqslant x \leqslant 1$.

(10) $$L_p = \prod_{s=p}^{\infty} \tau_s$$

Przechodzimy do dowodu, że ciąg $\{f_n(x)\}$ określa funkcję $F(x)$ o własnościach żądanych.

1°. (11) $$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leqq \frac{\varepsilon_n}{2} . l_N . L \quad \text{dla każdego } x \in l_N^*$$

i to zarówno w przypadku $m_N \neq 0$, jak $m_N = 0$. Stąd wynika istnienie granicy

(12) $$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = F(x); \; F \text{ — funkcja ciągła}$$

Jeżeli $x \in l_N^*$, to

(13): $$|f_n(x) - F(x)| \leqslant \varepsilon_n . l_N . L$$

2°. Istnieją granice

(14) $$\lim_{n\to\infty} f'_{+n}(x) = \lim_{n\to\infty} f'_{-n}(x) = G(x) \quad \text{dla każdego } x \in I = (0, 1).$$

Załóżmy naprzód, że x nie jest żadnem a_N. Wtedy x leży wewnątrz każdego z przedziałów ciągu:

(15) $$l_{c_1}^*, \; l_{c_1 c_2}^*, \dots l_N^*; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Jeżeli dla ∞ wielu $n: m_N = 0$, to $G(x) = 0$ ze względu na $(9)_2$
Jeżeli zaś dla $n \geqslant p: m_N \neq 0$, to na zasadzie wzorów (4) dla każdego $n \geqslant p$

(16) $$\frac{f'_{+(n+1)}(x)}{f'_{+n}(x)} = \beta_n, \text{ gdzie}$$

(17): $$\beta_n = \text{bądź } \gamma_n \text{ bądź } \tau_n \text{ bądź } (-\tfrac{1}{2}), \text{ bądź } \frac{1 - \varepsilon_n \gamma_n}{1 - \varepsilon_n - \vartheta_n}.$$

Wobec tego

$$f'_{+n}(x) = f'_{+p}(x) . \prod_{s=p}^{n-1} \beta_s \quad (n > p)$$

i ciąg $f'_{+n}(x) = f'_{-n}(x)$ jest zbieżny dla tych samych powodów co w poprzednich §§. Równie łatwo dowodzi się, że $G(x) = 0$, gdy $x = a_N$.

3°. (18): $$F'(x) = G(x) \quad \text{dla każdego } x \in I = (0, 1)$$

Jeżeli $G(x) = 0$, to równość (18) otrzymujemy bez trudu z wzorów $(9)_1$, $(9)_2$, rozpatrując te same ewentualności, co w 2°. Jeżeli zaś $G(x) \neq 0$, to dowód różniczkowalności funkcji F jest zupełnie taki

sam jak w § 4. Lemmaty I, II, III § 4 są bez żadnych zmian prawdziwe w przypadku rozważanym, należy tylko wszędzie dodać zastrzeżenie $m_N \neq 0$.

4°. Funkcja $F(x)$ ma pantachiczne maxima właściwe i nie ma wcale minimów właściwych. Zbiór maximów właściwych tworzą punkty

(19) $$\{x = a_{N3} \text{ przy } m_N > 0; \; x = a_{N5} \text{ przy } m_N < 0;$$
$$x = a_{N3} \text{ przy } m_N = 0$$

Że w tych punktach mamy istotnie maxima właściwe, wynika to z nierówności (32) § 4, która i teraz jest prawdziwa.

Pozostaje udowodnić, że w innych punktach poza wymienionemi w (19) niema extremów właściwych.

Jeżeli x nie jest żadnem a_N i w ciągu (15) jest ∞ wielu przedziałów l_N^* takich, że $m_N \neq 0$, to stosujemy nierówność (32) § 4. Załóżmy teraz, że istnieje n takie, że w ciągu (15) dla każdego $k \geqslant n$:

(20) $$m_K = 0 \quad (k \geqslant n)$$

Przedział l_N^* jest przedziałem stałości funkcji f_n:

$$f_n(x) = f_n(a_N) \quad \text{dla każdego} \quad x \in l_N^*$$

Po zastosowaniu konstrukcji $\chi_1^{(n)}$ przedział [1]) l_N^* rozpada się na 4 przedziały jednakowej długości: l_{N1}^*, l_{N2}^*, l_{N3}^*, l_{N4}^*. Wewnątrz przedziału $l_{N2}^* + l_{N3}^*$ jest $f_{n+1}(x) > f_n(a_N)$, w pozostałych przedziałach l_{N1}^*, l_{N4}^*:

$$f_{n+1}(x) = f_n(x) = f_n(a_N \quad \text{dla } x \in l_{N1}^* + l_{N4}^*:$$

Usuńmy teraz z l_N^* wnętrze przedziału $l_{N2}^* + l_{N3}^*$; pozostaną 2 przedziały l_{N1}^* i l_{N4}^*. Z każdym z nich postępujemy tak jak z l_N^* i t. d. ad infinitum. Otrzymamy w ten sposób pewien zbiór doskonały $\mathfrak{P}_N \subset l_N^*$, zawierający oba krańce a_N, b_N przedziału l_N^*.

Dla każdego $x \in \mathfrak{P}_N$ jest

$$f_k(x) = f_n(a_N) \quad \text{dla} \quad k \geqslant n, \text{ a więc}$$

(21) $$\text{także} \quad F(x) = f_n(a_N) = F(a_N)$$

---

[1]) „przedział” będziemy traktowali jako zbiór zamknięty t. zn. łącznie z krańcami.

Jeżeli teraz dla danego punktu x nierówność (20) zachodzi przy każdem $k \geqq n$, to x musi właśnie należeć do zbioru $\mathfrak{P}_N$. Ale w takim razie dowolnie blisko x leżą punkty $x' \in \mathfrak{P}_N$. Dla nich

$$F(x') = F(x) \quad \text{na zasadzie (21).}$$

W punkcie x nie może więc zachodzić extremum właściwe.

Należy jeszcze udowodnić, że extremum funkcji $F(x)$ nie może zachodzić w żadnym punkcie $x = a_N$ poza wymienionemi w (19). Nie wymaga to już żadnych nowych rozważań.

