

ANTONI PLAMITZER.

Utwory pewnej klasy przekształceń kwadratowych

pomiędzy układami płaskimi, wzgl. związkami.

Erzeugnisse einer Klasse quadratischer Verwandtschaften
zwischen Grundgebilden zweiter Stufe.

W części I-ej niniejszej pracy ustalam n przekształceń kwadratowych pomiędzy jednoimiennymi elementami układu płaskiego, oraz każdego z pośród n kolineacyjnych układów płaskich. Podobnie ustalam też n przekształceń kwadratowych pomiędzy jednoimiennymi elementami wiązki, oraz każdej z pośród n kolineacyjnych wiązek. W trzech dalszych częściach tej rozprawy omawiam własności trzech, czterech i pięciu układów płaskich, wzgl. wiązek, pomiędzy którymi zachodzą powyższe przekształcenia kwadratowe. W części II-ej badam też własności krzywych płaskich i powierzchni stożkowych 5-ej klasy (wzgl. 5-go rzędu) i 3-go rodzaju, które są utworami trzech takich układów płaskich, wzgl. wiązek. W części III-ej omawiam¹⁾ niektóre własności powierzchni krzywolinjowej 5-go rzędu, z podwójną krzywą skośną rzędu 3-go, która jest utworem trzech takich wiązek płaszczyzn. Następnie badam własności krzywej skośnej 9-go rzędu i 6-go rodzaju, która jest utworem czterech takich wiązek płaszczyzn. Utworem tym podporządkowane są dwoiście powierzchnia krzywolinjowa 5-ej klasy i powierzchnia rozwijalna 9-ej klasy.

W części IV-ej przechodzę do zagadnień geometrii linii prostej. Przyjmując trzy, cztery i pięć takich wiązek (wzgl. układów płaskich), badam własności kompleksów prostych 5-go stopnia, kongruencyj prostych 9-go stopnia i powierzchni skośnych 28-go stopnia, które są utworzone

¹⁾ Szczegółowe badania własności tej powierzchni ogłoszę w osobnej rozprawie.

przez proste, przecinające homologiczne proste uważanych utworów. Przy sześciu wiązkach (układach płaskich) występuje 40 prostych, z których każda przecina sześć homologicznych prostych danych utworów.

I.

1. Pomiedzy układami płaskimi $(\omega_1), (\omega_2) \dots (\omega_n)$, które posiadają różne od siebie płaszczyzny podstawowe ω_i ($i = 1, \dots, n$), ustanowimy ogólne *kolineacje* za pośrednictwem łańcucha ogniw

$$(\omega_1) \times (\omega_2) \times (\omega_3) \times \dots \times (\omega_n). \quad (1)$$

Punkty (wzgl. proste) podporządkowane sobie w tych układach oznaczajmy będziemy przez $A_1, A_2, \dots, A_n$, a owe proste homologiczne przez $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Pomiedzy punktami układu płaskiego (ω) , którego podstawą jest dowolna (i różna od ω_i) płaszczyzna ω , oraz punktami układu (ω_i) ustanowimy ogólne *przekształcenie kwadratowe* (przekształcenie kremonjańskie 2-go stopnia), wyrażone symbolem:

$$(\omega) \pi^2 (\omega_i). \quad (2)$$

Niechaj punkty: L, M, N układu (ω) i punkty: X_1, Y_1, Z_1 układu (ω_1) będą *punktami głównymi*, a proste $x = NM, y = NL, z = LM$ układu (ω) i proste: $l_1 = Z_1 Y_1, m_1 = Z_1 X_1, n_1 = X_1 Y_1$ układu (ω_1) będą *prostami głównymi* owego przekształcenia kwadratowego. — Wówczas dowolnemu punktowi A układu (ω) , który nie leży na żadnej prostej głównej tego układu, podporządkowany jest w układzie (ω_1) jeden i tylko jeden punkt A_1 , nie przynależny do żadnej prostej głównej układu (ω_1) , i na odwrót. Natomiast punktowi głównemu np. L układu (ω) podporządkowane są w układzie (ω_1) wszystkie punkty prostej głównej l_1 , oraz punktowi głównemu np. Z_1 układu (ω_1) podporządkowane są w układzie (ω) wszystkie punkty, leżące na prostej głównej z . Podobne własności posiadają elementy główne: M i m_1, N i n_1, X i x_1 , oraz Y_1 i y_1 uważanych układów.

Z zależności geometrycznych (1) i (2) wynikają bezpośrednio *przekształcenia kwadratowe* pomiedzy punktami układu (ω) i punktami każdego z pozostałych układów płaskich $(\omega_2), (\omega_3), \dots, (\omega_n)$, co wyrazić możemy symbolem:

$$(\omega) \pi^2 (\omega_2), (\omega) \pi^2 (\omega_3), \dots, (\omega) \pi^2 (\omega_n). \quad (3)$$

Punktom głównym X_1, Y_1, Z_1 i prostym głównym l_1, m_1, n_1 układu płaskiego (ω_1) niechaj—w myśl relacji (1)—podporządkowane będą odpow.

punkty X_i, Y_i, Z_i i proste l_i, m_i, n_i ($i = 2, 3, \dots, n$) w układzie (ω_i) . Skonstruowane pod (3) przekształcenia kwadratowe posiadają tę charakterystyczną własność, że: Punkty L, M, N układu (ω) i punkty X_i, Y_i, Z_i układu (ω_i) są *punktami głównymi*, a proste $x = NM, y = NL, z = LM$ układu (ω) i proste $l_i = Z_i Y_i, m_i = Z_i X_i, n_i = X_i Y_i$ układu (ω_i) są *prostami głównymi* owych przekształceń kwadratowych. — Dowolnemu punktowi A układu (ω) , nie leżącemu na żadnej prostej głównej tego układu, podporządkowany jest w układzie (ω_i) jeden i tylko jeden punkt A_i , nie przynależny do żadnej prostej głównej układu (ω_i) , i naodwrot. Owe punkty A_i są oczywiście — w myśl relacji (1) — elementami homologicznymi kolineacyjnymi układów (ω_i) .

W dotychczasowych rozważaniach przyjmowaliśmy dowolne i różne od siebie płaszczyzny za podstawy układów płaskich. Skoro założymy, że omawiane układy płaskie $(\omega), (\omega_1), \dots, (\omega_n)$ posiadają wspólną płaszczyznę podstawową ω , to otrzymamy szczególny przypadek zależności geometrycznych, wypisanych pod (1), (2) i (3).

2. Stosując zasadę „dwoistości w przestrzeni do rozważań ustępu 1-go, otrzymamy wprost analogiczne zależności geometryczne pomiedzy płaszczyznami wiązek środkowych $(W), (W_1), \dots, (W_n)$, których środkami (wierzchołkami) są: a) albo różne od siebie punkty $W, W_1, \dots, W_n$, b) albo też punkty zjednoczone w punkcie W . W szczególności ustanowimy (dla $i = 1, 2, \dots, n$) pomiedzy wiązkami (W_i) ogólne *kolineacje* za pośrednictwem łańcucha ogniw

$$(W_1) \times (W_2) \times (W_3) \times \dots \times (W_n) \quad (1a)$$

oraz ogólne *przekształcenia kwadratowe* (przekształcenia kremonjańskie 2-go stopnia)

$$(W) \pi^2 (W_1) \quad (2a)$$

$$(W) \pi^2 (W_2), (W) \pi^2 (W_3), \dots, (W) \pi^2 (W_n) \quad (3a)$$

pomiedzy płaszczyznami tych wiązek. Skonstruowane w ten sposób przekształcenia kwadratowe posiadają tę charakterystyczną własność: Płaszczyzny λ, μ, ν wiązki (W) i płaszczyzny ξ_i, η_i, ζ_i wiązki (W_i) , podporządkowane dwoiście elementom głównym L, M, N i X_i, Y_i, Z_i (ust. 1) układów płaskich (ω) i (ω_i) , są *płaszczyznami głównymi*, a proste: $x = \nu \mu, y = \nu \lambda, z = \lambda \mu$ wiązki (W) i proste: $l_i = \zeta_i \eta_i, m_i = \zeta_i \xi_i, n_i = \xi_i \eta_i$ wiązki (W_i) są *prostami głównymi* owych przekształceń, przyczem płaszczyzny ξ_i, η_i, ζ_i i proste l_i, m_i, n_i są — w myśl relacji (1a) — elementami homologicznymi kolineacyjnymi wiązek $(W_1), (W_2), \dots, (W_n)$.

Dowolnej płaszczyźnie α wiązki (W) , nie przechodzącej przez żadną prostą główną tej wiązki, podporządkowana jest — na mocy relacji (2a) i (3a) — w każdej wiązce (W_i) jedna i tylko jedna płaszczyzna α_i , nie przechodząca przez żadną prostą główną wiązki (W_i) , i naodwrot. Natomiast płaszczyźnie głównej np. λ wiązki (W) podporządkowane są w wiązce (W_i) wszystkie płaszczyzny, przechodzące przez prostą główną l_i . Te same uwagi odnoszą się też do elementów głównych: μ i m_i , ν i n_i , ξ i x_i , η i y_i , oraz ζ i z tych wiązek.

Do utworów zasadniczych 2-go gatunku, które występują w rozważaniach ust. 1-go i 2-go, zastosujemy dwa zasadnicze działania geometrii rzutowej, t. j. rzucanie i przecinanie.

Rzucając poszczególne układy płaskie (ω) , (ω_1) , ..., (ω_n) odpow. z dowolnych punktów W , W_1 , ..., W_n przestrzeni (wzgl. z jednego i tego samego punktu W), otrzymamy wiązki środkowe (W) , (W_1) , ..., (W_n) .

Przecinając poszczególne wiązki (W) , (W_1) , ..., (W_n) odpow. dowolnymi płaszczyznami ω , ω_1 , ..., ω_n przestrzeni (wzgl. jedną i tą samą płaszczyzną ω), otrzymamy układy płaskie (ω) , (ω_1) , ..., (ω_n) .

Pomiędzy prostymi $a = WA$, $a_1 = W_1 A_1$, ..., $a_n = W_n A_n$ wiązek, wypisanych po stronie lewej, zachodzą — na mocy relacji (1), (2) i (3) ust. 1-go — ogólne *kolineacje*

$$(W_1) \times (W_2) \times (W_3) \times \dots \times (W_n) \quad (1b)$$

oraz ogólne *przekształcenia kwadratowe*

$$(W) \pi^2 (W_1) \quad (2b)$$

$$(W) \pi^2 (W_2), (W) \pi^2 (W_3), \dots, (W) \pi^2 (W_n). \quad (3b)$$

Podobnie pomiędzy prostymi $a = \omega \alpha$, $a_1 = \omega_1 \alpha_1$, ..., $a_n = \omega_n \alpha_n$ układów płaskich, wypisanych po stronie prawej, zachodzą — na mocy relacji (1a), (2a) i (3a) — ogólne *kolineacje*

$$(\omega_1) \times (\omega_2) \times (\omega_3) \times \dots \times (\omega_n) \quad (1c)$$

oraz ogólne *przekształcenia kwadratowe*

$$(\omega) \pi^2 (\omega_1) \quad (2c)$$

$$(\omega) \pi^2 (\omega_2), (\omega) \pi^2 (\omega_3), \dots, (\omega) \pi^2 (\omega_n). \quad (3c)$$

Elementami *głównymi* powyższych przekształceń (dla $i = 1, 2, \dots, n$) są:

proste $l = WL$, $m = WM$, $n = WN$ wiązki (W) i proste $x_i = W_i X_i$, $y_i = W_i Y_i$, $z_i = W_i Z_i$ wiązki (W_i) , oraz płaszczyzny $\xi = n m$, $\eta = n l$, $\zeta = l m$ wiązki (W) i płaszczyzny $\lambda_i = z_i y_i$, $\mu_i = z_i x_i$, $\nu_i = x_i y_i$ wiązki (W_i) .

proste $l = \omega \lambda$, $m = \omega \mu$, $n = \omega \nu$ układu (ω) i proste $x_i = \omega_i \xi_i$, $y_i = \omega_i \eta_i$, $z_i = \omega_i \zeta_i$ układu (ω_i) , oraz punkty $X = n m$, $Y = n l$, $Z = l m$ układu (ω) i punkty $L_i = z_i y_i$, $M_i = z_i x_i$, $N_i = x_i y_i$ układu (ω_i) .

Dowolnej prostej a wiązki (W) , wzgl. układu (ω) , nie przynależnej do żadnej płaszczyzny głównej wzgl. żadnego punktu głównego tego utworu, podporządkowana jest w wiązce (W_i) , wzgl. w układzie (ω_i) , jedna i tylko jedna prosta a_i , nie przynależna do żadnego elementu głównego tego utworu. Natomiast prostej głównej np. l wiązki (W) , wzgl. układu (ω) , podporządkowane są w wiązce (W_i) , wzgl. w układzie (ω_i) , wszystkie proste, leżące na płaszczyźnie głównej λ_i , wzgl. przechodzące przez punkt główny L_i . Te same uwagi odnoszą się też do elementów głównych: m i μ_i , n i ν_i , ξ i x_i , η i y_i , ζ i z_i wiązek (W) i (W_i) , oraz m i M_i , n i N_i , X i x_i , Y i y_i , Z i z_i układów płaskich (ω) i (ω_i) .

Zauważyć należy wkońcu, że wymienione w tym ustępie związki geometryczne otrzymać moglibyśmy bezpośrednio, stosując analogiczne rozważania do rozważań ust. 1-go. Z relacji (1a) i (2a) wynika bowiem zależność (3a); podobnie z relacji (1b) i (2b) wynika zależność (3b), a wreszcie z relacji (1c) i (2c) zależność (3c).

II.

3. Pomiędzy punktami trzech układów płaskich (ω) , (ω_1) i (ω_2) , które posiadają *wspólną* płaszczyznę podstawową ω , niechaj zachodzą zależności:

$$(\omega_1) \times (\omega_2), (\omega) \pi^2 (\omega_1), (\omega) \pi^2 (\omega_2), \quad (4)$$

wymienione pod (1), (2) i (3) w ust. 1-ym. Na płaszczyźnie ω obierzmy dowolny stały punkt P_0 i zbadajmy, ile przez P_0 przechodzi takich prostych, z których każda zawierałaby po trzy homologiczne punkty owych układów.

Celem zbadania tej zależności, ustalmy pomiędzy prostymi s i s' pęku (P_0) , o wierzchołku P_0 i płaszczyźnie podstawowej ω , pewną odpowiedniość. Dowolną prostą s tego pęku uważajmy za podstawę szeregu punktów $s (A, B, C, \dots)$, który przynależy do układu (ω) . Wiadomo nam z teorii przekształceń kwadratowych — p. relacja (4) — że homologiczne punkty układów (ω_1) i (ω_2) leżą odpow. na stożkowych S_1^2 i S_2^2 , przyczem zachodzą rzutowości szeregów punktów:

$$s(A, B, C, \dots) \bar{\wedge} S_1^2(A_1, B_1, C_1, \dots) \bar{\wedge} S_2^2(A_2, B_2, C_2, \dots),$$

które wypisać możemy w skróconej formie symbolicznej

$$(s) \bar{\wedge} (S_1^2) \bar{\wedge} (S_2^2).$$

Proste, łączące homologiczne punkty A_1 i A_2 , B_1 i B_2 , ... rzutowych szeregów (S_1^2) i (S_2^2), są stycznymi krzywej 4-ej klasy S_4 , która jest ściśle związana z uważaną prostą s . Dla poszczególnych prostych $s, t, \dots$ pęku (P_0) skonstruować możemy w analogiczny sposób krzywe $S_4, T_4, \dots$ klasy 4-ej. Każdej prostej s pęku (P_0) podporządkujemy *cztery* styczne s' , wykreślone z punktu P_0 do odpowiedniej krzywej S_4 . — Każda prosta s' , jako styczna $s' = R_1 R_2$ krzywej S_4 , przechodzi przez dwa homologiczne punkty R_1 i R_2 kolineacyjnych układów (ω_1) i (ω_2). Element s' — o ile jest różny od trzech prostych zjednoczonych $e_1 = e_2, f_1 = f_2, g_1 = g_2$ układów (ω_1) $\times$ (ω_2) — zawierać może jedną i tylko jedną parę punktów homologicznych R_1 i R_2 tych układów. Ponieważ owej parze R_1, R_2 podporządkowany jest w układzie (ω) — w myśl relacji (4) — jeden i tylko jeden punkt R , przeto prostej s' pęku (P_0) odpowiada *jedna* ściśle określona prosta $s = P_0 R$, łącząca wierzchołek P_0 z owym punktem R .

Pomiędzy prostymi s i $s', \dots$ pęku (P_0) skonstruowaliśmy tedy ¹⁾ odpowiedniość [1, 4] - znaczną, a każda z *pięciu* prostych zjednoczonych tej odpowiedniości posiada tę własność, że przechodzi przez trzy homologiczne punkty (np. R, R_1 i R_2) danych układów płaskich (ω), (ω_1) i (ω_2).

Uwaga. Powyższy dowód nie ulegnie zmianom, jeżeli punkt P_0 zjednoczy się z którymkolwiek: a) punktem głównym (ust. 1) układu (ω_1), wzgl. (ω_2), b) z czterech punktów zjednoczonych układów (ω) i (ω_1), wzgl. z czterech takich punktów układów (ω) i (ω_2).

Jeżeli wierzchołek P_0 zjednoczy się z punktem głównym np. L układu (ω), to wówczas otrzymamy rzutowe szeregi punktów:

$$s(A, B, C, \dots) \bar{\wedge} s_1(A_1, B_1, C_1, \dots) \bar{\wedge} s_2(A_2, B_2, C_2, \dots),$$

których podstawami są proste przechodzące: s przez $P_0 = L$, s_1 przez punkt główny X_1 układu (ω_1), s_2 zaś przez punkt główny X_2 układu (ω_2). W miejsce poprzednio występującej krzywej 4-ej klasy S_4 i odpowiedniości [1, 4] - znacznej, otrzymamy teraz stożkową S_2 i odpowiedniość [1, 2] -

¹⁾ Fritz Klem w swej rozprawie „Über Orte von Treffgeraden entsprechender Strahlen in eindeutig u. linear verwandten Strahlengebilden erster bis vierter Stufe“ Borna — Leipzig 1909, na str. 18 ustala analogiczną odpowiedniość [2, 1] - znaczną dla trzech kolineacyjnych wiązek.

znaczną pomiędzy prostymi s i s' w pęku (P_0). Wnosimy stąd, że przez punkt $P_0 = L$ przechodzą *trzy* proste zjednoczone owej odpowiedniości, z których każda zawiera trzy homologiczne punkty układów (ω), (ω_1) i (ω_2). Uwzględnić jednak musimy, że punktowi głównemu L podporządkowane są (ust. 1) w układach (ω_1) i (ω_2) wszystkie punkty na prostych głównych l_1 i l_2 . Owe punkty, jako homologiczne elementy kolineacyjnych układów (ω_1), (ω_2) i tworzą rzutowe szeregi punktów (l_1) $\bar{\wedge}$ (l_2), których utworem jest stożkowa L^2 . Przez $P_0 = L$ przechodzą dwie styczne $s = S_1 S_2$ i $t = T_1 T_2$ tej stożkowej, łączące punkty homologiczne S_1 i S_2 , wzgl. T_1 i T_2 owych szeregów. Ponieważ styczna s zawiera trzy punkty $S = L, S_1$ i S_2 , a styczna t zawiera trzy punkty $T = L, T_1$ i T_2 , przeto przez punkt $P_0 = L$ przechodzi (wraz z trzema poprzednio wyznaczonymi) również *pięć* takich prostych, z których każda zawiera po trzy homologiczne punkty układów (ω), (ω_1) i (ω_2).

Do tego samego wyniku dojdziemy też przy pomocy odpowiedniości [3, 3] - znacznej, ustanowionej pomiędzy prostymi s i s' pomocniczego pęku (P_0). W układach (ω) π^2 (ω_1) skonstruujemy dwa rzutowe szeregi punktów homologicznych

$$s(A, B, C, \dots) \bar{\wedge} S_1^2(A_1, B_1, C_1, \dots),$$

a następnie wyznaczmy punkty Q_1 i R_1 przecięcia się prostej s ze stożkową S_1^2 . W pęku (P_0) każdej prostej s — zawierającej dwie pary punktów homologicznych Q i Q_1, R i R_1 układów (ω) i (ω_1) — podporządkujemy takie *dwie* proste s' , które łączą P_0 z odpowiadającymi im punktami Q_2 i R_2 trzeciego układu (ω_2). Natomiast szeregowi punktów $s' (Q_2, T_2, \dots)$ o podstawie $s' = P_0 Q_2$ niechaj podporządkowane będą w układach (ω) i (ω_1) dwa szeregi punktów

$$S'^2(Q, T, \dots) \bar{\wedge} s'_1(Q_1, T_1, \dots),$$

których podstawami są stożkowa S'^2 i prosta s'_1 . Proste $Q Q_1, T T_1, \dots$ są stycznymi krzywej 3-ej klasy S_3 , która jest ściśle związana z uważaną prostą s' . Otóż każdej prostej s' pęku (P_0) podporządkujemy *trzy* styczne s , wykreślone z wierzchołka P_0 do owej krzywej S_3 . Pięć prostych zjednoczonych odpowiedniości [3, 2] - znacznej pomiędzy elementami s i s' dowodzi, że przez P_0 przechodzi *pięć* takich prostych, z których każda zawiera po trzy homologiczne punkty układów (ω), (ω_1) i (ω_2).

Uwaga. W przypadku $P_0 = L$ na prostej s leżą również dwie pary punktów homologicznych: $Q_1 = s s_1$ i $Q, R_1 = s l_1$ i $R = L$ układów (ω) π^2 (ω_1). Pozatem powyższy dowód nie ulega zmianom.

Dowiedliśmy zatem prawdziwości następującego twierdzenia:

Skoro pomiędzy punktami układu płaskiego (ω), oraz punktami każdego z dwóch kolineacyjnych układów płaskich (ω_1) i (ω_2) ustanowimy przekształcenia kwadratowe, to wówczas: przez dowolny punkt P_0 — leżący na wspólnej płaszczyźnie podstawowej tych trzech układów — przechodzi pięć takich prostych, że na każdej z nich leżą trzy punkty homologiczne owych układów.

Na prostej zjednoczonej $e_1 = e_2$ układów kolineacyjnych (ω_1) i (ω_2), posiadających wspólną podstawę ω , leżą dwa rzutowe szeregi punktów homologicznych

$$e_1(A_1, B_1, C_1, \dots) \bar{\wedge} e_2(A_2, B_2, C_2, \dots),$$

którym w układzie (ω) podporządkowany jest szereg punktów $E^2(A, B, C, \dots)$ na stożkowej E^2 . Skoro przez B i C oznaczymy punkty przecięcia się prostej $e_1 = e_2$ ze stożkową E^2 , to dwie trójki punktów: $B B_1 B_2$ i $C C_1 C_2$ przynależą do owej prostej zjednoczonej. A zatem:

Na każdej z trzech prostych zjednoczonych układów kolineacyjnych (ω_1) i (ω_2) — posiadających wspólną płaszczyznę podstawową — leżą dwie trójki homologicznych punktów badanych układów (ω), (ω_1) i (ω_2).

Zauważyć wkońcu musimy, że przeprowadzone dowody w ust. 3 nie ulegają wcale zmianie, jeśli stały punkt P_0 : a) leżeć będzie na prostej zjednoczonej np. $e_1 = e_2$, b) identyczny będzie z punktem zjednoczonym np. $G_1 = G_2$ kolineacyjnych układów (ω_1) i (ω_2), w którym przecinają się dwie proste zjednoczone $e_1 = e_2$ i $f_1 = f_2$. W powyższych przypadkach przez P_0 przechodzi też pięć prostych, z których każda zawiera po trzy homologiczne punkty układów, spełniających relację (4). Ale w przypadku: a) dwie z tych pięciu prostych zjednoczyły się z ową prostą $e_1 = e_2$; b) dwie zjednoczyły się z prostą $e_1 = e_2$, dwie dalsze z prostą $f_1 = f_2$, a piąta prosta przechodzi przez punkty $G_1 = G_2$ i G .

4. Wypisanym powyżej (ust. 3) twierdzeniem podporządkowane są — w myśl rozważań ust. 2-go — twierdzenia następujące:

Skoro pomiędzy płaszczyznami wiązki (W), oraz płaszczyznami każdej z dwóch kolineacyjnych wiązek (W_1) i (W_2) ustanowimy przekształcenia kwadratowe, to wówczas: na dowolnej płaszczyźnie π_0 — przechodzącej przez wspólny wierzchołek tych trzech wiązek — leży pięć takich prostych, że przez każdą z nich przechodzą trzy płaszczyzny homologiczne owych wiązek.

Przez każdą z trzech prostych zjednoczonych kolineacyjnych wiązek (W_1) i (W_2) przechodzą dwie trójki homologicznych płaszczyzn wiązek (W), (W_1) i (W_2).

Skoro płaszczyzna π_0 przechodzi: a) przez prostą zjednoczoną $e_1 = e_2$, b) przez dwie proste zjednoczone $e_1 = e_2$ i $f_1 = f_2$ wiązek (W_1) i (W_2), to

wówczas z pięciu prostych płaszczyzny π_0 — z których każda przynależy do trzech homologicznych płaszczyzn trzech wiązek — w przypadku: a) dwie zjednoczyły się z prostą $e_1 = e_2$; b) dwie zjednoczyły się z prostą $e_1 = e_2$, a dwie dalsze z prostą $f_1 = f_2$.

Skoro pomiędzy prostymi wiązek (W), oraz prostymi każdej z dwóch kolineacyjnych wiązek (W_1) i (W_2) ustanowimy przekształcenia kwadratowe, to wówczas: przez dowolną prostą p_0 — przechodzącą przez wspólny wierzchołek tych wiązek — przechodzi pięć takich płaszczyzn, że na każdej z nich leżą trzy proste homologiczne owych wiązek.

Na każdej z trzech płaszczyzn zjednoczonych kolineacyjnych wiązek (W_1) i (W_2) leżą dwie trójki homologicznych prostych wiązek (W) (W_1) i (W_2).

Skoro pomiędzy prostymi układu płaskiego (ω), oraz prostymi każdego z dwóch kolineacyjnych układów płaskich (ω_1) i (ω_2) ustanowimy przekształcenia kwadratowe, to wówczas: na dowolnej prostej p_0 — leżącej na wspólnej płaszczyźnie podstawowej tych układów — leży pięć takich punktów, że przez każdą z nich przechodzą trzy proste homologiczne owych układów.

Przez każdy z trzech punktów zjednoczonych kolineacyjnych układów (ω_1) i (ω_2) przechodzą dwie trójki homologicznych prostych układów (ω), (ω_1) i (ω_2).

Uwaga: Twierdzenia wypisane po stronie prawej podporządkowane są, w myśl zasady dwoistości w układzie płaskim, twierdzeniom ust. 3-go. Podobnie twierdzenia, wypisane po stronie lewej, podporządkowane są, w myśl zasady dwoistości w wiązce, twierdzeniom, podanym na początku ust. 4-go.

Skoro prosta p_0 : a) leży na płaszczyźnie zjednoczonej $e_1 = e_2$ (wzgl. przechodzi przez punkt zjednoczony $E_1 = E_2$), b) leży na dwóch płaszczyznach zjednoczonych $e_1 = e_2$ i $f_1 = f_2$ kolineacyjnych wiązek (W_1) i (W_2) (wzgl. przechodzi przez dwa punkty zjednoczone $E_1 = E_2$ i $F_1 = F_2$ kolineacyjnych układów (ω_1) i (ω_2)), to wówczas z pięciu płaszczyzn (wzgl. punktów) prostej p_0 — z których każda przynależy do trzech prostych homologicznych wiązek (W), (W_1) i (W_2), wzgl. układów (ω), (ω_1) i (ω_2) — w przypadku:

a) dwie płaszczyzny zjednoczyły się z elementem $e_1 = e_2$, b) dwie płaszczyzny zjednoczyły się z elementem $e_1 = e_2$, a dwie dalsze z płaszczyzną $f_1 = f_2$.

a) dwa punkty zjednoczyły się z elementem $E_1 = E_2$, b) dwa punkty zjednoczyły się z elementem $E_1 = E_2$, a dwa dalsze z punktem $F_1 = F_2$.

5. Dowiedzimy teraz prawdziwości twierdzenia:

Skoro pomiędzy punktami układu płaskiego (ω), oraz punktami każdego z dwóch kolineacyjnych układów płaskich (ω_1) i (ω_2) — leżących

wraz z układem (ω) na wspólnej płaszczyźnie podstawowej — *ustanowimy przekształcenia kwadratowe*, to wówczas: *ogół prostych, z których każda przechodzi przez trzy punkty homologiczne owych układów, utworzy w ogólności krzywą (płaską) klasy 5-ej, rzędu 14-go i rodzaju 3-go. Trzy proste zjednoczone kolineacyjnych układów (ω_1) i (ω_2) są stycznymi podwójnymi tej krzywej.*

W istocie bowiem przez dowolny punkt P_0 płaszczyzny ω przechodzi (ust. 3) pięć prostych, z których każda zawiera po trzy homologiczne punkty układów (ω_1) , (ω_2) i (ω_3) . Ponieważ owe proste są stycznymi badanej krzywej K_5 , przeto jest ona klasy 5-ej.

Z uwagi na to, że punktem głównym np. X_1 i X_2 układów (ω_1) i (ω_2) podporządkowane są (ust. 1) w układzie (ω) wszystkie punkty na prostej głównej x , przeto prosta $x_{12} = X_1 X_2$ przechodzi przez trzy homologiczne punkty $X_{12} = x_{12} x$, X_1 i X_2 układów (ω) , (ω_1) i (ω_2) , więc jest styczną krzywej K_5 . Podobnie proste $Y_1 Y_2$ i $Z_1 Z_2$, łączące dalsze dwie pary punktów głównych układów (ω_1) i (ω_2) , są też stycznymi krzywej K_5 .

Niechaj punktowi zjednoczonemu $Q = Q_1$ układów $(\omega) \pi^2 (\omega_1)$ podporządkowany będzie w układzie (ω_2) punkt Q_2 . Prosta $q = Q Q_1 Q_2$, łącząca punkty $Q = Q_1$ i Q_2 , przechodzi więc przez trzy homologiczne punkty owych układów i jest styczną krzywej K_5 . A zatem: Przez każdy z czterech punktów zjednoczonych układów $(\omega) \pi^2 (\omega_1)$, oraz przez każdy z czterech punktów zjednoczonych układów $(\omega) \pi^2 (\omega_2)$, przechodzi jedna styczna krzywej K_5 , łącząca ów punkt z homologicznym punktem trzeciego układu.

Niechaj punktowi zjednoczonemu np. $E_1 = E_2$ kolineacyjnych układów (ω_1) i (ω_2) podporządkowany będzie w układzie (ω) punkt E , to prosta, łącząca punkty E i $E_1 = E_2$, jest oczywiście styczną badanej krzywej K_5 . Podobnie, skoro dwóm dalszym punktom zjednoczonym $F_1 = F_2$ i $G_1 = G_2$ tych układów podporządkowane są w trzecim układzie (ω) odpow. punkty F i G , to proste, łączące punkty F i $F_1 = F_2$, wzgl. G i $G_1 = G_2$, są też stycznymi krzywej K_5 .

Zbadajmy wkońcu zachowanie się prostej zjednoczonej np. $e_1 = e_2$ kolineacyjnych układów (ω_1) i (ω_2) względem krzywej K_5 . Ponieważ na prostej $e_1 = e_2$, która przechodzi przez punkty zjednoczone $F_1 = F_2$ i $G_1 = G_2$, leżą (ust. 3) *dwie* trójki homologicznych punktów B, B_1, B_2 i C, C_1, C_2 układów (ω) , (ω_1) i (ω_2) , a nadto z pośród pięciu stycznych krzywej K_5 , przechodzących przez dowolny punkt P_0 prostej $e_1 = e_2$, *dwie* styczne zjednoczyły się (ust. 3) z ową prostą $e_1 = e_2$, przeto: element $e_1 = e_2$ jest styczną podwójną krzywej K_5 . A zatem trzy proste zjednoczone $e_1 = e_2$, $f_1 = f_2$ i $g_1 = g_2$ kolineacyjnych układów (ω_1) i (ω_2) są stycznymi po-

dwójnemi badanej krzywej K_5 , c. b. d. w. — Wreszcie zanotować należy, że krzywa klasy 5-ej z trzema stycznymi podwójnymi jest (dla $n = 5$, $\vartheta = 3$) rzędu $n(n-1) - 2\vartheta = 14$ -go i rodzaju $\frac{1}{2}(n-1)(n-2) - \vartheta = 3$ -go.

Stosując do poprzednich rozważań zasadę dwoistości w układzie płaskim, dochodzimy do twierdzenia:

Skoro pomiędzy prostemi układu płaskiego (ω) , oraz prostemi każdego z dwóch kolineacyjnych układów płaskich (ω_1) i (ω_2) — leżących wraz z układem (ω) na wspólnej płaszczyźnie podstawowej — ustanowimy przekształcenia kwadratowe, to wówczas: ogół punktów, z których każdy jest punktem przecięcia się trzech prostych homologicznych owych układów, tworzy krzywą (płaską) rzędu 5-go, klasy 14-ej i rodzaju 3-go. Trzy punkty zjednoczone kolineacyjnych układów (ω_1) i (ω_2) są punktami podwójnymi tej krzywej.