Funkcja $F(x)$ jest tedy funkcją żądaną.

$$|F'(x)| = |G(x)| \leqq L \tag{22}$$

na zasadzie (8).

§ 6. Twierdzenie pomocnicze I (Twierdzenie A).

W § 4 zbudowaliśmy funkcję różniczkowalną $F(x)$ posiadającą maxima właściwe w punktach pewnego zbioru przeliczalnego $\mathfrak{A}$ wszędziegęstego w $I = 0, 1)$ i minima właściwe w punktach zbioru wszędziegęstego $\mathfrak{B}$.

Okażemy teraz, że przez odpowiednią modyfikację konstrukcji § 4 można zniszczyć część (dowolną) extremów funkcji $F(x)$, nie wprowadzając przytem żadnych nowych extremów właściwych. Zachodzi, mianowicie, następujące.

Twierdzenie A. Niech $\overline{\mathfrak{A}} \subset \mathfrak{A}$; $\overline{\mathfrak{B}} \subset \mathfrak{B}$ będą 2 dowolne podzbiory zbiorów $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ § 4. Istnieje funkcja różniczkowalna $\overline{F(x)}$. posiadająca maxima właściwe w punktach zbioru $\overline{\mathfrak{A}}$, minima właściwe — w punktach zbioru $\overline{\mathfrak{B}}$ i nie mająca żadnych extremów właściwych poza zbiorem $\overline{\mathfrak{A}} + \overline{\mathfrak{B}}$.

Dowód. Elementy, występujące w konstrukcji $F(x)$ § 4, będziemy oznaczali tak jak w § 4, a więc: f_n, δ_N, l_N^*, m_N.

Odpowiednie elementy skojarzone z funkcją $\overline{F(x)}$ oznaczymy oraz $\overline{f_n}$ $\overline{\delta_N}$, $\overline{l_N^*}$, $\overline{m_N}$. Funkcję $\overline{F(x)}$ aproksymujemy przez ciąg łamanych:

$$\{\overline{f_n x)}\};\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Kładziemy

$$\overline{f_o}(x) = f_o(x) = x. \tag{1}$$

Przejście od $\overline{f_n}$ do $\overline{f_{n+1}}$ odbywa się przy pomocy jednej z 16-tu konstrukcji $\overline{\chi_i^{(n)}}$; $i = 1, 2, \ldots 16$. Przypuśćmy, że łamana $\overline{f_n}(x)$ została już określona i że udało nam się przytem zadość uczynić warunkom:

(2)$_n$ Łamana $\overline{f_n}$ składa się z 6^n odcinków $\overline{\delta_N}$ $(N = c_1 c_2 \ldots c_n;\ 1 \leqslant c_s \leqslant 6)$

(3)$_n$ $\overline{a_N} = a_N$, $\overline{b_N} = b_N$ dla każdej grupy N o n wskaźnikach

(4)$_n$ $\overline{m_N} . m_N \geqq 0$ „ „ „ „ „ „

(5)$_n$ maxima właściwe łamanej $\overline{f_n}$ są to te punkty postaci $\overline{a_N} = a_N$ (przy danem n), które należą do $\overline{\mathfrak{A}}$ i tylko te punkty; taksamo minima właściwe funkcji $\overline{f_n}$ są to punkty $\overline{a_N} \in \overline{\mathfrak{B}}$.

Niech $\overline{\delta_N}$ będzie jakimś odcinkiem łamanej $\overline{f_n}$. Możliwe są 3 przypadki.

Przypadek I-szy: $\overline{m_N} > 0$, a więc i $m_N > 0$ w myśl (4)$_n$ [1])

W punkcie a_{N3} funkcja $F(x)$ § 4 ma maximum, a w a_{N5} — minimum właściwe (wzory (29) i (30) § 4) Możliwe są 4 ewentualności

(·) $\qquad a_{N3} \in \mathfrak{A} . \overline{\mathfrak{A}};\quad a_{N5} \in \mathfrak{B} . \overline{\mathfrak{B}}$

(··) $\qquad a_{N3} \in \mathfrak{A} . \overline{\mathfrak{A}};\quad a_{N5} \in \mathfrak{B} - \overline{\mathfrak{B}}$

(∴) $\qquad a_{N3} \in \mathfrak{A} - \overline{\mathfrak{A}};\quad a_{N5} \in \mathfrak{B} . \overline{\mathfrak{B}}$

(∷) $\qquad a_{N3} \in \mathfrak{A} - \overline{\mathfrak{A}};\quad a_{N5} \in \mathfrak{B} - \overline{\mathfrak{B}}.$

W przypadku (·) odcinek $\overline{\delta_N} = \overline{A} . \overline{B}.$ przekształcamy na łamaną $\overline{A}\ \overline{C}\ \overline{D}\ \overline{E}\ \overline{F}\ \overline{G}\ \overline{B}$ przy pomocy konstrukcji $\overline{\chi_1^{(n)}}$, identycznej z konstrukcją $\chi(\varepsilon_n, \gamma_n, \vartheta_n)$ § 4. Łamana $\overline{A}\ \overline{C}\ \overline{D}\ \overline{E}\ \overline{F}\ \overline{G}\ \overline{B}$ jest wyznaczona przez warunki

$$\overline{a_{Nc}} = a_{Nc};\quad c = 1, 2, 3, 4, 5, 6;\quad \overline{f_{n+1}}(a_{N4}) = \overline{f_n}(a_{N4}) \tag{6}$$

$$\overline{m_{N1}} = \overline{m_{N6}} = \overline{m_N} . \gamma_n;\quad \overline{m_{N3}} = \overline{m_{N4}} = \overline{m_N} . (-\tfrac{1}{2}) \tag{7$_n$}$$

W przypadku (··) stosujemy konstrukcję $\overline{\chi_2^{(n)}}$, identyczną z konstrukcją $\chi_2^{(n)}$ § 5. Otrzymana łamana wyznaczona jest przez warunki (6) i

$$\overline{m_{N1}} = \overline{m_{N6}} = \overline{m_N} . \gamma_n;\quad \overline{m_{N3}} = -\tfrac{1}{2}\overline{m_N};\ \overline{m_{N4}} = 0 \tag{7$_2$}$$