Dwom twierdzeniom tego ustępu podporządkowane są, w myśl zasady dwoistości w przestrzeni, bezpośrednio następujące twierdzenia:

Skoro pomiędzy płaszczyznami wiązki (W) , oraz płaszczyznami każdej z dwóch kolineacyjnych wiązek (W_1) i (W_2) — posiadających wraz z wiązką (W) wspólny wierzchołek — ustanowimy przekształcenia kwadratowe, to wówczas: ogół prostych z których każda jest prostą przecięcia się trzech płaszczyzn homologicznych tych wiązek, utworzy stożek rzędu 5-go, klasy 14-ej i rodzaju 3-go. Trzy proste zjednoczone kolineacyjnych wiązek (W_1) i (W_2) są tworzącymi podwójnymi tego stożka.

Skoro pomiędzy prostemi wiązki (W) , oraz prostemi każdej z dwóch kolineacyjnych wiązek (W_1) i (W_2) — posiadających wraz z wiązką (W) wspólny wierzchołek — ustanowimy przekształcenia kwadratowe, to wówczas: ogół płaszczyzn, z których każda przechodzi przez trzy proste homologiczne, tych wiązek, utworzy stożek klasy 5-ej, rzędu 14-go i rodzaju 3-go. Trzy płaszczyzny zjednoczone kolineacyjnych wiązek (W_1) i (W_2) są płaszczyznami podwójnie-stycznymi tego stożka.

Korzystając z rozważań ust. 4-go, moglibyśmy też bezpośrednio dowieść prawdziwości powyższych twierdzeń.

6. Krzywa K_5 klasy 5-ej i rodzaju 3-go niechaj będzie (ust. 5) utworem trzech układów płaskich (ω) , (ω_1) i (ω_2) , które spełniają relację (4) ustępu 3-go. Dowolna styczna $a = A A_1 A_2$ krzywej K_5 przechodzi przez trzy homologiczne punkty A, A_1 i A_2 owych układów. Skoro uwzględnimy ogół stycznych $a = A A_1 A_2$, $b = B B_1 B_2$, $c = C C_1 C_2, \dots$ krzywej K_5 , to zbadać możemy miejsca geometryczne:

- a) punktów $A, B, C, \dots$ układu (ω) .
 b) punktów $A_i, B_i, C_i, \dots$ ($i = 1, 2$) układu (ω_i) .

W tym celu weźmy pod uwagę szereg punktów $s(P, Q, \dots)$ w układzie (ω) , którego podstawą jest dowolna prosta s , oraz homologiczne szeregi punktów w układach (ω_1) i (ω_2) , których podstawami (p. ust. 3) są stożkowe S_1^1 i S_2^2 . Rzutowe szeregi punktów

$$s(P, Q, \dots) \bar{\wedge} S_1^2(P_1, Q_1, \dots) \bar{\wedge} S_1^4(P_2, Q_2, \dots)$$

posiadają¹⁾ pięć takich trójek homologicznych punktów, z których każda trójka leży na jednej prostej. Ponieważ każda taka trójka wyznacza styczną krzywej K_5 , przeto na dowolnej prostej s leży pięć takich punktów $A, \dots$, przez które przechodzą styczne $a = A A_1 A_2, \dots$ krzywej K_5 . Dowiedliśmy zatem, że: w przypadku a) miejscem geometrycznym punktów $A, B, C, \dots$ układu (ω) jest *krzywa płaska C^5 rzędu 5-go*.

Niechaj prosta s przechodzi przez punkt główny np. L układu (ω) . W miejsce poprzednich szeregów otrzymamy teraz (p. ust. 3) trzy rzutowe szeregi

$$s(P, Q, \dots) \bar{\wedge} s_1(P_1, Q_1, \dots) \bar{\wedge} s_2(P_2, Q_2, \dots),$$

które posiadają trzy takie trójki homologicznych punktów, z których każda trójka leży na jednej prostej. Owe trzy trójki wyznaczają trzy styczne $a = A A_1 A_2, b = B B_1 B_2$ i $c = C C_1 C_2$ krzywej K_5 . Uwzględnic musimy nadto, że punktom głównemu L podporządkowane są (ust. 1) w kolineacyjnych układach (ω_1) i (ω_2) dwa rzutowe szeregi punktów

$$l_1(D_1, \dots, T_1, V_1, \dots) \bar{\wedge} l_2(D_2, \dots, T_2, V_2, \dots)$$

na prostych głównych l_1 i l_2 . Przez L przechodzą dwie proste $t = T_1 T_2$ i $v = V_1 V_2$, które łączą homologiczne punkty tych szeregów i są stycznymi do stożkowej, będącej utworem szeregów $(l_1) \bar{\wedge} (l_2)$. Owe proste t i v są zarazem stycznymi krzywej K_5 , gdyż łączą trójki homologicznych punktów $L = T, T_1$ i T_2 , wzgl. $L = V, V_1$ i V_2 naszych układów. Skonstruowane w ten sposób styczne a, b, c, t i v krzywej K_5 wyznaczają na podstawie s pięć punktów: $A = a s, B = b s, C = c s, L = t s$ i $L = v s$ przecięcia się prostej s z badaną krzywą C^5 rzędu 5-go. Ponieważ dwa z pięciu owych punktów zjednoczyły się z punktem L , a prosta s jest dowolną prostą, przechodzącą przez L , przeto: punkt główny L jest *punktem podwójnym* krzywej C^5 .

¹⁾ Rudolf Sturm: Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften, Leipzig u. Berlin 1908, Bd. I. № 177.

Z rozważań naszych wynika, że krzywa C^5 rzędu 5-go z trzema punktami podwójnymi L, M i N (które są punktami głównymi (ust. 1) układu (ω)), jest krzywą klasy 14-ej i rodzaju 3-go. Rodzaj tej krzywej otrzymamy też w inny sposób, jeśli skorzystamy z podstawowego twierdzenia Clebscha. Pomiędzy stycznymi $a = A A_1 A_2, b = B B_1 B_2, \dots$ krzywej K_5 klasy 5-ej i rodzaju 3-go, a punktami $A, B, \dots$ krzywej C^5 zachodzi odpowiedniość $[1, 1]$ - znaczna, więc C^5 jest krzywą rodzaju 3-go, c. b. d. w.

Stosując zupełnie analogiczne rozważania do szeregu punktów $t_i(P_i, Q_i, \dots)$ układu (ω_i) , gdzie $i = 1, 2$, a element t_i jest dowolną prostą — podobnie jak to uczyniliśmy dla szeregu punktów $s(P, Q, \dots)$, należącego do układu (ω) — wykazać możemy z łatwością, że: w przypadku b) miejscem geometrycznym punktów $A_i, B_i, C_i, \dots$ układu (ω_i) jest *krzywa płaska C_i^4 rzędu 4-go, klasy 12-ej i rodzaju 3-go*.

Zauważyć należy, że krzywa C^5 rzędu 5-go, z trzema punktami podwójnymi L, M i N , przekształca się — za pośrednictwem relacji $(\omega) \pi^2(\omega_i)$, dla $i = 1, 2$, — na krzywą rzędu 10-go, która rozpada się oczywiście na trzy podwójnie liczone proste główne l_i, m_i i n_i (ust. 1) układu (ω_i) , oraz na krzywą C_i^4 rzędu 4-go, dla której punkty główne X_i, Y_i i Z_i układu (ω_i) są punktami pojedynczymi.

A zatem prawdziwe są twierdzenia:

Skoro przez $a = A A_1 A_2, b = B B_1 B_2, \dots$ oznaczymy poszczególne styczne krzywej K_5 klasy 5-ej i rodzaju 3-go — która jest (ust. 5) utworem trzech układów płaskich $(\omega), (\omega_1)$ i (ω_2) , spełniających relację (4) ustępu 3-go — to wówczas:

a) punkty $A, B, \dots$ układu (ω) leżą na krzywej C^5 rzędu 5-go, klasy 14-ej i rodzaju 3-go, dla której punkty główne L, M i N układu (ω) są punktami podwójnymi.

b) punkty $A_i, B_i, \dots$ ($i = 1, 2$) układu (ω_i) leżą na krzywej C_i^4 rzędu 4-go, klasy 12-ej i rodzaju 3-go, dla której punkty główne X_i, Y_i i Z_i układu (ω_i) są punktami pojedynczymi.

Wiadomo nam (ust. 5), że prosta $q = Q_1 Q_2$, łącząca punkt zjednoczony $Q = Q_1$ układów $(\omega) \pi^2(\omega_1)$ z homologicznym punktem Q_2 układu (ω_2) , jest styczną krzywej K_5 . Wnosimy stąd, że punkt $Q = Q_1$ leży na krzywych C^5 i C_1^4 , punkt Q_2 na krzywej C_2^4 . Podobnie, punkt zjednoczony $R = R_2$ układów $(\omega) \pi^2(\omega_2)$ leży na krzywych C^5 i C_2^4 , a podporządkowany mu punkt R_1 układu (ω_1) leży na krzywej C_1^4 . Wiadomo nam również (ust. 5), że prosta $e = E E_1 E_2$, łącząca punkt zjednoczony $E_1 = E_2$ układów $(\omega_1) \times (\omega_2)$ z homologicznym punktem E układu (ω) , jest styczną krzywej K_5 . Wnosimy stąd, że punkt $E_1 = E_2$ leży na krzywych C_1^4 i C_2^4 , a punkt E na krzywej C^5 . A zatem:

Cztery punkty zjednoczone układów (ω) i (ω_1) leżą na krzywych C^5 i C^4_1 , a podporządkowane im punkty układu (ω_2) leżą na krzywej C^4_2 . Cztery punkty zjednoczone układów (ω) i (ω_2) leżą na krzywych C^5 i C^4_2 , a podporządkowane im punkty układu (ω_1) leżą na krzywej C^4_1 . Trzy punkty zjednoczone kolineacyjnych układów (ω_1) i (ω_2) leżą na krzywych C^4_1 i C^4_2 , a podporządkowane im punkty układu (ω) leżą na krzywej C^5 .

Ponieważ w układach kolineacyjnych (ω_1) i (ω_2) pomiędzy punktami $A_1, B_1, \dots$ krzywej C^4_1 a punktami homologicznymi $A_2, B_2, \dots$ krzywej C^4_2 zachodzi odpowiedniość $[1, 1]$ -znaczna, przeto proste $a = A_1 A_2$, $b = B_1 B_2, \dots$, łączące podporządkowane sobie punkty, tworzą¹⁾ krzywą C_8 klasy $(4 + 4) = 8$ -ej. Z rozważań jednak tego ustępu wiadomo nam, że proste $a = A_1 A_2$, $b = B_1 B_2, \dots$ przechodzą odpow. przez homologiczne punkty $A, B, \dots$ układu (ω) i są stycznymi krzywej K_5 klasy 5-ej. Tę pozorną sprzeczność wyjaśnimy, jeśli uwzględnimy, że punkty zjednoczone $E_1 = E_2, \dots$ kolineacyjnych układów (ω_1) i (ω_2) leżą równocześnie na krzywych C^4_1 i C^4_2 . Każda prosta, przechodząca przez punkt $E_1 = E_2$, jest oczywiście styczną do krzywej C_8 , ale tylko jedna prosta, przechodząca przez punkty $E_1 = E_2$ i E , jest styczną krzywej K_5 . Krzywa C_8 rozpada się zatem na trzy pęki prostych, których wierzchołkami są punkty zjednoczone układów (ω_1) i (ω_2) , oraz na krzywą K_5 , będącą obwiednią prostych $a = A_1 A_2$, $b = B_1 B_2, \dots$, c. b. d. w.

Również odpowiedniość $[1, 1]$ -znaczna zachodzi (dla $\iota = 1, 2$) pomiędzy szeregami punktów $C^5(A, B, \dots)$ i $C^4(A_1, B_1, \dots)$, których podstawami są krzywe C^5 i C^4 rodzaju 3-go. Ponieważ cztery punkty zjednoczone $Q = Q_1, \dots$ układów (ω) i (ω_1) leżą równocześnie na tych krzywych, przeto utworem uważanych szeregów jest krzywa C_9 klasy $(5 + 4) = 9$ -ej, która rozpada się na cztery pęki prostych o wierzchołkach $Q = Q_1, \dots$, oraz na krzywą K_5 klasy 5-ej, będącą obwiednią prostych $a = A A_1$, $b = B B_1, \dots$.

7. Stosując zasady dwoistości do rozważań ust. 6-go, otrzymamy następujące twierdzenia:

Skoro pomiędzy prostymi układu płaskiego (ω) , oraz prostymi każdego z dwóch kolineacyjnych układów (ω_1) i (ω_2) — łączących wraz z (ω) na wspólnej płaszczyźnie podstawowej — ustanowimy przekształcenia kwadratowe, a przez:

¹⁾ R. Sturm, l. c. Bd. I. Nr. 177.

$A = a a_1 a_2$, $B = b b_1 b_2, \dots$ oznaczymy poszczególne punkty krzywej K^5 rzędu 5-go i rodzaju 3-go, będącej (ust. 5) utworem tych układów, to wówczas:

a) proste $a, b, \dots$ układu (ω) są stycznymi krzywej C_5 klasy 5-ej, rzędu 14-go i rodzaju 3-go, dla której proste główne l, m i n układu (ω) są stycznymi podwójnymi.

b) proste $a, b, \dots$ ($\iota = 1, 2$) układu (ω_ι) są stycznymi krzywej C^4_ι klasy 4-ej, rzędu 12-go i rodzaju 3-go, dla której proste główne x, y, z układu (ω_ι) są stycznymi pojedynczymi.

Cztery proste zjednoczone układów (ω) i (ω_ι) — dla $\iota = 1, 2$, $\kappa = 2, 1$ — są stycznymi krzywych C_5 i C^4_ι , a podporządkowane im proste układu (ω_κ) są stycznymi krzywej C^4_κ . Trzy proste zjednoczone kolineacyjnych układów (ω_1) i (ω_2) są stycznymi krzywych C^4_1 i C^4_2 , a podporządkowane im proste układu (ω) są stycznymi krzywej C_5 .

Skoro pomiędzy płaszczyznami (wzgl. prostymi) wiązki (W) , oraz płaszczyznami (wzgl. prostymi) każdej z dwóch kolineacyjnych wiązek (W_1) i (W_2) , posiadających wraz z wiązką (W) wspólny wierzchołek, ustanowimy przekształcenie kwadratowe, a przez:

$\alpha = a a_1 a_2$, $\beta = b b_1 b_2, \dots$ oznaczymy poszczególne tworzące stożka K^5 rzędu 5-go i rodzaju 3-go, będącego utworem (ust. 5) tych wiązek, to wówczas:

a) płaszczyzny $\alpha, \beta, \dots$ wiązki (W) są płaszczyznami stycznymi stożka Γ^5 klasy 5-ej, rzędu 14-go i rodzaju 3-go, dla którego płaszczyzny główne λ, μ i ν wiązki (W) są płaszczyznami podwójnie-stycznymi.

b) płaszczyzny $\alpha, \beta, \dots$ ($\iota = 1, 2$) wiązki (W_ι) są płaszczyznami stycznymi stożka Γ^4_ι klasy 4-ej, rzędu 12-go i rodzaju 3-go, dla którego płaszczyzny główne ξ, η, ζ wiązki (W_ι) są płaszczyznami stycznymi.

$\alpha = a a_1 a_2$, $\beta = b b_1 b_2, \dots$ oznaczymy poszczególne płaszczyzny styczne stożka K_5 klasy 5-ej i rodzaju 3-go, będącego utworem (ust. 5) tych wiązek, to wówczas:

a) proste $a, b, \dots$ wiązki (W) są tworzącymi stożka Γ^5 rzędu 5-go, klasy 14-ej i rodzaju 3-go, dla którego proste główne l, m i n wiązki (W) są tworzącymi podwójnymi.

b) proste $a, b, \dots$ ($\iota = 1, 2$) wiązki (W_ι) są tworzącymi stożka Γ^4_ι rzędu 4-go, klasy 12-ej i rodzaju 3-go, dla którego proste główne x, y, z wiązki (W_ι) są tworzącymi pojedynczymi.

Cztery płaszczyzny zjednoczone (wzgl. proste zjednoczone) wiązek (W) i (W_i) — dla $i = 1, 2, \kappa = 2, 1$ — są płaszczyznami stycznymi stożków Γ_5 i Γ_4 (wzgl. są tworzącymi stożków Γ^5 i Γ^4), a podporządkowane im płaszczyzny (wzgl. proste) wiązki (W_κ) są płaszczyznami stycznymi stożka Γ_4 (wzgl. są tworzącymi stożka Γ_4). Trzy płaszczyzny zjednoczone (wzgl. proste zjednoczone) kolineacyjnych wiązek (W_i) i (W_κ) są płaszczyznami stycznymi stożków Γ_4 i Γ_4 (wzgl. są tworzącymi stożków Γ^4 i Γ^4), a podporządkowane im płaszczyzny (wzgl. proste) wiązki (W) są płaszczyznami stycznymi stożka Γ_5 (wzgl. są tworzącymi stożka Γ^5).

8. Pomiedzy punktami czterech układów płaskich (ω) , (ω_1) , (ω_2) i (ω_3) , które posiadają *wspólną* płaszczyznę podstawową ω , niechaj zachodzą zależności:

$$(\omega_1) \times (\omega_2) \times (\omega_3), \quad (\omega) \pi^2 (\omega_1), \quad (\omega) \pi^2 (\omega_2), \quad (\omega) \pi^2 (\omega_3), \quad (5)$$

wymienione pod (1), (2) i (3) w ust. 1-ym. Zbadajmy, czy istnieją takie czwórki homologicznych punktów tych układów, z których każda czwórka leżałaby na jednej prostej.

W tym celu poszczególnym stycznym $a = A A_1 A_2$, $b = B B_1 B_2, \dots$ krzywej K^5 klasy 5-ej i rodzaju 3-go, która jest (ust. 5) utworem trzech układów (ω) , (ω_1) i (ω_2) , podporządkujemy punkty $A_3, B_3, \dots$ układu (ω_3) . Ponieważ jednak punkty $A_i, B_i, \dots$ ($i = 1, 2$) układu (ω_i) leżą (ust. 6) na krzywej C_i^4 rzędu 4-go, klasy 12-ej i rodzaju 3-go, przeto z kolineacji układów (ω_i) i (ω_3) wynika bezpośrednio, że: punkty $A_3, B_3, \dots$ układu (ω_3) przynależą do krzywej C_3^4 rzędu 4-go, klasy 12-ej i rodzaju 3-go. W ustanowionej odpowiedniości [1, 1]-znaczej pomiędzy stycznymi $a = A A_1 A_2$, $b = B B_1 B_2, \dots$ krzywej K_5 i punktami $A_3, B_3, \dots$ krzywej C_3^4 istnieje ¹⁾ $(5+4) = 9$ takich stycznych $d = D D_1 D_2, \dots$ krzywej K_5 , z których każda przechodzi przez podporządkowany jej punkt $D_3, \dots$ krzywej C_3^4 . Innymi słowy: układy płaskie, spełniające relację (5), posiadają *dziwięć* takich czwórek homologicznych punktów, z których każda czwórka (np. $D D_1 D_2 D_3$) leży na jednej prostej.

Do tego samego wyniku dojdziemy, jeśli obok krzywej K_5 weźmiemy pod uwagę krzywą S_3 klasy 3-ej, której stycznymi są ²⁾ proste $a' = A_1 A_2 A_3$, $b' = B_1 B_2 B_3, \dots$, przechodzące odpow. przez trójki homologicznych punktów kolineacyjnych układów (ω_1) , (ω_2) i (ω_3) . Niechaj prostej zjednoczonej $e_1 = e_2$ układów (ω_1) i (ω_2) podporządkowaną będzie w układzie (ω_3) prosta e_3 , to wówczas punktowi C_3 , przecięcia się elementów e_3 i $e_1 = e_2$,

¹⁾ R. Sturm, l. c. Bd. I. Nr. 177.

²⁾ Th. Reye, Die Geometrie der Lage, Leipzig 1910, Bd. III (IV-e Aufl.) S. 86.

podporządkowane są w układach (ω_1) i (ω_2) odpow. punkty C_1 i C_2 , leżące na prostej $e_1 = e_2$. Prosta zjednoczona $e_1 = e_2$ przechodzi zatem przez trzy punkty homologiczne C_1, C_2, C_3 i jest styczną krzywej S_3 . Prosta $e_1 = e_2$ jest równocześnie (ust. 5) styczną podwójną krzywej K_5 .

Wspólna styczna krzywych K_5 i S_3 powstać może: a) ze zjednoczenia się stycznej $a = A A_1 A_2$ krzywej K_5 ze styczną $b' = B_1 B_2 B_3$ krzywej S_3 , lub b) ze zjednoczenia się stycznej $a = A A_1 A_2$ krzywej K_5 ze styczną $a' = A_1 A_2 A_3$ krzywej S_3 . W przypadku a) prosta $a = b'$ przechodzi przez punkty $A_1 B_1$ i $A_2 B_2$, więc jest *prostą zjednoczoną* $e_1 = e_2 = A_1 B_1 = A_2 B_2$, kolineacyjnych układów (ω_1) i (ω_2) . Natomiast w przypadku b) prosta $a = a'$ przechodzi przez cztery punkty homologiczne A, A_1, A_2 i A_3 danych układów (ω) , (ω_1) , (ω_2) i (ω_3) . Krzywe K_5 klasy 5-ej i S_3 klasy 3-ej, oprócz trzech podwójnie liczonych wspólnych stycznych $e_1 = e_2, f_1 = f_2$ i $g_1 = g_2$ (które są prostymi zjednoczonymi kolineacyjnych układów (ω_1) i (ω_2)), posiadają $(15-2 \cdot 3) = 9$ dalszych stycznych wspólnych, a każda z nich zawiera po cztery homologiczne punkty danych układów. Układy płaskie, spełniające relację (5), posiadają tedy *dziwięć* charakterystycznych czwórek punktów homologicznych, z których każda czwórka leży na jednej prostej, c. b. d. v.

Prawdziwość tego twierdzenia wykazać możemy wreszcie, skoro pomiędzy prostymi płaszczyzny podstawowej ω ustanowimy pewną zależność geometryczną, podporządkowując każdej prostej $s = P P_1$ prostą $s' = P_2 P_3$, gdzie przez P, P_1, P_2 i P_3 oznaczone są homologiczne punkty układów płaskich, spełniających relację (5).

Wiadomo, że szeregowi punktów $s(A, B, \dots)$ układu (ω) podporządkowany jest — p. relacja (5) — w układzie (ω_1) szereg punktów $S_1^2(A_1, B_1, \dots)$ na stożkowej S_1^2 . Niechaj P_1 i R_1 będą punktami przecięcia się prostej s ze stożkową S_1^2 , to: dowolnej prostej $s = P P_1 = R R_1$, która zawiera dwie pary punktów homologicznych układów $(\omega) \pi^2 (\omega_1)$, podporządkować możemy *dwie* proste s' , przechodzące przez punkty homologiczne P_2 i P_3 , oraz R_2 i R_3 układów (ω_2) i (ω_3) . Natomiast każdej prostej s' , na której — o ile nie jest prostą zjednoczoną kolineacyjnych układów (ω_2) i (ω_3) — leżeć może tylko jedna para punktów homologicznych P_2 i P_3 tych układów, podporządkujemy *jedną* prostą $s = P P_1$, przechodzącą przez odpowiadające im punkty P i P_1 układów (ω) i (ω_1) . Zbadać należy jeszcze dalsze własności tej odpowiedniości [1, 2]-znaczej.

Skoro w wypisanych powyżej szeregach

$$s(A, B, \dots, P, R, T, \dots) \bar{\wedge} S_1^2(A_1, B_1, \dots, P_1, R_1, T_1, \dots)$$

punktów homologicznych układów $(\omega) \pi^2 (\omega_1)$, podstawie s podporządkujemy stożkową S_1^2 , to wówczas pękowi prostych $T(s, \dots)$ o wierzchołku

T podporządkowany jest rzutowy do niego pęk stożkowych $(S_1^2, \dots)$, którego punktami podstawowymi są punkt T_1 i trzy punkty główne X_1, Y_1, Z_1 układu (ω_1) . Z uwagi na to, że prosta $s = P P_1 = R R_1$ przecina stożkową S_1^2 w punktach P_1 i R_1 , przeto: dla poszczególnych prostych $s = P R$ pęku $T(s, \dots)$ miejscem geometrycznym punktów P_1 i $R_1, \dots$ układu (ω_1) jest krzywa T_1^3 rzędu 3-go, będąca¹⁾ utworem rzutowych pęków $T(s, \dots)$ i $(S_1^2, \dots)$. Uzyskanemu w ten sposób szeregowi punktów $T_1^3(P_1, R_1, \dots)$ układu (ω_1) odpowiadają, za pośrednictwem relacji (5), w kolineacyjnych układach (ω_2) i (ω_3) dwa szeregi punktów homologicznych: $T_2^3(P_2, R_2, \dots)$ i $T_3^3(P_3, R_3, \dots)$, których podstawami są krzywe płaskie T_2^3 i T_3^3 rzędu 3-go. Z odpowiedniości [1, 1] - znacznej pomiędzy punktami P_2 i P_3, R_2 i $R_3, \dots$ tych szeregów wynika, że proste $P_2 P_3, R_2 R_3, \dots$ są²⁾ stycznymi krzywej T_0 klasy $(3+3) = 6$ -ej. Ponieważ proste $P_2 P_3, R_2 R_3$ oznaczyliśmy poprzednio symbolem s' , przeto wykazaliśmy, że: pękowi prostych $T(s, \dots)$ podporządkowany jest pęk $T_0(s', \dots)$ prostych stycznych $s', \dots$ do krzywej 6-ej klasy T_0 .

Prostą $s' = P_2 P_3$, na której leżeć może tylko jedna para punktów homologicznych P_2 i P_3 kolineacyjnych układów (ω_2) i (ω_3) , uważamy za przynależną do układu np. (ω_2) i oznaczmy przez s_3 . Elementowi s_3 podporządkowana jest w układzie (ω_2) prosta s_2 , przechodząca oczywiście przez punkt P_2 , a pękowi prostych $U_3(s_3, \dots)$ o dowolnym wierzchołku U_3 podporządkowany jest rzutowy do niego pęk prostych $U_2(s_3, \dots)$. Homologiczne proste tych pęków przecinają się w punktach $P_2 = s_3 s_2, \dots$ stożkowej U_2^2 , którą uważać możemy za podstawę szeregu punktów $U_2^2(P_2, \dots)$ układu (ω_2) . Szeregowi temu odpowiadają, za pośrednictwem relacji (5), w układach (ω_1) i (ω) dwa szeregi punktów homologicznych:

$$U_1^2(P_1, \dots) \text{ i } U^1(P, \dots),$$

których podstawami są w układzie (ω_1) stożkowa U_1^2 , a w układzie (ω) krzywa U^1 rzędu 4-go i rodzaju 0-go, z trzema punktami podwójnymi L, M i N (punkty główne). Z odpowiedniości [1, 1] - znacznej pomiędzy punktami P_1 i $P, \dots$ tych szeregów wynika, że proste $P_1 P, \dots$ są stycznymi krzywej U_0 klasy $(2+4) = 6$ -ej. Ponieważ prostą $P_1 P$ oznaczyliśmy poprzednio przez s , a element s' przez s_3 , przeto wykazaliśmy, że: pękowi prostych $U_3(s', \dots)$ o wierzchołku U_3 podporządkowany jest pęk $U_0(s, \dots)$ prostych stycznych $s, \dots$ do krzywej 6-ej klasy U_0 .

¹⁾ Plücker, Theorie d. algebr. Kurven, Bonn 1839, S. 56.

²⁾ R. Sturm, l. c. Bd. I. Nr. 177.

Pomiędzy prostymi s i s' płaszczyzny podstawowej ω ustanowiliśmy tedy taką odpowiedniość [1, 2] - znaczną, w której — o ile T i U_3 są dowolnymi punktami płaszczyzny ω — pękowi prostych $T(s, \dots)$ podporządkowany jest pęk $T_0(s', \dots)$ prostych stycznych krzywej 6-ej klasy T_0 , oraz pękowi prostych $U_3(s', \dots)$ odpowiada pęk $U_0(s, \dots)$ prostych stycznych krzywej 6-ej klasy U_0 . Powyższa odpowiedniość posiada¹⁾ $(1+2+6) = 9$ prostych zjednoczonych $s = s'$, a na każdej z nich — jak z łatwością stwierdzimy — leży czwórka homologicznych punktów P, P_1, P_2 i P_3 uważanych układów. A zatem:

Skoro pomiędzy punktami układu płaskiego (ω) , oraz punktami każdego z trzech kolineacyjnych układów płaskich $(\omega_1), (\omega_2)$ i (ω_3) — leżących wraz z układem (ω) na wspólnej płaszczyźnie podstawowej — ustanowimy przekształcenia kwadratowe, to wówczas: istnieje dziewięć takich czwórek homologicznych punktów tych układów, z których każda czwórka leży na jednej prostej.

Prawdziwe są również twierdzenia:

Skoro pomiędzy prostymi układu płaskiego (ω) , oraz prostymi każdego z trzech kolineacyjnych układów płaskich $(\omega_1), (\omega_2)$ i (ω_3) — leżących wraz z układem (ω) na wspólnej płaszczyźnie podstawowej — ustanowimy przekształcenia kwadratowe, to wówczas: istnieje dziewięć takich czwórek homologicznych prostych tych układów, z których każda czwórka przechodzi przez jeden punkt.

Skoro pomiędzy płaszczyznami (wzgl. prostymi) wiązki (W) , oraz płaszczyznami (prostymi) każdej z trzech kolineacyjnych wiązek $(W_1), (W_2)$ i (W_3) — posiadających wraz z wiązką (W) wspólny wierzchołek — ustanowimy przekształcenia kwadratowe, to wówczas: istnieje dziewięć takich czwórek homologicznych płaszczyzn (prostych) tych wiązek, z których każda czwórka płaszczyzn przecina się w jednej prostej (wzgl. każda czwórka prostych leży na jednej płaszczyźnie).

III.

9. Trzy dowolne i różne od siebie punkty W, W_1 i W_2 uważamy za wierzchołki wiązek $(W), (W_1)$ i (W_2) , a trzy dowolne i różne od siebie płaszczyzny ω, ω_1 i ω_2 za płaszczyzny podstawowe układów płaskich $(\omega), (\omega_1)$ i (ω_2) . Prawdziwe są wówczas następujące twierdzenia, które są sobie podporządkowane w myśl zasady dwoistości w przestrzeni:

¹⁾ R. Sturm, l. c. Bd. IV. Nr. 839.

Skoro pomiędzy płaszczyznami wiązek (W), oraz płaszczyznami każdej z dwóch kolineacyjnych wiązek (W_1) i (W_2) ustanowimy przekształcenia kwadratowe, to wówczas: na dowolnej prostej p_0 — która nie przechodzi przez różne od siebie wierzchołki tych wiązek — leży pięć takich punktów, że przez każdy z nich przechodzą trzy homologiczne płaszczyzny tych wiązek.

W istocie bowiem przez prostą p_0 poprowadźmy dowolną płaszczyznę ω , taką jednak, aby nie przechodziła przez wierzchołki W , W_1 i W_2 przyjętych wiązek. Płaszczyzna ω przetnie te wiązki w trzech układach płaskich (ω), (ω_1) i (ω_2), przyczem (ust. 2) pomiędzy prostymi układu (ω) i prostymi każdej z dwóch kolineacyjnych układów (ω_1) i (ω_2) zachodzą przekształcenia kwadratowe. Na danej prostej p_0 leży (ust. 4) pięć takich punktów A_0 , B_0 , C_0 , D_0 i E_0 , że przez każdy z nich przechodzą trzy homologiczne proste owych układów, a temsamem i trzy homologiczne płaszczyzny danych wiązek (W), (W_1) i (W_2). — Owe punkty wcale nie są zależne od położenia płaszczyzny ω . Poprowadźmy bowiem inną płaszczyznę ω^* , to uzyskane w analogiczny sposób układy płaskie (ω^*), (ω_1^*) i (ω_2^*) posiadają tę własność, że na prostej p_0 leży pięć punktów A_0^* , B_0^* , C_0^* , D_0^* i E_0^* , a w każdym z nich, np. w punkcie A_0^* przecinają się trzy homologiczne proste a^* , a_1^* i a_2^* tych układów, a temsamem i trzy homologiczne płaszczyzny α , α_1 i α_2 danych wiązek. Ponieważ płaszczyzna ω przecina się z elementami α , α_1 i α_2 w trzech prostych a , a_1 i a_2 , które są prostymi homologicznymi układów (ω), (ω_1), (ω_2) i przechodzą przez punkt A_0 , przeto A_0^* zjednoczyć się musi (ust. 4) z jednym z wymienionych poprzednio punktów A_0 , ..., E_0 . Te same uwagi stosują się też i do pozostałych punktów B_0^* , ..., E_0^* , więc na prostej p_0 leży tylko pięć punktów, o omawianej własności, c. b. d. w.