W przypadku (∴) łamana $\overline{A}\ \overline{C}\ \overline{D}\ \overline{E}\ \overline{F}\ \overline{G}\ \overline{B} = \Omega$ (będziemy ją oznaczali krótko Ω) czyni zadość warunkom (6) i

$$\overline{m_{N1}} = \overline{m_{N6}} = \overline{m_N} . \gamma_n;\quad \overline{m_{N3}} = 0;\quad \overline{m_{N4}} = -\tfrac{1}{2} : \overline{m_N} \tag{7$_3$}$$

W przypadku (∷) Ω spełnia warunki (6) i

$$\overline{m_{N1}} = \overline{m_{N6}} = \overline{m_N} . \gamma_n;\quad \overline{m_{N3}} = \overline{m_{N4}} = 0 \tag{7$_4$}$$

[1]) $m_N \neq 0$ dla żadnej grupy wskaźników (patrz § 4).

Przypadek II-gi: $\overline{m}_N < 0$, a więc i $m_N < 0$. Punkty a_{N3} i a_{N5} zmieniają swe role: $a_{N5} \in \mathfrak{A}$, $a_{N3} \in \mathfrak{B}$. Odpowiednio należy przestawić a_{N3} z a_{N5} w ewentualnościach $(\cdot)$ $(\cdot\cdot)$ $(\therefore)$ $(::)$. Zmienione w ten sposób ewentualności nazwijmy $(+)$, $(++)$, $\left(\substack{+\\++}\right)$, $\left(\substack{++\\++}\right)$. Łamana Ω we wszystkich przypadkach ma czynić zadość warunkom (6), równościom:

(8) $$\overline{m}_{N6} = \overline{m}_{N6} = \overline{m}_N \cdot \gamma_n$$

a pozatem:
w przypadku $(+)$ warunkom

(7)$_5$ $$\overline{m}_{N3} = \overline{m}_{N4} = -\tfrac{1}{2}\,\overline{m}_N$$

w przypadku $(++)$ warunkom

(7)$_6$ $$\overline{m}_{N3} = 0; \quad \overline{m}_{N4} = -\tfrac{1}{2}\,\overline{m}_N$$

w przypadku $\left(\substack{+\\++}\right)$ ma być

(7)$_7$ $$\overline{m}_{N3} = -\tfrac{1}{2}\,\overline{m}_N; \quad \overline{m}_{N4} = 0$$

wreszcie w przypadku $\left(\substack{++\\++}\right)$:

(7)$_8$ $$\overline{m}_{N3} = \overline{m}_{N4} = 0$$

Przypadek III-ci: $\overline{m}_N = 0$. Tu mogą być jeszcze 2 podprzypadki $m_N > 0$ i $m_N < 0$. W przypadku $m_N > 0$ mogą z koleji zachodzić omawiane wyżej ewentualności $(\cdot)$ $(\cdot\cdot)$ $(\therefore)$ $(::)$. W każdym przypadku wymagamy, aby łamana $\Omega = \overline{A\ \ C\,D\,E\ \ F\,G\,B}$ czyniła zadość warunkom (6) i równościom

(9) $$\overline{m}_{N1} = \overline{m}_{N6} = 0$$

Pozatem ma być:
w przypadku $(\cdot)$

(7)$_9$ $$\overline{m}_{N3} = \overline{m}_{N4} = -\frac{1}{n+1},$$

w przypadku $(\cdot\cdot)$

(7)$_{10}$ $$\overline{m}_{N3} = -\frac{1}{n+1}; \quad \overline{m}_{N4} = 0,$$

w przypadku $(\therefore)$

(7)$_{11}$ $$\overline{m}_{N3} = 0; \quad \overline{m}_{N4} = -\frac{1}{n+1},$$

wreszcie w przypadku $(::)$

(7)$_{12}$ $$\overline{m}_{N3} = \overline{m}_{N4} = 0.$$

Analogicznie w przypadku $m_N < 0$ mogą zachodzić 4 ewentualności $(+)$ $(++)$ $\left(\substack{+\\++}\right)$ $\left(\substack{++\\++}\right)$. Oprócz (6) i (9) ma być
w przypadku $(+)$

(7)$_{13}$ $$\overline{m}_{N3} = \overline{m}_{N4} = +\frac{1}{n+1},$$

w przypadku $(++)$

(7)$_{14}$ $$\overline{m}_{N3} = 0; \quad \overline{m}_{N4} = +\frac{1}{n+1},$$

w przypadku $\left(\substack{+\\++}\right)$

(7)$_{15}$ $$\overline{m}_{N3} = \frac{1}{n+1}; \quad \overline{m}_{N4} = 0,$$

w przypadku $\left(\substack{++\\++}\right)$

(7)$_{16}$ $$\overline{m}_{N3} = \overline{m}_{N4} = 0.$$

Konstrukcje $\chi_i^{(n)}$ $i = 1, 2, \dots 16$ wyznaczają w ten sposób jednoznacznie łamaną $\overline{f_{n+1}(x)}$. Przeglądając kolejno te przypadki, stwierdzamy, że łamana $\overline{f}_{n+1}$ czyni zadość warunkom $(2)_{n+1}$, $(3)_{n+1}$, $(4)_{n+1}$, $(5)_{n+1}$. Ponieważ warunki te zachodzą dla $\overline{f}_0$, więc czynią im zadość wszystkie funkcje $\overline{f}_n$ przy wszelkim $n \geqslant 0$. Następnie ustalamy związki między pochodnemi $\overline{f}'_{+n}$ i $\overline{f}'_{+(n+1)}$.[1])

Jeżeli $\overline{f}'_{+n}(x) \neq 0$ (przypadki $\overline{m}_N > 0$ i $\overline{m}_N < 0$), to

(10) bądź $$\frac{\overline{f}'_{+(n+1)}(x)}{\overline{f}'_{+n}(x)} = \gamma_n$$ [w przedziałach l^*_{N1} i l^*_{N6}]

(11) bądź $$1 < \frac{\overline{f}'_{+(n+1)}(x)}{\overline{f}'_{+n}(x)} \leqq \tau_n$$ [w przedziałach l^*_{N2} i l^*_{N5}], gdzie

(12) $$\tau_n = \frac{1 - \varepsilon_n \cdot \gamma_n + \frac{1}{2}\vartheta_n}{1 - \varepsilon_n - \vartheta_n}$$

(13) bądź $\overline{f}'_{+(n+1)}(x) = \overline{f}'_{+n}(x) \cdot (-\tfrac{1}{2})$
(14) bądź $\overline{f}'_{+(n+1)}(x) = 0$
[w przedziałach l^*_{N3} i l^*_{N4}]

Jeżeli zaś $\overline{f}'_{+n}(x) = 0$ (przypadek $\overline{m}_N = 0$), to

(15) bądź $$\overline{f}'_{+(n+1)}(x) = 0,$$

(16) bądź $$|f'_{+(n+1)}(x)| \leqq \frac{1}{n+1},$$

[1]) Analogiczne związki zachodzą dla lewostronnych pochodnych.

Podobnie, jak w § 5, sprawdzamy indukcyjnie, że

(17) $$|\overline{f}'_{+n}(x)| \leqq \prod_{s=0}^{n-1} \tau_s \quad \text{dla każdego } x \text{ i } n,$$

stąd

(18) $$|\overline{f}'_{+n}(x)| \leqq L = \prod_{s=0}^{\infty} \tau_s \quad \text{dla każdego } x \text{ i } n.$$

Analogicznie dla każdego $x \in l_P^*$ $(P = c_1 c_2 \ldots c_p)$ i $n \geqslant p$:

(19)$_1$ $$|\overline{f}'_{+n}(x)| \leqq |\overline{m}_P| . L_p \quad \text{przy } \overline{m}_P \neq 0$$

(19)$_2$ $$|\overline{f}'_{+n}(x)| \leqq \frac{1}{p+1} \cdot L_p \quad \text{przy } \overline{m}_P = 0, \text{ gdzie,}$$

(20) $$L_p = \prod_{s=p}^{\infty} \tau_s$$

Dowody:

1°. (21) $$\overline{f}_n(x) = \overline{F}(x); \quad \overline{F} \text{— funkcja ciągła,}$$

(22) $$|\overline{f}_n(x) - \overline{F}(x)| \leqq \varepsilon_n . l_N . L \quad \text{dla każdego } x \in l_N^*$$

2°.

(23) $$\lim_{n \to \infty} \overline{f}'_{+n}(x) = \lim_{n \to \infty} \overline{f}'_{-n}(x) = \overline{G}(x) \quad \text{dla każdego } x \in I = (0, 1)$$

3°.

(24) $$\overline{F}'(x) = \overline{G}(x) \text{ dla każdego } x \in I$$

są zupełnie takie same jak w § 5. (Lemmaty I, II, III § 4 są i teraz prawdziwe przy zastrzeżeniu: $\overline{m}_N \neq 0$)

4°. Funkcja $\overline{F}(x)$ ma maxima właściwe w punktach zbioru $\overline{\mathfrak{A}}$, minima właściwe w punktach zbioru $\overline{\mathfrak{B}}$ i nie posiada extremów właściwych poza zbiorem $\overline{\mathfrak{A}} + \overline{\mathfrak{B}}$.

Niech, np. $x = \overline{a}_N = a_N \in \overline{\mathfrak{A}}$. Na zasadzie (5)$_n$ w punkcie $x = a_N$ zachodzi maximum właściwe łamanej, $\overline{f}_n$ a więc i funkcji $\overline{F}(x)$ ze względu na nierówności (32) § 4 (które i teraz są prawdziwe).

Aby się przekonać, że poza zbiorem $\overline{\mathfrak{A}} + \overline{\mathfrak{B}}$ funkcja $\overline{F}(x)$ nie ma extremów właściwych, rozumujemy tak, jak w § 5. Jeżeli x leży wewnątrz każdego z przedziałów.

(25) $$l_{c_1}, \; l^*_{c_1 c_2}, \ldots l^*_N, \ldots$$

i dla nieskończenie wielu n: $\overline{m}_N \neq 0$, to w punkcie x niema extremum na zasadzie (32) § 4. Jeżeli zaś dla $k \geqq n$.

(26) $$\overline{m}_K = 0 \quad (k \geqq n)$$

to x należy do zbioru doskonałego $\mathfrak{P}_N \subset l_N^*$, w którym to zbiorze funkcja $\overline{F}(x)$ przyjmuje stałą wartość $\overline{F}(x) = \overline{F}(a_N) = \overline{f}_n(a_N)$. I w tym przypadku w punkcie x nie może zachodzić extremum właściwe.

Zbiór doskonały $\mathfrak{P}_N$ powstaje z l_N^* w sposób następujący. Usuńmy z l_N^* te punkty x, w których $\overline{f}_{n+1}(x) \neq \overline{f}_n(x)$. Pozostaną conajmniej 2 przedziały (zamknięte) postaci l^*_{Nc} [1]). Z każdym z nich powtarzamy tę samą operację co z l_N^* i t. d. ad infinitum. Zbiór punktów nieusuniętych będzie zbiorem $\mathfrak{P}_N$.

W ten sposób Twierdzenie A. jest udowodnione. Funkcja $\overline{F}(x)$ spełnia warunek Lipschitza gdyż

$$|\overline{F}'(x)| = |\overline{G}(x)| \leqq L$$

ze względu na (18).

§ 7. Twierdzenie B.

Lemmat. Założenia.

(1) $$I = (a, b), \quad K = (c, d) \quad \text{2 odcinki otwarte}$$

(2) $$A \subset I, \qquad B \subset K$$

2 zbiory przeliczalne wszędziegęste odpowiednio na I i na K.

Teza. Zbiór A można odwzorować w sposób podobny na zbiór B przy pomocy funkcji $\varphi(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ rosnącej i wszędzie różniczkowalnej.