Prawdziwości tego twierdzenia możemy dowieść, ustalając pewną odpowiedniość [1, 4] - znaczną pomiędzy punktami prostej p_0 . Pękowi płaszczyzn $c(\alpha, \beta, \dots)$ wiązki (W), którego oś $c = WC$ przechodzi przez dowolny punkt C prostej p_0 , podporządkowane są w wiązkach (W_1) i (W_2) — jak nam wiadomo z teorii przekształceń kwadratowych — dwa rzutowe pęki

$$\Gamma_1^2(\alpha_1, \beta_1, \dots) \bar{\wedge} \Gamma_2^2(\alpha_2, \beta_2, \dots)$$

płaszczyzn stycznych do stożków 2-go stopnia Γ_1^2 i Γ_2^2 . Owe pęki utworzą powierzchnię skośną Φ^4 stopnia 4-go, a cztery punkty C' przecięcia się tej powierzchni z prostą p_0 podporządkujemy punktowi C . Przez każdy otrzymany punkt C' przechodzi tworząca $b_{12} = \beta_1 \beta_2$ powierzchni Φ^4 , przyczem owa tworząca jest dwusieczną krzywej skośnej 3-go rzędu S_{12}^3 , będącej¹⁾ miejscem geometrycznym punktów przecięcia się homologicznych prostych dwóch kolineacyjnych wiązek (W_1) i (W_2). Ponieważ ogół dwusiecznych krzywej S_{12}^3 jest kongruencją K_{12} rzędu 1-go i klasy 3-ej, przeto przez dowolny punkt C' prostej p_0 przechodzi jedna i tylko jedna prosta $b_{12} = \beta_1 \beta_2$ tej kongruencji. Płaszczyznom β_1 i β_2 wiązek (W_1) i (W_2) podporządkowana jest w wiązce (W) płaszczyzna β , która wyznacza na prostej p_0 jeden i tylko jeden punkt $C = \beta p_0$, odpowiadający punktowi C' . — Ze skonstruowanej w ten sposób odpowiedności [1, 4] - znacznej pomiędzy punktami C i C' prostej p_0 wynika, że przez każdy z pięciu punktów zjednoczonych tej odpowiedności przechodzi trójka płaszczyzn homologicznych badanych wiązek (W), (W_1) i (W_2), c. b. d. w.

Wkońcu, zamiast odpowiedności [1, 4] - znacznej, możemy wziąć pod uwagę pewną odpowiedność [2, 3] - znaczną pomiędzy punktami prostej p_0 . Pękowi płaszczyzn $c_1(\alpha_1, \beta_1, \dots)$ wiązki (W_1), którego oś $c_1 = W_1 C_1$ przechodzi przez dowolny punkt C_1 prostej p_0 , podporządkowane są — jak wiadomo — wiązkach (W) i (W_2) dwa rzutowe pęki płaszczyzn

$$\Gamma^2(\alpha, \beta, \dots) \bar{\wedge} c_2(\alpha_2, \beta_2, \dots),$$

których podstawami są stożek 2-go stopnia Γ^2 i prosta c_2 . Owe pęki utworzą powierzchnię skośną Φ^3 stopnia 3-go, a trzy punkty C'_1 , przecięcia się tej powierzchni z prostą p_0 , podporządkujemy punktowi C_1 . Przez każdy otrzymany w ten sposób punkt C'_1 przechodzi tworząca $b_{02} = \beta \beta_2$ powierzchni Φ^3 . Ponieważ ogół takich prostych $a_{02} = \alpha \alpha_2, \dots$ przecięcia się poszczególnych par homologicznych płaszczyzn α i $\alpha_2, \dots$ wiązek (W) i (W_2) utworzy²⁾ kongruencję K_{02} rzędu 2-go i klasy 4-ej, przeto przez C'_1 przechodzą dwie proste $b_{02} = \beta \beta_2$ i $d_{02} = \delta \delta_2$ tej kongruencji. Płaszczyznom β i δ wiązek (W), oraz β_2 i δ_2 wiązek (W_2) podporządkowane są w wiązce (W_1) dwie płaszczyzny β_1 i δ_1 , które niechaj przecinają prostą p_0 w dwóch punktach C_1 , odpowiadających elementowi C'_1 . Ze skonstruowanej odpowiedności [2, 3] - znacznej pomiędzy punktami C_1 i C'_1 prostej p_0 wynika bezpośrednio prawdziwość twierdzenia, wypisanego na początku tego ustępu.

¹⁾ por. np. Th. Reye, l. c. Bd. II, p. 164.

²⁾ R. Sturm, l. c. Bd. IV, Nr. 791.

Z rozważań ust. 3-go i 4-go wnosimy, że skoro prosta p_0 przechodzi: a) przez punkt $A_{12} = a_1 a_2$ krzywej skośnej S_{12}^3 , b) przez dwa takie punkty $A_{12} = a_1 a_2$ i $B_{12} = b_1 b_2$ krzywej S_{12}^3 , to wówczas: z pięciu punktów prostej p_0 , z których każdy przynależy do trzech homologicznych płaszczyzn danych wiązek (W) , (W_1) i (W_2) , w przypadku a) dwa punkty zjednoczyły się z elementem A_{12} , w przypadku b) dwa punkty zjednoczyły się z elementem A_{12} , a dwa dalsze z elementem B_{12} .

10. Pomiedzy płaszczyznami trzech wiązek (W) , (W_1) i (W_2) , o różnych wierzchołkach W , W_1 i W_2 , niechaj zachodzą zależności:

$$(W_1) \times (W_2), (W) \pi^2 (W_1), (W) \pi^2 (W_2), \quad (6)$$

wymienione pod (1a), (2a) i (3a) w ust. 2-im. Ogół punktów $B = a_1 a_2$, $B = \beta_1 \beta_2, \dots$, przecięcia się poszczególnych trójek homologicznych płaszczyzn owych wiązek, utworzy pewną powierzchnię krzywoliniową Ψ .

Celem wyznaczenia rzędu tej powierzchni, weźmy pod uwagę dowolną prostą p_0 , nie przechodzącą przez wierzchołki W , W_1 i W_2 . Ponieważ p_0 posiada (ust. 9) pięć takich punktów, z których każdy jest przecięciem trzech homologicznych płaszczyzn uważanych wiązek (W) , (W_1) i (W_2) , a każdy z owych punktów przynależy do powierzchni Ψ , przeto badana powierzchnia jest rzędu 5-go. — Załóżmy teraz, że prosta p_0 przechodzi przez punkt $E_{12} = e_1 e_2$ przecięcia się homologicznych prostych e_1 i e_2 kolineacyjnych wiązek (W_1) i (W_2) , t. zn. przez dowolny punkt krzywej skośnej S_{12}^3 rzędu 3-go (ust. 9.). Wówczas w punkcie E_{12} zjednoczyły się (ust. 9) dwa punkty z owych pięciu punktów przecięcia się prostej p_0 z powierzchnią Ψ^5 . Ponieważ tę własność posiada każda przez punkt E_{12} przechodząca prosta p_0 , przeto: dowolny punkt krzywej S_{12}^3 jest punktem podwójnym badanej powierzchni Ψ^5 .

Rząd tej powierzchni wyznaczyć możemy też za pośrednictwem przekroju powierzchni Ψ^5 dowolną płaszczyzną ω . O ile ω nie przechodzi przez wierzchołki W , W_1 i W_2 , to przetnie dane wiązki w trzech układach płaskich (ω) , (ω_1) i (ω_2) , przyczem (ust. 2) pomiędzy prostymi tych układów zachodzą — na mocy relacji (6) — następujące zależności:

$$(\omega_1) \times (\omega_2), (\omega) \pi^2 (\omega_1), (\omega) \pi^2 (\omega_2).$$

Utworem owych układów jest (ust. 5.) krzywa płaska K^3 rzędu 5-go, klasy 14-ej i rodzaju 3-go, a trzy punkty zjednoczone $E_1 = E_2$, $F_1 = F_2$ i $G_1 = G_2$ kolineacyjnych układów (ω_1) i (ω_2) są punktami podwójnymi krzywej K^3 . Ponieważ przez dowolny punkt $A = a_1 a_2$ krzywej K^3 przechodzą trzy homologiczne proste a , a_1 , a_2 układów (ω) , (ω_1) i (ω_2) , a temsamem i trzy homologiczne płaszczyzny a , a_1 , a_2 wiązek (W) , (W_1) i (W_2) , przeto:

dowolny punkt A krzywej K^3 przynależy do powierzchni Ψ^5 . Innymi słowy: płaszczyzna ω przecina badaną powierzchnię w krzywej 5-go rzędu, więc Ψ^5 jest powierzchnią 5-go rzędu c. b. d. w.

Z uwagi na to, że przez punkt podwójny np. $E_1 = E_2$ krzywej K^3 przechodzą (ust. 4 i 5.) dwie trójki homologicznych prostych b , b_1 , b_2 i c , c_1 , c_2 układów (ω) , (ω_1) i (ω_2) , przeto przez punkt $E_1 = E_2$ przechodzą również dwie trójki β , β_1 , β_2 i γ , γ_1 , γ_2 homologicznych płaszczyzn danych wiązek (W) , (W_1) i (W_2) . Ów punkt $E_1 = E_2$ jest zatem punktem przecięcia się homologicznych prostych $e_1 = \beta_1 \gamma_1$ i $e_2 = \beta_2 \gamma_2$ kolineacyjnych wiązek (W_1) , (W_2) i leży (ust. 9) na krzywej skośnej 3-go rzędu S_{12}^3 . Ale każda płaszczyzna ω , przechodząca przez ów punkt $E_1 = E_2$, przecina badaną powierzchnię Ψ^5 w krzywej K^3 , która w punkcie $E_1 = E_2$ posiada punkt podwójny. Wnosimy stąd, że: dowolny punkt $E_1 = E_2$ krzywej skośnej S_{12}^3 jest punktem podwójnym powierzchni Ψ^5 .

Dowiedliśmy zatem prawdziwości twierdzeń¹⁾:

Skoro pomiędzy płaszczyznami wiązek (W) , oraz płaszczyznami każdej z dwóch kolineacyjnych wiązek (W_1) i (W_2) — których wierzchołkami są trzy dowolne i różne od siebie punkty W , W_1 , W_2 — ustanowimy przekształcenia kwadratowe, to wówczas: ogół punktów, z których każdy jest punktem przecięcia się trzech homologicznych płaszczyzn tych wiązek, utworzy powierzchnię krzywoliniową rzędu 5-go.

Krzywa skośna 3-go rzędu — która jest miejscem geometrycznym punktów przecięcia się homologicznych prostych kolineacyjnych wiązek (W_1) i (W_2) — jest krzywą podwójną tej powierzchni.

W myśl zasady dwoistości w przestrzeni, prawdziwe są też twierdzenia następujące:

Skoro pomiędzy punktami układu płaskiego (ω) , oraz punktami każdego z dwóch kolineacyjnych układów płaskich (ω_1) i (ω_2) — których podstawami są trzy dowolne i różne od siebie płaszczyzny ω , ω_1 i ω_2 — ustanowimy przekształcenia kwadratowe, to wówczas: ogół płaszczyzn, z których każda przechodzi przez trzy homologiczne punkty tych układów, utworzy powierzchnię krzywoliniową klasy 5-ej.

Powierzchnia rozwijalna 3-ej klasy — która jest miejscem geometrycznym płaszczyzn, przechodzących przez homologiczne proste kolineacyjnych układów (ω_1) i (ω_2) — jest powierzchnią podwójnie - styczną owej powierzchni krzywoliniowej 5-ej klasy.

11. Pomiedzy płaszczyznami czterech wiązek (W) , (W_1) , (W_2) i (W_3) , których wierzchołkami są cztery dowolne i różne od siebie punkty W i W_i ($i = 1, 2, 3$), niechaj zachodzą zależności:

¹⁾ Por. uwagę na str. 1-ej.

$$(W_1) \times (W_2) \times (W_3), (W) \pi^2 (W_1), (W) \pi^2 (W_2), (W) \pi^2 (W_3), \quad (7)$$

wymienione pod (1a), (2a) i (3a) w ust. 2-im. Ogół punktów $A = a_1 a_2 a_3$, $B = \beta_1 \beta_2 \beta_3, \dots$, przecięcia się poszczególnych czwórek homologicznych płaszczyzn owych wiązek utworzy krzywą skośną R .

Celem wyznaczenia rzędu krzywej R , przetrnijmy dane wiązki dowolną płaszczyzną ω (nie przechodzącą przez wierzchołki W i W_i) w czterech układach płaskich (ω) i (ω_i). Ponieważ (ust. 2) pomiędzy prostymi tych układów — na mocy relacji (7) — zachodzą zależności:

$$(\omega_1) \times (\omega_2) \times (\omega_3), (\omega) \pi^2 (\omega_1), (\omega) \pi^2 (\omega_2), (\omega) \pi^2 (\omega_3), \quad (7')$$

przeto istnieje (ust. 8) *dziewięć* takich punktów $E = e_1 e_2 e_3, \dots$, z których każdy jest przecięciem czterech homologicznych prostych tych układów. Z uwagi na to, że przez każdy taki punkt np. E przechodzą cztery płaszczyzny $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ i ε_3 danych wiązek, każdy z owych 9-ciu punktów $E, \dots$ płaszczyzny ω leży na badanej krzywej R . Wykazaliśmy tedy, że *krzywa skośna R jest rzędu 9-go*.

Do tego samego wyniku dojdziemy, skoro weźmiemy pod uwagę powierzchnię 5-go rzędu Ψ^5 , utworzoną (ust. 10) przez wiązki (W), (W_1) i (W_2), oraz powierzchnię 3-go rzędu Φ^3 , która jest¹⁾ utworem trzech kolineacyjnych wiązek (W_1), (W_2) i (W_3). Przez dowolny punkt $A = a_1 a_2$ krzywej skośnej S_{12}^3 , która jest krzywą podwójną powierzchni Ψ^5 , oraz przez prostą a_3 wiązek (W_3) — odpowiadającą prostym a_1 i a_2 wiązek (W_1) i (W_2) — poprowadźmy płaszczyznę $\delta_3 = A a_3$. Elementowi δ_3 wiązki (W_3) podporządkowane są w wiązkach (W_1) i (W_2) płaszczyzny δ_1 i δ_2 , przechodzące oczywiście odpow. przez proste a_1 i a_2 . Ponieważ przez dowolny punkt A krzywej S_{12}^3 przechodzi tylko jedna trójka homologicznych płaszczyzn δ_1, δ_2 i δ_3 wiązek (W_i), przeto S_{12}^3 jest krzywą pojedynczą powierzchni Φ^3 . Uważane powierzchnie Ψ^5 i Φ^3 przenikają się w krzywej skośnej rzędu 15-go, która rozpada się na podwójnie liczoną krzywą S_{12}^3 oraz na krzywą R^9 rzędu 9-go. Dowolny punkt P krzywej R^9 — nie leżący na krzywej S_{12}^3 — jako punkt pojedynczy powierzchni Ψ^5 jest przecięciem trzech płaszczyzn homologicznych π, π_1 i π_2 wiązek (W), (W_1) i (W_2), a jako punkt przynależny równocześnie i do powierzchni Φ^3 , jest przecięciem trzech homologicznych płaszczyzn ρ_1, ρ_2 i ρ_3 kolineacyjnych wiązek (W_1), (W_2) i (W_3). Uwzględnić musimy dwa przypadki: płaszczyzny np. π_1 i ρ_1 wiązki (W_1) są a) różne od siebie, lub b) są identyczne. W przypadku a) przez punkt P przechodziłyby dwie homologiczne proste $s_1 = \pi_1 \rho_1$ i $s_2 = \pi_2 \rho_2$ wiązek (W_1) i (W_2) a element $P = s_1 s_2$ — wbrew

naszemu założeniu — leżałby na krzywej skośnej S_{12}^3 . Pozostaje tedy tylko przypadek b) w którym $\pi_1 = \rho_1$, a punkt P jest przecięciem czwórki homologicznych płaszczyzn π, π_1, π_2 i π_3 naszych wiązek. Skonstruowana w powyższy sposób krzywa skośna 9-go rzędu R^9 jest zatem miejscem geometrycznym punktów $P = \pi \pi_1 \pi_2 \pi_3, \dots$, c. b. d. w.

W następnym ustępie wykażemy, że krzywa R^9 jest rodzaju 6-go. Rzut tej krzywej na dowolną płaszczyznę ε jest krzywą płaską R' rzędu 9-go i rodzaju 6-go; krzywa R' , jak nam wiadomo, posiada w ogólności 22 punkty podwójne, 57 stycznych przegięcia i jest klasy 28-ej. Skoro przez *porządek* krzywej skośnej rozumiemy liczbę jej stycznych, które przecinają dowolną prostą, a nadto uwzględnimy twierdzenie¹⁾: „rzut krzywej skośnej r -go porządku i n -ej klasy na dowolną płaszczyznę jest krzywą płaską r -ej klasy, która posiada n stycznych przegięcia“ — to dochodzimy do następującego wyniku: Krzywa R^9 jest 28-go porządku, 57-ej klasy i posiada 22 pozorne punkty podwójne.