Dowód. Niech

(3) $$A = \{a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots\},$$

(4) $$B = \{b_1, b_2, \ldots b_n, \ldots\}$$

Zagadnienie sprowadza się do ustawienia elementów zbiorów A i B w ciągi

$$\{x_n\} \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$\{y_n\} \quad n = 1, 2 \ldots$$

w ten sposób, żeby wzór

(5) $$y_n = \varphi(x_n)$$

określał funkcję żądaną: rosnącą i różniczkowalną.

---

[1]) Przedziały l^*_{N1} i l^*_{N0} pozostaną w każdym razie.

Dajemy sobie ciąg liczb $\{\sigma_n\}$ $n = 1, 2, \ldots$ takich, że

(6) $$0 < \sigma_n < 1$$

(7) Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n$ jest zbieżny

Przystępując do konstrukcji odwzorowania żądanego, kładziemy $x_1 = a_1$.

Punkt x_1 dzieli I na 2 odcinki $I_1^{(1)}$, $I_2^{(1)}$; stosunek długości tych odcinków niech będzie

(8) $$\lambda_1 = \frac{\overline{I_1^{(1)}}}{\overline{I_2^{(1)}}}$$

(przez $\overline{\delta}$ rozumiemy ogólnie długość odcinka δ). Odcinek $I_2^{(1)}$ niech leży na prawo od $I_1^{(1)}$.

Punktowi $x_1 = a_1$ przyporządkujemy jako y_1 pierwszy element b_{n_1} ciągu (4), który dzieli K na 2 odcinki $K_1^{(1)}$, $K_2^{(1)}$ [$K_2^{(1)}$ na prawo od $K_1^{(1)}$] takie, że

$(9)_1$ $$\left|\frac{\mu_1}{\lambda_1} - 1\right| < \sigma_1 \text{ i } \left|\frac{\lambda_1}{\mu_1} - 1\right| < \sigma_1, \text{ gdzie}$$

(10) $$\mu_1 = \frac{\overline{K_1^{(1)}}}{\overline{K_2^{(1)}}}.$$

Element żądany $y_1 = b_{n_1}$ istnieje ze względu na to, że zbiór B jest wszędziegęsty w K.

Przypuśćmy teraz, że przyporządkowaliśmy już sobie w sposób podobny elementy

$$x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$$
$$y_1, y_2, \ldots y_{n-1} \quad (n > 1)$$

Punkty te dzielą I i K odpowiednio na odcinki

(11) $$I_1^{(n-1)}, \; I_2^{(n-1)}, \ldots, \; I_n^{(n-1)},$$

(12) $$K_1^{(n-1)}, \; K_2^{(n-1)}, \ldots, \; K_n^{(n-1)}$$

($I_{h+1}^{(n-1)}$ niech leży na prawo od $I_h^{(n-1)}$; to samo dla odcinków $K_{h+1}^{(n-1)}$ i $K_h^{(n-1)}$)

Jeżeli $n \not\equiv 0$ (mod. 2), to określamy naprzód x_n jako pierwszy element ciągu (3) różny od $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$. Punkt x_n leży wewnątrz jednego z odcinków (11) np. $I_p^{(n-1)}$; stosunek, w jakim x_n dzieli $I_p^{(n-1)}$, niech będzie λ_n. Elementowi x_n przyporządkujemy jako y_n pierwszy element ciągu (4), położony wewnątrz $K_p^{(n-1)}$ i dzielący ten odcinek w stosunku μ_n, takim, że jednocześnie:

$(9)_n$ $$\left|\frac{\mu_n}{\lambda_n} - 1\right| < \sigma_n; \quad \left|\frac{\lambda_n}{\mu_n} - 1\right| < \sigma_n$$

Element żądany y_n wyznaczyć można ze względu na wszędziegęstość zbioru B na K.

Jeżeli zaś $n \equiv 0$ (mod. 2), to określamy naprzód y_n jako pierwszy element ciągu (4), różny od $y_1, y_2, \ldots y_{n-1}$. Niech y_n należy do $K_p^{(n-1)}$ i dzieli ten odcinek w stosunku μ_n. Elementowi y_n przyporządkujemy jako x_n pierwszy element ciągu (3), położony wewnątrz $I_p^{(n-1)}$ i dzielący $I_p^{(n-1)}$ w stosunku λ_n, czyniącym zadość nierównościom $(9)_n$. Element x_n istnieje ze względu na wszędziegęstość zbioru A na I.

Jasnem jest, że umowy powyższe określają odwzorowanie podobne A na B. Jednocześnie zbiór $A \cdot I_r^{(n)}$ odwzorowywuje się w sposób podobny na $B \cdot K_r^{(n)}$ $(r = 1, 2, \ldots n+1)$ przy każdym n.

Udowodnimy, że przy każdem $n \geqq 0$ zachodzi nierówność

$(13)_n$ $$\frac{\overline{K}}{\overline{I}} \cdot \prod_{m=0}^{n} (1 - \sigma_m) \leqq \frac{\overline{K_r^{(n)}}}{\overline{I_r^{(n)}}} \leqq \frac{\overline{K}}{\overline{I}} \cdot \prod_{m=0}^{n} (1 + \sigma_m) \quad (1 \leqslant r \leqslant n+1)$$

(Przyjmujemy tu oznaczenia: $I_1^{(0)} = I$, $K_1^{(0)} = K$; $\sigma_0 = 0$).

Nierówność $(13)_0$ jest prawdziwa. Załóżmy, że zachodzi $(13)_{n-1}$.

Odcinek $I_r^{(n)}$ powstał w ten sposób, że jeden z odcinków (11) np. $I_s^{(n-1)}$ został przez punkt x_n podzielony na 2 odcinki $I_h^{(n)}$ i $I_{h+1}^{(n)}$. $I_r^{(n)}$ jest jednym z tych odcinków: $r = h$ albo $r = h+1$. Załóżmy np., że $r = h$. Wtedy

(14) $$\overline{I_r^{(n)}} = \frac{\lambda_n}{1+\lambda_n} \cdot \overline{I_s^{(n-1)}}; \quad \overline{K_r^{(n)}} = \frac{\mu_n}{1+\mu_n} \cdot \overline{K_s^{(n-1)}}$$

Łatwo widzieć, że stosunek

(15) $$\frac{\mu_n}{1+\mu_n} : \frac{\lambda_n}{1+\lambda_n}$$

jast zawsze zawarty między 1 a $\frac{\mu_n}{\lambda_n}$ niezależnie od tego czy $\mu_n \gtreqless \lambda_n$.

Wobec tego nierówności $(9)_n$ dają

(16) $$1 - \sigma_n < \frac{\mu_n}{1+\mu_n} : \frac{\lambda_n}{1+\lambda_n} < 1 + \sigma_n.$$

Nierówność ta w połączeniu z wzorami (14) i prawdziwą z założenia nierównością $(13)_{n-1}$ (przy $r = s$) daje $(13)_n$. Tą samą nierówność $(13)_n$

otrzymalibyśmy, zakładając $r = h+1$. Nierówność $(13)_n$ jest więc prawdziwa przy każdem n. Wynika z niej natychmiast ważny wniosek

(17) $$\frac{\overline{K}}{\overline{I}} \cdot S \leqq \frac{\overline{K_r^{(n)}}}{\overline{I_r^{(n)}}} \leqq \frac{\overline{K}}{\overline{I}} \cdot T; \ (1 \leqslant r \leqslant n+1) \text{ przy każdem } n$$

gdzie

(18) $$S = \prod_{m=0}^{\infty} (1-\sigma_m) > 0; \ T = \prod_{m=0}^{\infty} (1+\sigma_m)$$

oba iloczyny nieskończone są zbieżne ze względu na (7) i (6).

Z nierówności (17) łatwo wyprowadzić, że przy dowolnych m i $n \neq m$:

(19) $$\frac{\overline{K}}{\overline{I}} \cdot S \leqq \frac{y_n - y_m}{x_n - x_m} \leqq \frac{\overline{K}}{\overline{I}} \cdot T$$

Istotnie. Niech np. $n > m$ i $x_n > x_m$. Odcinek (x_m, x_n) jest sumą pewnej liczby odcinków $I_i^{(n)}, I_{i+1}^{(n)}, \ldots I_k^{(n)}$:

(20) $$x_n - x_m = \sum_{s=i}^{k} \overline{I_s^{(n)}}$$

Analogicznie

(20)' $$y_n - y_m = \sum_{s=i}^{k} . \ \overline{K_s^{(n)}}$$

Ponieważ wszystkie stosunki $\dfrac{\overline{K_s^{(n)}}}{\overline{I_s^{(n)}}}$ $(i \leqslant s \leqslant k)$ czynią zadość (17), więc wzory (20) i (20)' dają (19).

Określamy teraz funkcję $\varphi(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$. Jeżeli $x = x_n$, to kładziemy

(5) $$\varphi(x_n) = y_n$$

Jeżeli zaś x nie należy do A, to

(21) $$\varphi(x) = \lim_{k\to\infty} \varphi(x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} y_{n_k},$$

gdzie $\{x_{n_k}\}$ $k = 1, 2, \ldots$ jest dowolnym ciągiem punktów zdążających do x:

(22) $$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$$

Przy pomocy (19) łatwo dowieść, że granica (21) istnieje i wartość jej jest ta sama dla wszystkich ciądów $\{x_{n_k}\}$ zmierzających do x.

Z tejże nierówności (19) wynika, że funkcjia $\varphi(x)$ jest wszędzie ciągła, oraz że

(23) $$\frac{\overline{K}}{\overline{I}} \cdot S \leqq \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} \leqq \frac{\overline{K}}{\overline{I}} \cdot T$$

dla każdego h. Funkcja φ stale rośnie, gdyż $S > 0$.

Pozostaje udowodnić, że funkcja φ jest wszędzie różniczkowalna. W tym celu uogólnimy nierówności (17) i (19).

Weźmy pod uwagę jakiś odcinek $I_r^{(n)}$. Dowiedziemy, że dla każdego

(24) $$I_s^{(m)} \subset I_r^{(n)} \quad (m > n)$$

jest

(25) $$\frac{\overline{K_r^{(n)}}}{\overline{I_r^{(n)}}} \cdot S_n \leqq \frac{\overline{K_s^{(m)}}}{\overline{I_s^{(m)}}} \leqq T_n \cdot \frac{\overline{K_r^{(n)}}}{\overline{I_r^{(n)}}}, \text{ gdzie}$$

(26) $$S_n = \prod_{k=n}^{\infty} (1-\sigma_k); \ T_n = \prod_{k=n}^{\infty} (1+\sigma_k),$$

Aby się o tem przekonać usuńmy z ciągu $\{x_n\}$ wszystkie punkty leżące nazewnątrz $I_r^{(n)}$ (a więc i krańce odcinka $I_r^{(n)}$).

Pozostanie ciąg nieskończony $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots$ $(n_1 < n_2 < \ldots)$, którego elementy będą tworzyły zbiór $A \, . \, I_r^{(n)}$. Naturalnie

(27) $$n_1 > n,$$

gdyż punkty $x_1, x_2, \ldots x_n$ z pewnością zostały usunięte.

Teraz z ciągami $\{x_{n_i}\}$, $\{y_{n_i}\}$ i odcinkami $I_r^{(n)}$, $K_r^{(n)}$ możemy powtórzyć to samo rozumowanie co przedtem z ciągami $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ i odcinkami I, K przy dowodzie (17). Otrzymamy.

(28) $$\frac{\overline{K_r^{(n)}}}{\overline{I_r^{(n)}}} \cdot \prod_{i=1}^{\infty} (1-\sigma_{n_i}) \leqq \frac{\overline{K_s^{(m)}}}{\overline{I_s^{(m)}}} \leqq \frac{\overline{K_r^{(n)}}}{\overline{I_r^{(n)}}} \cdot \prod_{i=1}^{\infty} (1+\sigma_{n_i}).$$

Ponieważ

(29) $$\prod_{i=1}^{\infty} (1-\sigma_{n_i}) \geqq S_n \, ; \quad \prod_{i=1}^{\infty} (1+\sigma_{n_i}) \leqq T_n$$

ze względu na (27), więc z (28) wynika (25).