Krzywa R^9 nie posiada w ogólnym przypadku — jaki tu rozważamy — żadnego punktu podwójnego. Gdyby bowiem P był punktem podwójnym krzywej R^9 , to każda przez P przechodząca płaszczyzna ω przecinałaby tę krzywą w takich 9-ciu punktach, z których dwa zjednoczyć musiałoby się w owym punkcie P . Wówczas, p. relacje (7) i (7'), przez P przechodziłyby dwie czwórki homologicznych płaszczyzn $a_1 a_2 a_3$ i $\beta_1 \beta_2 \beta_3$ czterech danych wiązek (W) i (W_i), ($i = 1, 2, 3$), a tem samem homologiczne proste $c_1 = a_1 \beta_1$, $c_2 = a_2 \beta_2$ i $c_3 = a_3 \beta_3$ trzech kolineacyjnych wiązek (W_i) przecinałyby się w punkcie P , — co jest niemożliwe w przypadku rozważanej przez nas ogólnej kolineacji tych wiązek. A zatem:

Skoro pomiędzy płaszczyznami wiązeki (W), oraz płaszczyznami każdej z trzech kolineacyjnych wiązek (W_1), (W_2) i (W_3) — których wierzchołkami są cztery dowolne i różne od siebie punkty — ustanowimy przekształcenia kwadratowe, to wówczas: ogół punktów, z których każdy jest przecięciem się czterech homologicznych płaszczyzn tych wiązek, utworzy krzywą skośną 9-go rzędu, 57-ej klasy, 28-go porządku i 6-go rodzaju, która posiada 22 pozorne punkty podwójne.

Prawdziwe jest też, w myśl zasady dwoistości, twierdzenie następujące:

Skoro pomiędzy punktami układu płaskiego (ω), oraz punktami każdego z trzech kolineacyjnych układów płaskich (ω_1), (ω_2) i (ω_3) —

¹⁾ H. Grassmann in Crelles Journal 1855. Bd. 49.

¹⁾ por. R. Sturm: Synthetische Untersuchungen über Flächen dritter Ordnung Leipzig 1867, p. 183 — 4.

których podstawami są cztery dowolne i różne od siebie płaszczyzny — ustanowimy przekształcenia kwadratowe, to wówczas: ogół płaszczyzn, z których każda przechodzi przez cztery homologiczne punkty tych układów, utworzy powierzchnię rozwijalną 9-ej klasy, 57-go rzędu, 28-go rzędu i 6-go rodzaju, która posiada 22 pozorne płaszczyzny podwójne.

12. Chcąc wykazać, że krzywa R^9 jest rodzaju 6-go, uwzględnić musimy ogół punktów $A = \alpha \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$, $B = \beta \beta_1 \beta_2 \beta_3$, ... tej krzywej, a następnie zbadać miejsca geometryczne:

- płaszczyzn $\alpha, \beta, \dots$ wiązki (W) ,
- płaszczyzn $\alpha_i, \beta_i, \dots$, ($i = 1, 2, 3$) wiązki (W_i) .

Skoro s jest dowolną prostą wiązki (W) , to — jak nam wiadomo z teorii przekształceń kwadratowych — pękowi płaszczyzn $s(\pi, \rho, \dots)$ podporządkowane są w wiązkach (W_i) , w myśl relacji (7) ust. 11-go, pęki płaszczyzn stycznych do stożków 2-ej klasy Σ_i^2 przyczem zachodzą rzutowości:

$$s(\pi, \rho, \dots) \bar{\wedge} \Sigma_1^2(\pi_1, \rho_1, \dots) \bar{\wedge} \Sigma_2^2(\pi_2, \rho_2, \dots) \bar{\wedge} \Sigma_3^2(\pi_3, \rho_3, \dots).$$

Pęki te posiadają¹⁾ jednak $(1+2+2+2) = 7$ takich czwórek homologicznych płaszczyzn, z których każda czwórka przecina się w jednym punkcie. Ponieważ każdy taki punkt przynależy do badanej krzywej skośnej R^9 , przeto: przez dowolną prostą s wiązki (W) przechodzi 7 takich płaszczyzn $\alpha, \dots$, na których leżą odpow. punkty $A = \alpha \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3, \dots$ krzywej R^9 . Dowiedliśmy zatem, że: w przypadku a) miejscem geometrycznym płaszczyzn $\alpha, \beta, \dots$ wiązki (W) jest stożek Γ_7 klasy 7-ej.

Zalóżmy teraz, że prosta s leży (ust. 2) na płaszczyźnie głównej np. λ wiązki (W) . Otrzymane wówczas (ust. 2) rzutowe pęki płaszczyzn

$$s(\pi, \rho, \dots) \bar{\wedge} s_1(\pi_1, \rho_1, \dots) \bar{\wedge} s_2(\pi_2, \rho_2, \dots) \bar{\wedge} s_3(\pi_3, \rho_3, \dots),$$

których osie s_i leżą odpow. na płaszczyznach głównych ξ_i wiązek (W_i) , posiadają $(1+1+1+1) = 4$ takie czwórki homologicznych płaszczyzn, z których każda czwórka przecina się w punkcie krzywej R^9 . Przez prostą s przechodzą tedy 4 płaszczyzny styczne do stożka Γ_7 . Uwzględnić nadto musimy, że płaszczyźnie głównej λ podporządkowane są (ust. 2) w kolineacyjnych wiązkach (W_i) rzutowe pęki płaszczyzn

$$l_1(\delta_1, \dots) \bar{\wedge} l_2(\delta_2, \dots) \bar{\wedge} l_3(\delta_3, \dots),$$

¹⁾ R. Sturm, l. c. Bd. I. № 177.

których osiami są proste główne l_i owych wiązek. Pęki te utworzą krzywą skośną 3-go rzędu, a płaszczyzna λ przecina ją w takich trzech punktach, które leżą równocześnie na krzywej R^9 . Oprócz czterech poprzednio wyznaczonych płaszczyzn stycznych do stożka Γ_7 , przechodzą przez prostą s jeszcze trzy dalsze płaszczyzny styczne, które zjednoczyły się z płaszczyzną główną λ . Element λ jest tedy płaszczyzną potrójnie-styczną stożka Γ_7 . Te same własności posiadają dwie dalsze płaszczyzny główne μ i ν wiązki (W) .

Stożek Γ_7 klasy 7-ej, z trzema płaszczyznami potrójnie-stycznymi λ, μ i ν , jest w ogólności rzędu 24-go i rodzaju 6-go.

W przypadku b) stosując analogicznie rozważania do czterech rzutowych pęków płaszczyzn

$$\Sigma^2(\pi, \rho, \dots) \bar{\wedge} s_1(\pi_1, \rho_1, \dots) \bar{\wedge} s_2(\pi_2, \rho_2, \dots) \bar{\wedge} s_3(\pi_3, \rho_3, \dots),$$

przyczem dowolnej prostej s_i wiązki (W_i) podporządkowany jest stożek Σ^2 klasy 2-ej w wiązce (W) , wykazać możemy, że: w przypadku b) miejscem geometrycznym płaszczyzn $\alpha_i, \beta_i, \dots$ wiązki (W_i) jest stożek Γ_i^5 klasy 5-ej. Przyjmując prostą s_i na płaszczyźnie głównej ξ_i (wzgl. η_i lub ζ_i) wiązki (W_i) wykażemy, że owe płaszczyzny są stycznymi do stożka Γ_i^5 . Stożek ten jest w ogólności rzędu 20-go i rodzaju 6-go.

Zauważyć wkońcu należy, że stożek Γ_7 klasy 7-ej z trzema płaszczyznami potrójnie-stycznymi λ, μ i ν , przekształca się (ust. 2) za pośrednictwem relacji $(W)\pi^2(W_i)$ na stożek klasy 14-ej, który rozpada się oczywiście na trzy potrójnie liczone pęki płaszczyzn o osiach l_i, m_i i n_i , oraz na stożek klasy 5-ej Γ_5^1 , dla którego płaszczyzny główne ξ_i, η_i i ζ_i wiązki (W_i) są płaszczyznami stycznymi.

A zatem:

Skoro przez $A = \alpha \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$, $B = \beta \beta_1 \beta_2 \beta_3, \dots$ oznaczmy poszczególne punkty krzywej skośnej 9-go rzędu R^9 — która jest utworem czterech wiązek, spełniających relację (7) ust. 11-go — to wówczas:

a) płaszczyzny $\alpha, \beta, \dots$ wiązki (W) są stycznymi do stożka Γ_7 klasy 7-ej, rzędu 24-go i rodzaju 6-go, dla którego płaszczyzny główne λ, μ i ν wiązki (W) są płaszczyznami potrójnie-stycznymi.

b) płaszczyzny $\alpha_i, \beta_i, \dots$ ($i = 1, 2, 3$) wiązki (W_i) i płaszczyzny główne ξ_i, η_i, ζ_i tej wiązki są płaszczyznami stycznymi do stożka Γ_i^5 klasy 5-ej, rzędu 20-go i rodzaju 6-go.

Prawdziwe jest też, w myśl zasady dwoistości, następujące twierdzenie:

Skoro pomiędzy punktami układu płaskiego (ω) oraz punktami każdego z trzech kolineacyjnych układów płaskich (ω_i) , $i = 1, 2, 3$ —

których podstawami są cztery dowolne i różne od siebie płaszczyzny ω, ω_1 — ustanowimy przekształcenia kwadratowe,

a) przez $\alpha = A A_1 A_2 A_3, \beta = B B_1 B_2 B_3, \dots$ oznaczymy poszczególne płaszczyzny styczne powierzchni rozwijalnej 9-ej klasy, będącej (ust. 11) utworem tych układów, to wówczas:

a) punkty $A, B, \dots$ układu (ω) leżą na krzywej C^1 rzędu 7-ego, klasy 24-ej i rodzaju 6-go, dla której punkty główne L, M, i, N układu (ω) są punktami potrójnymi.

b) punkty $A, B, \dots$ układu (ω_1) i punkty główne X, Y, Z tego układu leżą na krzywej C^1 rzędu 5-go, klasy 20-ej i rodzaju 6-go.

Pomiędzy płaszczyznami $\alpha, \beta, \dots$ stożka Γ_7 klasy 7-ej i rodzaju 6-go, a punktami $A = \alpha a_1 a_2 a_3, B = \beta \beta_1 \beta_2 \beta_3, \dots$ krzywej skośnej R^9 rzędu 9-go zachodzi — na mocy relacji (7) ust. 11-go — odpowiedniość [1, 1] -znaczna. Również pomiędzy płaszczyznami $\alpha, \beta, \dots$ ($i = 1, 2, 3$) stożka Γ_5^1 klasy 5-ej i rodzaju 6-go, a punktami $A, B, \dots$ krzywej R^9 zachodzi też odpowiedniość [1, 1] -znaczna. Wnosimy stąd, na mocy podstawowego twierdzenia Clebscha, że: badana krzywa skośna 9-go rzędu R^9 jest rodzaju 6-go, c. b. d. w.

Pomiędzy płaszczyznami stycznymi: a) α_1 i α_2, β_1 i $\beta_2, \dots$ stożków Γ_5^1 i Γ_5^2 , b) α_2 i α_3, β_2 i $\beta_3, \dots$ stożków Γ_5^2 i Γ_5^3 , c) α_3 i α_1, β_3 i $\beta_1, \dots$ stożków Γ_5^3 i Γ_5^1 , które to płaszczyzny są elementami homologicznymi trzech kolineacyjnych wiązek (W_i) , — zachodzą odpowiedniości [1, 1] -znaczne. Ponieważ każdy ze stożków Γ_5^1, Γ_5^2 i Γ_5^3 jest 5-ej klasy (i rodzaju 6-go), przeto punkty $A = \alpha_1 a_2 a_3, B = \beta_1 \beta_2 \beta_3, \dots$ przynależą¹⁾ do krzywej skośnej R^{15} rzędu $(5 + 5 + 5) = 15$ -go. Z rozważań ust. 11-go i 12-go wiadomo nam jednak, że punkty $A = \alpha_1 a_2 a_3 = \alpha a_1 a_2 a_3, \dots$ tworzą krzywą skośną 9-go rzędu R^9 . Tę pozorną sprzeczność usuniemy, jeśli uwzględniemy²⁾, że dla trzech kolineacyjnych wiązek (W_i) istnieje sześć takich prostych $e = \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3, \dots$, z których każda jest przecięciem trzech homologicznych płaszczyzn tych wiązek. Z uwagi na to, że punkt $E = e \epsilon = \epsilon \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3$ leży na krzywej R^9 , przeto e jest płaszczyzną styczną do stożka Γ_7 , a płaszczyzna ϵ_i jest ($i = 1, 2, 3$) płaszczyzną styczną do stożka Γ_5^i . Wymieniona powyżej krzywa R^{15} rozpada się zatem na 6 prostych $e = \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3, \dots$, oraz na krzywą skośną 9-go rzędu R^9 , c. b. d. w.

Stosując analogiczne rozważania do stożków np. Γ_5^1 i Γ_5^2 klasy 5-ej, oraz do stożka Γ_7 klasy 7-ej, otrzymalibyśmy, krzywą skośną R^{17} rzędu

$(5 + 5 + 7) = 17$ -go. Ponieważ jednak dla trzech wiązek $(W), (W_1)$ i (W_2) , spełniających relację (7), istnieje 8 ośm takich prostych $f = \varphi \varphi_1 \varphi_2, \dots$, z których każda jest przecięciem trzech homologicznych płaszczyzn tych wiązek, przeto: krzywa R^{17} rozpada się na 8 prostych $f, \dots$, oraz na krzywą skośną 9-go rzędu R^9 .

13. Dowiedzimy prawdziwości twierdzenia:

Skoro pomiędzy płaszczyznami wiązek (W) , oraz płaszczyznami każdej z czterech kolineacyjnych wiązek (W_i) — których (dla $i = 1, 2, 3, 4$) wierzchołkami są dowolne i różne od siebie punkty W i W_i — ustanowimy przekształcenia kwadratowe, to wówczas: istnieje czternaście takich piątek homologicznych płaszczyzn tych wiązek, z których każda piątka przecina się w jednym punkcie.

W tym celu poszczególnym punktom $A = \alpha a_1 a_2 a_3, \dots$ krzywej skośnej R^9 rzędu 9-go i rodzaju 6-go, która jest (ust. 11) utworem wiązek $(W), (W_1), (W_2)$ i (W_3) , podporządkujemy płaszczyzny $\alpha, \dots$ wiązki (W_4) . Ponieważ płaszczyzny np. $\alpha, \dots$ wiązki (W_1) są (ust. 12) płaszczyznami stycznymi stożka Γ_5^1 klasy 5-ej i rodzaju 6-go, przeto z kolineacji wiązek (W_1) i (W_4) wynika bezpośrednio, że: uważane płaszczyzny $\alpha, \dots$ wiązki (W_4) są płaszczyznami stycznymi do stożka Γ_5^1 klasy 5-ej i rodzaju 6-go. W ustanowionej odpowiedniości [1, 1] -znacznej pomiędzy punktami $A, B, \dots$ krzywej skośnej R^9 i płaszczyznami $\alpha, \beta, \dots$ stożka Γ_5^1 istnieje²⁾ $(9 + 5) = 14$ takich punktów $E = \epsilon \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3, \dots$ krzywej R^9 , z których każdy leży na homologicznej płaszczyźnie $\epsilon_4, \dots$ stożka Γ_5^4 . Innymi słowy: dane wiązki posiadają 14-e takich piątek homologicznych płaszczyzn, z których każda piątka, np. $\epsilon, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ i ϵ_4 , przecina się w jednym punkcie, c. b. d. w.

Powyższemu twierdzeniu dwójście podporządkowane jest twierdzenie następujące:

Skoro pomiędzy punktami układu płaskiego (ω) , oraz punktami każdego z czterech kolineacyjnych układów płaskich (ω_i) — których (dla $i = 1, 2, 3, 4$) podstawami są dowolne i różne od siebie płaszczyzny ω i ω_i — ustanowimy przekształcenia kwadratowe, to wówczas: istnieje czternaście takich piątek homologicznych punktów tych układów, z których każda piątka leży na jednej płaszczyźnie.

IV.

14. Pomiędzy prostymi trzech wiązek $(W), (W_1)$ i (W_2) , których wierzchołkami są dowolne i różne od siebie punkty W, W_1 i W_2 , niechaj zachodzą zależności:

¹⁾ R. Sturm, l. c. Bd. I. № 177.

²⁾ Th. Reye, l. c. Bd. III. p. 87.

¹⁾ Odnośny dowód podam w osobnej rozprawie, p. str. 1. uwaga 1.

²⁾ R. Sturm, l. c. Bd. I. Nr. 177.

$$(W_1) \times (W_2), (W) \pi^2 (W_1), (W) \pi^2 (W_2), \quad (8)$$

wymienione pod (1b), (2b) i (3b) w ust. 2-im. Podobnie pomiędzy prostymi trzema układami płaskimi (ω) , (ω_1) i (ω_2) , których podstawami są dowolne i różne od siebie płaszczyzny ω , ω_1 i ω_2 , niechaj zachodzą zależności:

$$(\omega_1) \times (\omega_2), (\omega) \pi^2 (\omega_1), (\omega) \pi^2 (\omega_2), \quad (9)$$

wymienione pod (1c), (2c) i (3c) w ust. 2-im.