Z (25) otrzymujemy najprzód

(31) $$\frac{\overline{K_r^{(n)}}}{\overline{I_r^{(n)}}} \cdot S_n \leqq \frac{y_p - y_q}{x_p - x_q} \leqq \frac{\overline{K_r^{(n)}}}{\overline{I_r^{(n)}}} \cdot T_n$$

dla każdej pary punktów x_p i x_q, należących do $A \, . \, I_r^{(n)}$, a następnie:

(31) $$\frac{\overline{K}_r^{(n)}}{\underline{I}_r^{(n)}}\cdot S_n \leqq \frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} \leqq \frac{\overline{K}_r^{(n)}}{\underline{I}_r^{(n)}}\cdot T_n$$

dla dowolnych $x \in I_r^{(n)}$ i $x+h \in I_r^{(n)}$.

Teraz już łatwo sprawdzić różniczkowalność funkcji $\varphi(x)$.

Niech naprzód x nie należy do A. Połóżmy:

(32) $$\delta_n = \text{Minim.}\ \{|x-x_1|,\ |x-x_2|, \dots |x-x_n|\}.$$

Niech $x \in I_r^{(n)}$; przy $|h| < \delta_n$ będzie również $x+h \in I_r^{(n)}$ i stosunek

$$\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}$$

będzie czynił zadość nierównościom (31). Tym samym nierównościom czynią więc zadość liczby

(33) $$\liminf_{h\to 0} \frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} = \underline{\varphi}'(x);\quad \limsup_{h\to 0} \frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} = \overline{\varphi}'(x)$$

Wobec tego

(34) $$0 \leqq \overline{\varphi}'(x) - \underline{\varphi}'(x) \leqq \frac{\overline{K}_r^{(n)}}{\underline{I}_r^{(n)}}(T_n - S_n)$$

$$\leqq \frac{\overline{K}}{\underline{I}}\cdot T(T_n - S_n) \quad \text{(patrz (17))}$$

Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} T_n = 1$ (wzory (26)), więc:

(35) $$\overline{\varphi}'(x) = \underline{\varphi}'(x) = \varphi'(x).$$

Istnieje więc pochodna $\varphi'(x)$.

W przypadku $x \in A$, $x = x_p$ ograniczamy się do $n > p$ i kładziemy

(32)' $$\delta_n = \text{Minim.}\ \{|x-x_1|, \dots |x-x_{p-1}|,\ |x-x_{p+1}|, \dots |x-x_n|\}$$

Dalej rozumujemy jak poprzednio.

W ten sposób nasz lemmat jest udowodniony. Zauważymy, że

(36) $$\frac{\underline{K}}{\overline{I}}\cdot S \leqq \varphi'(x) \leqq \frac{\overline{K}}{\underline{I}}\cdot T \quad \text{dla każdego } x$$

ze względu na (23).

Twierdzenie B. Założenia

(+) $$A_1 \subset I,\quad A_2 \subset I,\quad A_1 . A_2 = 0;\quad I = (a, b),$$

(++) $$B_1 \subset K,\quad B_2 \subset K,\quad B_2 . B_2 = 0;\quad K = (c, d)$$

$(\overset{+}{+\,+})$ Zbiory przeliczalne A_1 i A_2 są oba wszędziegęste w I, a zbiory przeliczalne B_1 i B_2 są wszędziegęste w K.

Teza. Istnieje funkcja $\varphi(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ rosnąca i wszędzie różniczkowalna, która jednocześnie odwzorowywuje A_1 na B_1 i A_2 na B_2.

Dowód. Niech

$$A_1 = \{a_n^{(1)}\},\quad A_2 = \{a_n^{(2)}\},\quad B_1 = \{b_n^{(1)}\},\quad B_2 = \{b_n^{(2)}\};\quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Utwórzmy sumy $A = A_1 + A_2$, $B = B_1 + B_2$.

$$A = \{a_n\},\quad B = \{b_n\},\quad \text{gdzie}$$

$$a_{2k-1} = a_k^{(1)},\quad a_{2k} = a_k^{(2)},\quad b_{2k-1} = b_k^{(1)},\quad b_{2k} = b_k^{(2)}$$

Ze zbiorami A i B postępujemy teraz w ten sam sposób jak w Lemmacie, dbając tylko o to, żeby elementom ciągu $\{a_n\}$ o wskaźnikach nieprzepartych (wzgl. parzystych) odpowiadały elementy ciągu $\{b_n\}$ również o wskaźnikach nieparzystych (wzgl. parzystych). Dalszy ciąg rozumowania bez zmiany.

§ 8. Twierdzenie ogólne.

Twierdzenie. Założenie:

(1) $$\overline{A} \subset I,\quad \overline{B} \subset I;\quad \overline{A} . \overline{B} = 0$$

— 2 zbiory przeliczalne rozłączne dane dowolnie i położone na odcinku otwartym $I = (0, 1)$.

Teza. Istnieje funkcja $H(x)$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ wszędzie różniczkowalna posiadająca maxima właściwe w punktach zbioru $\overline{A}$, — minima właściwe w punktach zbioru $\overline{B}$ i nie posiadająca żadnych extremów właściwych poza zbiorem $\overline{A} + \overline{B}$.

Dowód. Łatwo wskazać 2 zbiory przeliczalne A i B takie, że

1^0 $$\overline{A} \subset A \subset I;\quad \overline{B} \subset B \subset I.$$

2^0 $$A . B = 0$$

3^0 Oba zbiory A i B są wszędziegęste na $I = (0, 1)$

Na zasadzie „Twierdzenia B" § 7 istnieje funkcja $y = \varphi(x)$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ rosnąca i wszędzie różniczkowalna, która odwzorowywuje jednocześnie A na $\mathfrak{A}$ i B na $\mathfrak{B}$ [1]), gdzie $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ są to zbiory § 4:

$\mathfrak{A}$ — jest to zbiór maximów, a $\mathfrak{B}$ — zbiór minimów właściwych funkcji (y) $(0 \leqq y \leqq 1)$ § 4.

W odwzorowaniu $y = \varphi(x)$ zbiorom $\bar{A}$ i $\bar{B}$ odpowiadają pewne podmnogości $\bar{\mathfrak{A}}$ i $\bar{\mathfrak{B}}$ zbiorów $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$. Na zasadzie „Twierdzenia A" § 6 istnieje funkcja $F(y)$ $(0 \leqq y \leqq 1)$ wszędzie różniczkowalna, dla której zbiór $\bar{\mathfrak{A}}$. jest zbiorem maximów właściwych, a zbiór $\bar{\mathfrak{B}}$ — zbiorem minimów właściwych.

Funkcja.

$$H(x) = F\{\varphi(x)\}; \quad (0 \leqq x \leqq 1) \tag{2}$$

jest funkcją żądaną.

Uwaga. Pochodna $H'(x)$ jest ograniczona (ponieważ ograniczone są obie funkcje $F'(y)$ i $\varphi'(x)$).

[1]) Rolę zbiorów A_1 i A_2 § 7 grają teraz A i B, a rolę B_1 i B_2 grają $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ $a = c = 0$, $b = d = 1$. Ideę posługiwania się odwzorowaniem $y = \varphi(x)$ zawdzięczam prof. *Mazurkiewiczowi.*

RÉSUMÉ.

Nous convenons de dire qu'une fonction $f(x)$ définie dans un intervalle $I = (a \leqq x \leqq b)$ est „une fonction de Köpcke" si elle est dérivable dans I et vérifie la condition:

(α) l'ensemble de zéros de la fonction dérivée $f'(x)$ est dense dans I.

L'existence des fonctions jouissant de la dite propriété a été démontrée pour la premiére fois par Köpcke. Outre cela ces fonctions peuvent jouir d'autres propriétés intéressantes, elles peuvent:

1) croître constamment (M. Pompeiu);

2) admettre un ensemble dense (dans I) de traits d'invariabilité (M. Mazurkiewicz);

3) admettre un ensemble dense de maxima et de minima stricts (Köpcke);

4) admettre un ensemble dense de maxima stricts sans avoir un seul minimum strict (M. Mazurkiewicz),

Aux §§ 2 — 5 je donne des exemples simples de toutes ces singularités, en se servant toujours de la même méthode géometrique bien intuitive, qui est, à mon égard, une simplification des procédés constructifs classiques indiqués par M.M. Köpcke, Broden, Schoenfliess.

Aux § 6 — 8 j'obtiens un résultat nouveau:

$\bar{A}$ i $\bar{B}$ étant deux ensembles dénombrables sans points communs donnés d'avance sur un intervalle $I = (a \leqq x \leqq b)$, il existe une fonction dérivable $H(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ qui:

1° admet un maximum strict pour tout $x \in \bar{A}$;

2° admet un minimum strict pour tout $x \in \bar{B}$;

3° n'admet aucun extremum strict en dehors des ensembles $\bar{A}$ et $\bar{B}$."

J'arrive à cet théorème de la manière suivante:

Au § 4 j'avais obtenu une fonction dérivable $F(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ telle que les ensembles $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ de maxima et de minima de la fonction F sont tous les deux denses dans $I=(a \leqq x \leqq b)$. Au § 6 je démontre, qu'on peut détruire une partie (arbitraire) d'extrema stricts de la fonction F sans introduire des nouveaux extrema stricsts; je démontre notamment le suivant

„Théorème A". $\overline{\mathfrak{A}} \subset \mathfrak{A}$ et $\overline{\mathfrak{B}} \subset \mathfrak{B}$ étant deux sous-ensembles quelconques des ensembles $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ nommés tout à l'heure, il existe une fonction dérivable $\overline{F}(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ dont les ensembles de maxima et de minima sont précisemment les ensembles $\overline{\mathfrak{A}}$ et $\overline{\mathfrak{B}}$."

Puis je démontre (au § 7) le second théorème auxiliaire,

„Théorème B". Prémisses.:

1) A et B sont deux ensembles dénombrables sans points communs situés à l'intérieur d'un intervalle $I=(a \leqq x \leqq b)$ et denses dans I

2) $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ sont deux ensembles analogues relatifs à un autre intervalle

$$K=(c \leqq y \leqq d).$$

Thèse. Il existe une fonction $y=\varphi(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ croissante et dérivable qui établie simultanément une correspondance biunivoque entre A et $\mathfrak{A}$ et entre B et $\mathfrak{B}$" De ces théorèmes auxiliaires le résultat principal se déduit en quelques lignes.

Soient $\overline{A}$ et $\overline{B}$ deux ensembles dénombrables sans points communs situés à l'intérieur de $I=(a \leqq x \leqq b)$. Ces ensembles ne sont pas nécessairement tous les deux denses dans I, mais on peut toujours trouver deux autres ensembles dénombrables tels que:

1) $\overline{A} \subset A \subset I$; $\overline{B} \subset B \subset I$ 2) $A \,.\, B=0$ 3) A et B sont denses dans I

Soit $y=\varphi(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ une une fonction croissante et dérivable qui donne une réprésentation semblable des ensembles A et B sur les ensembles $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ de maxima et de minima de la fonction $F(y)$ $(a \leqq y \leqq b)$ construite au § 4. La transformation $y=\varphi(x)$ fait correspondre aux sous-ensembles $\overline{A} \subset A$ et $\overline{B} \subset B$ deux sous-ensembles $\overline{\mathfrak{A}} \subset \mathfrak{A}$ et $\overline{\mathfrak{B}} \subset \mathfrak{B}$. En vertu de „Théorème A" il existe une fonction dérivable $\overline{F}(y)$ $(a \leqq y \leqq b)$ dont les maxima stricts forment précisement l'ensemble $\overline{\mathfrak{A}}$ et les minima stricts — l'ensemble $\overline{\mathfrak{B}}$. En posant

$$H(x)=\overline{F}\{\varphi(x)\}; \quad (a \leqq x \leqq b)$$

on obtient la fonction cherchée H:

1⁰. elle est dérivable dans I; 2⁰ elle admet un maximum strict pour tout $x \in \overline{A}$ et un minimum strict pour tout $x \in \overline{B}$; 3⁰ elle n'admet aucun extremum strict en dehors des ensembles $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

Remarque. Toutes les fonctions construites au présent mémoire vérifient la condition de Lipschitz.