Wiązki (W) i (W_1) posiadają klasę takich prostych homologicznych, które się przecinają¹⁾ w punktach krzywej skośnej S_{01}^4 rzędu 4-go i gatunku 1-go. Krzywa ta przechodzi przez wierzchołki W i W_1 tych wiązek.

Podobnie niechaj krzywa skośna S_{02}^4 rzędu 4-go i gatunku 1-go będzie miejscem geometrycznym punktów przecięcia się homologicznych prostych wiązek (W) i (W_2) .

Krzywa skośna S_{12}^3 rzędu 3-go niechaj będzie (ust. 9) miejscem geometrycznym punktów przecięcia się homologicznych prostych kolineacyjnych wiązek (W_1) i (W_2) .

Ponieważ dwusieczne krzywej S_{12}^3 tworzą (ust. 9) kongruencję K_{12} rzędu 1-go i klasy 3-ej, przeto przez wierzchołek W wiązki (W) przechodzi jedna i tylko jedna dwusieczna d owej krzywej. Skoro d jest krawędzią przecięcia się homologicznych płaszczyzn δ_1 i δ_2 wiązek (W_1) i (W_2) , to rzutowym pękiem prostych $W_1(a_1, b_1, \dots)$ i $W_2(a_2, b_2, \dots)$ o podstawie δ_1 wzgl. δ_2 , podporządkowany jest w wiązce (W) pęk prostych $\Delta^2(a, b, \dots)$ na stożku 2-go stopnia Δ^2 . Dwusieczna $d = \delta_1 \delta_2$ przecina zatem nieskończenie wiele trójek $a a_1 a_2, b b_1 b_2, \dots$ homologicznych prostych danych wiązek (W) , (W_1) i (W_2) .

Podobne własności posiada dwusieczna $p = W_1 W_2$, przechodząca przez wierzchołki wiązek (W_1) i (W_2) . W istocie bowiem na płaszczyźnie

Układy płaskie (ω) i (ω_1) posiadają klasę takich prostych homologicznych, które wyznaczają płaszczyznę styczną do powierzchni rozwijalnej Σ_{01}^4 klasy 4-ej i gatunku 1-go. Powierzchnia ta jest styczną do płaszczyzn podstawowych ω i ω_1 tych układów.

Podobnie niechaj powierzchnia rozwijalna Σ_{02}^4 klasy 4-ej i gatunku 1-go będzie miejscem geometrycznym płaszczyzn, przechodzących przez homologiczne proste układów (ω) i (ω_2) .

Powierzchnia rozwijalna Σ_{12}^3 klasy 3-ej niechaj będzie miejscem geometrycznym płaszczyzn, przechodzących przez homologiczne proste układów (ω_1) i (ω_2) .

$\pi = Wp$ leży pęk prostych $W(a, b, \dots)$, któremu podporządkowane są rzutowe pęki prostych $\Pi_1^2(a_1, b_1, \dots)$ i $\Pi_2^2(a_2, b_2, \dots)$, których podstawami są stożki 2-go stopnia. Element $p = W_1 W_2$ przecina ∞ -wiele trójek $a a_1 a_2, \dots$ homologicznych prostych danych wiązek (W) , (W_1) i (W_2) .

Pękowi prostych $W_1(a_1, b_1, \dots)$, leżącemu na płaszczyźnie $\tau_1 = W W_1 W_2$, podporządkowane są w wiązce (W_2) pęk prostych $W_2(a_2, b_2, \dots)$ na płaszczyźnie τ_2 , a w wiązce (W) pęk prostych $T^2(a, b, \dots)$ na stożku 2-go stopnia T^2 . Prosta $W W_2$ przecina tedy ∞ -wiele trójek homologicznych prostych $a a_1 a_2, \dots$ danych trzech wiązek. — Uważając τ_1 za płaszczyznę podstawową σ_2 pędu $W_2(a_2, b_2, \dots)$, stwierdzamy z łatwością, że prosta $W W_1$ posiada analogiczną własność. A zatem:

Proste $W W_1$, $W W_2$ i $W_1 W_2$, łączące wierzchołki wiązek, spełniających relację (8), oraz dwusieczna krzywej skośnej S_{12}^3 , przechodząca przez wierzchołek W ,

Proste $\omega \omega_1$, $\omega \omega_2$ i $\omega_1 \omega_2$, przecięcia się podstaw układów płaskich, spełniających relację (9), oraz „prosta dwupłaszczyznowa”¹⁾ powierzchni rozwijalnej Σ_{12}^3 , leżąca na podstawie ω ,

posiadają tę własność, że każda z nich przecina nieskończenie wiele trójek homologicznych prostych danych wiązek, wzgl. układów płaskich.

Niechaj w wiązkach $(W_1) \times (W_2)$ dane będą dwa rzutowe pęki homologicznych prostych $W_1(a_1, b_1, \dots)$ i $W_2(a_2, b_2, \dots)$, leżące odpowiednio na płaszczyznach γ_1 i γ_2 . Podporządkowany im w wiązce (W) stożek prostych $\Gamma^2(a, b, \dots)$ przetnijmy prostą $c = \gamma_1 \gamma_2$, która jest dwusieczną krzywej S_{12}^3 . O ile c nie przechodzi przez wierzchołek W stożka Γ^2 , to element c przecina dwie tworzące e i f owego stożka. Prosta c przecina równocześnie proste e_1, f_1 pędu $W_1(a_1, \dots)$ i proste e_2, f_2 pędu $W_2(a_2, \dots)$. A zatem:

Każda prosta dwusieczna krzywej skośnej S_{12}^3 , o ile nie przechodzi przez wierzchołek wiązki (W) , przecina dwie trójki homologicznych prostych danych wiązek (W) , (W_1) i (W_2) .

Każda prosta dwupłaszczyznowa powierzchni rozwijalnej Σ_{12}^3 , o ile nie leży na podstawie układu płaskiego (ω) , przecina dwie trójki homologicznych prostych danych układów płaskich (ω) , (ω_1) i (ω_2) .

Przez wierzchołek W wiązki (W) poprowadźmy dowolną prostą p i zbadajmy ile trójek homologicznych prostych danych wiązek może przecinać owa prosta p . O ile istnieje taka trójka prostych np. $b b_1 b_2$, to pę-

¹⁾ R. Sturm, I. c. Bd. IV. Nr. 800.

¹⁾ t. j. prosta przecięcia się dwóch płaszczyzn stycznych uważanej powierzchni rozwijalnej.

kowi prostych $W_2(a_2, b_2, \dots)$, leżącemu na płaszczyźnie $\pi_2 = W_2 p$, podporządkowany jest w kolineacyjnej wiązce (W_1) rzutowy do niego pęk prostych $W_1(a_1, b_1, \dots)$, leżący na płaszczyźnie π_1 . Skoro przez b_1 oznaczmy prostą wiązki (W_1), przechodzącą przez punkt $p \pi_1$, to wnosimy stąd, że: element p przecina jedną i tylko jedną trójkę homologicznych prostych $b b_1 b_2$. — Powyższy dowód nie ulega zmianie, jeśli p zjednoczy się z jedną z trzech prostych głównych (ust. 2) wiązki (W).

Zalóżmy teraz, że prosta p przechodzi przez wierzchołek wiązki (W_1). Wówczas pękowi $W_2(a_2, b_2, \dots)$ o płaszczyźnie podstawowej $\pi_2 = W_2 p$ podporządkowany jest — na mocy relacji (8) — w wiązce (W) pęk prostych $\Pi^2(a, b, \dots)$, którego podstawą jest stożek 2-go stopnia. Skoro przez c_2 i d_2 oznaczmy te tworzące stożka Π^2 , które przecinają się z prostą p , to stwierdzimy, że: prosta p wiązki (W_1) przecina dwie trójki homologicznych prostych $c c_1 c_2$ i $d d_1 d_2$. Powyższy dowód nie ulega zmianie, jeśli p zjednoczy się z prostą główną wiązki (W_1). — W ten sam sposób wykażemy, że: dowolna prosta p wiązki (W_2) posiada analogiczną własność. A zatem:

Dowolna prosta wiązki (W) przecina jedną trójkę, a dowolna prosta wiązki (W_1), wzgl. (W_2) przecina dwie trójki homologicznych prostych danych wiązek (W), (W_1) i (W_2).

Dowolna prosta układu (ω) przecina jedną trójkę, a dowolna prosta układu, (ω_1) wzgl. (ω_2) przecina dwie trójki homologicznych prostych danych układów płaskich (ω), (ω_1) i (ω_2).

15. Dowolna płaszczyzna τ , nie przechodząca przez wierzchołki danych wiązek (ust. 14 relacja 8), przetnie owe trzy wiązki prostych (ust. 2) w układach płaskich (τ), (τ_1) i (τ_2), przyczem pomiędzy ich punktami zachodzą zależności:

$$(\tau_1) \times (\tau_2), (\tau) \pi^2(\tau_1), (\tau) \pi^2(\tau_2).$$

Utworem tych układów jest (ust. 5) krzywa płaska 5-ej klasy K_5 , której każda styczna przecina trzy homologiczne proste danych wiązek. Krzywa ta jest rzędu 14-go, rodzaju 3-go i posiada trzy styczne podwójne. Ponieważ każda jej styczna podwójna jest prostą zjednoczoną $e_1 = e_2$ kolineacyjnych układów (τ_1) i (τ_2), a temsamem i krawędzią przecięcia się dwóch homologicznych płaszczyzn $e_1 = W_1 e_1$ i $e_2 = W_2 e_2$ wiązek (W_1) i (W_2), przeto: *Styczna podwójna krzywej K_5 jest dwusieczną krzywej skośnej 3-go rzędu S_{12}^3 .*

Zalóżmy teraz, że płaszczyzna τ przechodzi przez wierzchołek wiązki (W). Pękowi prostych $W(a, b, \dots)$, leżącemu na płaszczyźnie τ , podporządkowane są w wiązках (W_1) i (W_2) dwa rzutowe pęki pros-

tych, których podstawami są odpow. stożki 2-go stopnia Γ_1^2 i Γ_2^2 . Skoro owe stożki przetniemy płaszczyzną w stożkowych C_1^2 i C_2^2 , to otrzymamy dwa rzutowe szeregi punktów:

$$C_1^2(A_1, B_1, \dots) \bar{\wedge} C_2^2(A_2, B_2, \dots),$$

których utworem jest krzywa płaska C_4 klasy 4-ej z trzema stycznymi podwójnymi. Dowolna styczna $a_{12} = A_1 A_2$ tej krzywej przecina odpow. w punktach A_1 i A_2 proste a_1 i a_2 wiązek (W_1) i (W_2), oraz homologiczną prostą a wiązki (W), leżącą na τ . Ponieważ nadto każda prosta wiązki (W) przecina (ust. 14) trzy homologiczne proste danych wiązek, przeto: Krzywa 5-ej klasy K_5 rozpada się w tym przypadku na pęk prostych $W(a, b, \dots)$ o podstawie τ i na krzywą 4-ej klasy C_4 .

Skoro płaszczyzna τ przechodzi przez prostą główną np. l wiązki (W) to wymienione powyżej pęki prostych na stożkach Γ_1^2 i Γ_2^2 rozpadają się (ust. 2) na pęki prostych, leżące odpow. na płaszczyznach głównych λ_1 i λ_2 wiązek (W_1) i (W_2), oraz na dwa dalsze pęki prostych, leżące odpow. na płaszczyznach γ_1 i γ_2 , podporządkowanych płaszczyźnie $\tau = \tau$ wiązki (W). Przecinając owe cztery pęki płaszczyzną τ , otrzymamy dwie pary rzutowych szeregów punktów, których utworem są dwie stożkowe, występujące w miejsce krzywej 4-ej klasy C_4 . — Wreszcie płaszczyzna τ zawierać może dwie proste główne np. l i m wiązki (W), czyli τ zjednoczyć się może z płaszczyzną główną ζ . Wówczas pęk prostych wiązki (W_1), leżący na stożku Γ_1^2 , rozpadnie się na dwa pęki prostych, których podstawami są odpow. płaszczyzny główne λ_1 i μ_1 . Podobne zależności wystąpią w wiązce (W_2). Wnosimy stąd, że krzywa C_4 klasy 4-ej, leżąca na τ , rozpadnie się też na dwie stożkowe. —

Zalóżmy teraz, że płaszczyzna τ przechodzi przez wierzchołek wiązki (W_1) i zawiera pęk prostych $W_1(a_1, b_1, \dots)$. Homologiczne pęki prostych $\Gamma^2(a, b, \dots)$ i $W_2(a_2, b_2, \dots)$, należące odpow. do wiązek (W) i (W_2), przecina płaszczyzna τ w rzutowych szeregach punktów:

$$C^2(A, B, \dots) \bar{\wedge} c_2(A_2, B_2, \dots).$$

Utworem tych szeregów jest krzywa płaska C_3 klasy 3-ej, z jedną styczną podwójną c_2 , a każda styczna np. $a_{02} = A A_2$ tej krzywej przecina trzy homologiczne proste a , a_1 i a_2 danych wiązek. Ponieważ każda prosta wiązki (W_1) przecina (ust. 14) dwie trójki homologicznych prostych naszych wiązek, przeto: Krzywa 5-ej klasy K_5 rozpada się na podwójnie liczoną pęk prostych $W_1(a_1, b_1, \dots)$ i na krzywą 3-ej klasy C_3 .

Jeżeli τ przejdzie przez prostą główną np. x_1 wiązki (W_1), to wymieniony powyżej stożek prostych $\Gamma^2(a, b, \dots)$ rozpadnie się (ust. 2) na

dwa pęki prostych, których podstawami są płaszczyzna główna ξ i płaszczyzna γ wiązki (W), podporządkowana elementowi $\tau_1 = \tau$. Krzywa 3-ej klasy C_3 , leżąca na τ , rozpadnie się na stożkową C_2 i na pęk prostych o wierzchołku $X_2 = \tau x_2$. — Niechaj τ będzie płaszczyzną główną np. v_1 i zawiera dwie proste główne x_1, y_1 wiązki (W_1). Pęk $\Gamma^2(a, b, \dots)$ rozpada się wówczas na dwa pęki prostych, których podstawami są płaszczyzny główne ξ i η wiązki (W), a krzywa 3-ej klasy C_3 rozpada się na trzy pęki prostych.

Analogiczne zależności otrzymamy, jeśli τ przejdzie przez wierzchołek W_2 , wzgl. prostą główną x_2 lub proste główne x_2 i y_2 wiązki (W_2).

Zalóżmy teraz, że płaszczyzna τ przechodzi przez wierzchołki wiązek (W) i (W_1). Pękowi prostych $W(a, b, \dots)$ o podstawie τ podporządkowane są w wiązkach (W_1) i (W_2) dwa rzutowe pęki prostych, leżące odpow. na stożkach Γ_1^3 i Γ_2^3 . Płaszczyzna τ przecina pierwszy stożek w dwóch tworzących e_1 i f_1 , a drugi stożek w szeregu punktów $C_2^3(A_2, B_2, \dots, E_2, F_2, \dots)$. Każda prosta, leżąca na τ i przechodząca przez E_2 (wzgl. F_2), przecina trójkę prostych e, e_1, e_2 (wzgl. f, f_1, f_2) danych wiązek. Krzywa 5-ej klasy K_5 , leżąca na płaszczyźnie τ , rozpada się na podwójnie liczony pęk prostych o wierzchołku W_1 i na trzy pęki prostych o wierzchołkach W, E_2, F_2 . Z pośród pięciu stycznych, jakie z dowolnego punktu P prostej $W W_1$ wykreślić można do owej zniekształconej krzywej K_5 , dwie są prostymi $P E_2$ i $P F_2$, a trzy pozostałe styczne zjednoczyły się z prostą $W W_1$. Innymi słowy: zniekształcona krzywa K , posiada jedną styczną potrójną $W W_1$. — Analogiczne zależności wystąpią dla płaszczyzny τ , przechodzącej przez wierzchołki W i W_2 .

Niechaj τ przechodzi przez wierzchołki W_1 i W_2 kolineacyjnych wiązek (W_1) i (W_2). Pękowi prostych $W_1(a_1, b_1, \dots, c_1, \dots)$ o podstawie $\varepsilon_1 = \tau$ podporządkowany jest w wiązce (W_2) pęk prostych $W_2(a_2, b_2, \dots, c_2, \dots)$, leżący na płaszczyźnie ε_2 . Elementy $\tau = \varepsilon_1$ i ε_2 przecinają się w prostej $c_2 = \tau \varepsilon_2$, więc na τ leżą dwie proste homologiczne c_1 i c_2 tych wiązek. Podporządkowana im prosta c w wiązce (W) niechaj przetnie τ w punkcie $C = c \tau$. Z łatwością stwierdzimy: Krzywa 5-ej klasy K_5 , leżąca na płaszczyźnie τ , rozpadnie się wówczas na pęk prostych o wierzchołku C , oraz na dwa podwójnie liczone pęki prostych o wierzchołkach W_1 i W_2 , przyczem prosta $W_1 W_2$ jest styczną poczwórną tej zniekształconej krzywej K_5 .

Jeżeli wkońcu weźmiemy pod uwagę płaszczyznę $\tau = W W_1 W_2$, to na τ leżąca krzywa K_5 rozpada się na dwa podwójnie liczone pęki prostych o wierzchołkach W_1, W_2 i na pęk o wierzchołku W . Krzywa ta posiada styczną poczwórną $W_1 W_2$ i dwie styczne potrójne $W W_1, W W_2$. A zatem:

Skoro pomiędzy prostymi wiązki (W), oraz prostymi każdej z dwóch kolineacyjnych wiązek (W_1) i (W_2) — których wierzchołkami są trzy dowolne i różne od siebie punkty — ustanowimy przekształcenia kwadratowe, to wówczas: na dowolnej płaszczyźnie τ leży krzywa 5-ej klasy K_5 , której każda styczna przecina trzy homologiczne proste tych wiązek.

Jeżeli płaszczyzna τ nie przechodzi przez żaden wierzchołek W, W_1 i W_2 , to: krzywa K_5 jest rzędu 14-go, rodzaju 3-go i posiada trzy styczne podwójne, któremi są proste dwusieczne krzywej sko-3-go rzędu S_{12}^3 .

Jeżeli τ przechodzi przez wierzchołek W_1 , to krzywa K_5 rozpada się na pęk prostych (W), i na krzywą 4-ej klasy C_4 , z trzema stycznymi podwójnymi. Natomiast, gdy na τ leżą jedna lub dwie proste główne wiązki (W), to krzywa C_4 rozpada się na dwie stożkowe.

Jeżeli τ przechodzi przez wierzchołek W_1 , wzgl. W_2 , to krzywa K_5 rozpada się na podwójnie liczony pęk prostych (W_1), wzgl. (W_2), oraz na krzywą 3-ej klasy C_3 , z jedną styczną podwójną.

Natomiast, gdy na τ leżą jedna wzgl. dwie proste główne wiązki (W_1) lub (W_2), to krzywa C_3 rozpada się na stożkową i pęk prostych, wzgl. na trzy pęki prostych.

Skoro pomiędzy prostymi układu płaskiego (ω), oraz prostymi każdego z dwóch kolineacyjnych układów płaskich (ω_1) i (ω_2) — których podstawami są trzy dowolne i różne od siebie płaszczyzny — ustanowimy przekształcenia kwadratowe, to wówczas: przez dowolny punkt T przechodzi stożek 5-go rzędu K^5 , którego każda tworząca przecina trzy homologiczne proste tych układów.

Jeżeli punkt T nie leży na żadnej płaszczyźnie podstawowej ω, ω_1 i ω_2 , to: stożek K^5 jest klasy 14-ej, rodzaju 3-go i posiada trzy tworzące podwójne, któremi są proste dwupłaszczyznowe powierzchni rozwijalnej 3-ej klasy Σ_{12}^3 .

Jeżeli T leży na podstawie ω , to stożek K^5 rozpada się na pęk prostych (T), ω i na stożek 4-go rzędu Γ^4 , z trzema tworzącymi podwójnymi. Natomiast, gdy przez T przechodzą jedna lub dwie proste główne układu (ω), to stożek Γ^4 rozpada się na dwa stożki 2-go stopnia.

Jeżeli T leży na podstawie ω_1 , wzgl. ω_2 , to stożek K^5 rozpada się na podwójnie liczony pęk prostych (T), ω_1 wzgl. (ω_2), oraz na stożek 3-go rzędu Γ^3 , z jedną tworzącą podwójną.

Natomiast, gdy przez T przechodzą jedna, wzgl. dwie proste główne układu (ω_1) lub (ω_2), to stożek Γ^3 rozpada się na stożek 2-go stopnia i pęk prostych, wzgl. na trzy pęki prostych.

Jeżeli τ przechodzi przez wierzchołki W i W_1 (wzgl. W i W_2), to krzywa K_5 rozpada się na *podwójnie liczony pęk prostych* $(W_1)_\tau$ wzgl. $(W_2)_\tau$, na *pęk* $(W)_\tau$ i na *dwa dalsze pęki prostych*.

Jeżeli płaszczyzna τ przechodzi przez wierzchołki W_1 i W_2 , to krzywa K_5 rozpada się na *dwa podwójnie liczone pęki prostych* $(W_1)_\tau$, $(W_2)_\tau$ i na *trzeci pęk prostych*.

Dla płaszczyzny $\tau = W W_1 W_2$ krzywa 5-ej klasy K_5 rozpada się na *pęk prostych* $(W)_\tau$ i na *dwa podwójnie liczone pęki prostych* $(W_1)_\tau$, $(W_2)_\tau$.

W trzech ostatnich przypadkach proste $W W_1$ i $W W_2$ są *stycznymi potrójniami*, a prosta $W_1 W_2$ jest *styczną poczwórną* odnośnych krzywych zniekształconych K_5 .

16. Przez dany punkt P , różny od wierzchołków W , W_1 i W_2 trzech wiązek, które spełniają relację (8) ust. 14-go, — poprowadźmy dowolną płaszczyznę τ . Płaszczyzna ta, o ile nie przechodzi przez owe wierzchołki, przecina dane wiązki w trzech układach płaskich (τ) , (τ_1) i (τ_2) , przy czym (ust. 2) pomiędzy ich punktami zachodzą zależności:

$$(\tau_1) \times (\tau_2), \quad (\tau) \pi^2 (\tau_1), \quad (\tau) \pi^2 (\tau_2).$$

Wówczas przez punkt P płaszczyzny τ przechodzi (ust. 3) pięć takich prostych, że na każdej z nich np. $e_0 = E E_1 E_2$ leżą trzy homologiczne punkty E , E_1 i E_2 tych układów. Każda z takich prostych np. e_0 przecina trzy homologiczne proste $e = W E$, $e_1 = W_1 E_1$ i $e_2 = W_2 E_2$ danych wiązek. Ponieważ na dowolnej płaszczyźnie τ , przechodzącej przez punkt P , leży 5 takich prostych $e_0, \dots$, przecinających się w punkcie P , przeto: Dany punkt P jest *wierzchołkiem stożka 5-go rzędu* Γ^5 , którego każda tworząca przecina trzy homologiczne proste wiązek (W) , (W_1) i (W_2) .

Załóżmy teraz, że wierzchołek P stożka Γ^5 nie leży na żadnej z krzywych skośnych (ust. 14) S_{01}^4 , S_{02}^4 i S_{12}^3 . Wówczas (różne od siebie) tworzące $P W_1$ i $P W_2$ tego stożka, przechodzące przez wierzchołki W_1 i W_2 wiązek (W_1) i (W_2) , oraz ta tworząca d , która jest dwusieczną krzywej

Jeżeli T leży na podstawach ω i ω_1 (wzgl. ω i ω_2), to stożek K^5 rozpada się na *podwójnie liczony pęk prostych* $(T)_{\omega 1}$, wzgl. $(T)_{\omega 2}$, na *pęk* $(T)_\omega$ i na *dwa dalsze pęki prostych*.

Jeżeli punkt T leży na podstawach ω_1 i ω_2 , to stożek K^5 rozpada się na *dwa podwójnie liczone pęki prostych* $(T)_{\omega 1}$, $(T)_{\omega 2}$ i na *trzeci pęk prostych*.

Dla punktu $T = \omega \omega_1 \omega_2$ stożek 5-go rzędu K^5 rozpada się na *pęk prostych* $(T)_\omega$ i na *dwa podwójnie liczone pęki prostych* $(T)_{\omega 1}$, $(T)_{\omega 2}$.

W trzech ostatnich przypadkach proste $\omega \omega_1$ i $\omega \omega_2$ są *tworzącymi potrójniami*, a prosta $\omega_1 \omega_2$ jest *tworzącą poczwórną* odnośnych stożków zniekształconych K^5 .

S_{12}^3 , są *tworzącymi podwójniami* stożka Γ^5 , gdyż każda z nich przecina (ust. 14) dwie trójki homologicznych prostych wiązek (W) , (W_1) i (W_2) . Stożek 5-go rzędu z trzema tworzącymi podwójniami jest klasy 14-ej i rodzaju 3-go.

Te tworzące stożka Γ^5 , które leżą na pomocniczej płaszczyźnie τ , są oczywiście stycznymi tej krzywej 5-ej klasy K_5 , którą badaliśmy w ust. 15-ym. Jeżeli tedy wierzchołek P stożka Γ^5 leży na prostej $W W_1$ (wzgl. $W W_2$), przez którą przechodzi płaszczyzna τ , to z pięciu stycznych z P poprowadzonych do krzywej K_5 , trzy styczne zjednoczyły się (ust. 15) na prostej $W W_1$ (wzgl. $W W_2$). Ponieważ τ jest dowolną płaszczyzną, przechodzącą przez wymienioną prostą, przeto: element $W W_1$ (wzgl. $W W_2$) jest *tworzącą potrójną* uważanego stożka Γ^5 . W tym szczególnym przypadku stożek Γ^5 rzędu 5-go, z tworzącą potrójną np. $P W_1 = W W_1$ i z dwiema tworzącymi podwójniami $P W_2$ i d , jest klasy 10-ej i rodzaju 1-go. — Skoro wierzchołek P stożka Γ^5 leży na prostej $W_1 W_2$, przez którą przechodzi pomocnicza płaszczyzna τ , to z pięciu stycznych, wykreślonych z punktu P do krzywej K_5 , cztery (ust. 15) zjednoczyły się na prostej $W_1 W_2$. Element $W_1 W_2$ jest wówczas *tworzącą poczwórną* stożka Γ^5 . Stożek ten jest klasy 8-ej i rodzaju 0 (jedno-bieżny).

Niechaj wierzchołek P leży na prostej głównej np. l wiązki (W) . Elementowi l podporządkowane w wiązkach (W_1) i (W_2) są (ust. 2) na płaszczyznach głównych λ_1 i λ_2 leżące dwa rzutowe pęki prostych, a proste, które przechodzą przez P i przecinają homologiczne elementy tych pęków, tworzą stożek 2-go stopnia. Badany stożek Γ^5 rozpada się na ten stożek 2-go stopnia i na stożek rzędu 3-go. — Niechaj wierzchołek P leży teraz na prostej głównej np. x_1 wiązki (W_1) . Prostym głównym x_1 i x_2 wiązek (W_1) i (W_2) podporządkowany jest w wiązce (W) pęk prostych, leżących na płaszczyźnie głównej ξ . Każda prosta, przechodząca przez P i przynależna do płaszczyzny $P x_2$, przecina trzy homologiczne proste x_1 , x_2 i element pęku $(W)_\xi$ danych trzech wiązek. Stożek Γ^5 rozpada się zatem na pęk prostych, o wierzchołku P i płaszczyźnie podstawowej $P x_2$, oraz na stożek rzędu 4-go.

Niechaj P leży na krzywej skośnej S_{01}^4 i jest (ust. 14) punktem $P = a a_1$ przecięcia się prostych a i a_1 wiązek (W) i (W_1) , którym podporządkowana jest prosta a_2 w wiązce (W_2) . Ponieważ każda prosta pęku $(P)_a$, o płaszczyźnie podstawowej $\alpha = P a_2$ przecina trójkę a , a_1 , a_2 , przeto stożek Γ^5 rozpada się na pęk $(P)_a$ i na stożek 4-go rzędu. Podobne zależności wystąpiłyby, gdyby P był punktem $P = a a_2$ krzywej skośnej S_{02}^4 . Jeżeli zaś P jest punktem $P = a_1 a_2$ krzywej skośnej S_{12}^3 , to z łatwością stwierdzimy (ust. 14), że stożek 5-go rzędu Γ^5 rozpadnie się

na pęk prostych $(P)_\beta$, o płaszczyźnie podstawowej $\beta = Pa$, i na podwójnie liczony stożek 2-go stopnia Γ^2 , którego tworzącymi są dwusieczne krzywej S_{12}^3 . A zatem:

Skoro pomiędzy prostemi wiązki (W) , oraz prostemi każdej z dwóch kolineacyjnych wiązek (W_1) i (W_2) ustanowimy przekształcenia kwadratowe, to wówczas: dowolny punkt P — nie schodzący się z żadnym z trzech różnych od siebie wierzchołków W, W_1 i W_2 tych wiązek — jest wierzchołkiem stożka 5-go rzędu Γ^5 , którego każda tworząca przecina trzy homologiczne proste danych wiązek.

Jeżeli wierzchołek P nie leży na żadnej z trzech krzywych skośnych (ust. 14) S_{01}^4, S_{02}^4 i S_{12}^3 , to: stożek Γ^5 jest klasy 14-ej rodzaju 3-go i posiada trzy tworzące podwójne, którymi są proste PW_1, PW_2 i dwusieczna d krzywej skośnej 3-go rzędu S_{12}^3 .

Jeżeli P leży na prostej $W W_1$ (wzgl. $W W_2$), to stożek Γ^5 rzędu 5-go, z potrójną tworzącą $W W_1$ (wzgl. $W W_2$) i dwiema tworzącymi podwójnymi d i $P W_2$ (wzgl. $P W_1$), jest klasy 10-ej i rodzaju 1-go.

Jeżeli wierzchołek P leży na prostej $W_1 W_2$, to stożek Γ^5 z podwójną tworzącą $W_1 W_2$ jest klasy 8-ej i rodzaju 0.

Jeżeli P leży na prostej głównej wiązki (W) , to stożek Γ^5 rozpada się na stożek 2-go stopnia i stożek 3-go rzędu. Jeżeli zaś P leży na prostej głównej wiązki (W_1) lub

Skoro pomiędzy prostemi układu płaskiego (ω) , oraz prostemi każdego z dwóch kolineacyjnych układów płaskich (ω_1) i (ω_2) ustanowimy przekształcenia kwadratowe, to wówczas: na dowolnej płaszczyźnie π — nie schodzącej się z żadną z trzech różnych od siebie podstaw ω, ω_1 i ω_2 tych układów — leży krzywa 5-ej klasy C_5 , której każda styczna przecina trzy homologiczne proste danych układów.

Jeżeli płaszczyzna π nie przynależy do żadnej z trzech (ust. 14) powierzchni rozwijalnych $\Sigma_{01}^4, \Sigma_{02}^4$ i Σ_{12}^3 , to: krzywa C_5 jest rzędu 14-go, rodzaju 3-go i posiada trzy styczne podwójne, którymi są proste $\pi \omega_1, \pi \omega_2$ i prosta dwupłaszczyznowa d powierzchni rozwijalnej 3-ej klasy Σ_{12}^3 .

Jeżeli π przynależy do prostej $\omega \omega_1$ (wzgl. $\omega \omega_2$), to krzywa C_5 klasy 5-ej, z potrójną styczną $\omega \omega_1$ (wzgl. $\omega \omega_2$) i dwiema stycznymi podwójnymi d i $\omega \omega_2$ (wzgl. $\omega \omega_1$), jest rzędu 10-go i rodzaju 1-go.

Jeżeli płaszczyzna π przynależy do prostej $\omega_1 \omega_2$, to krzywa C_5 z podwójną styczną $\omega_1 \omega_2$ jest rzędu 8-go i rodzaju 0.

Jeżeli π przechodzi przez prostą główną układu (ω) , to krzywa C_5 rozpada się na stożkową i na krzywą 3-ej klasy. Jeżeli zaś π przechodzi przez prostą główną układu

(W_2) , to Γ^5 rozpada się na pęk prostych i na stożek 4-go rzędu.

Jeżeli wierzchołek P leży na krzywej skośnej S_{01}^4 lub S_{02}^4 , to stożek Γ^5 rozpada się na pęk prostych i na stożek 4-go rzędu.

Jeżeli zaś P leży na krzywej skośnej S_{12}^3 , to stożek Γ^5 rozpada się na pęk prostych i na podwójnie liczony stożek 2-go stopnia, którego tworzącymi są dwusieczne krzywej S_{12}^3 .

(ω_1) lub (ω_2) , to C_5 rozpada się na pęk prostych i na krzywą 4-ej klasy.

Jeżeli płaszczyzna π jest styczną do powierzchni rozwijalnej Σ_{01}^4 lub Σ_{02}^4 , to krzywa C_5 rozpada się na pęk prostych i na krzywą 4-ej klasy.

Jeżeli zaś π jest płaszczyzną styczną powierzchni rozwijalnej Σ_{12}^3 , to krzywa C_5 rozpada się na pęk prostych i na podwójnie liczoną stożkową, której stycznymi są proste dwupłaszczyznowe powierzchni Σ_{12}^3 .

17. Trzy proste a, a_1 i a_2 , stanowiące dowolną trójkę homologicznych elementów wiązek $(W), (W_1)$ i (W_2) , które spełniają relację (8) ust. 14-go, — są w ogólności prostymi skośnymi. Proste p , przecinające trójkę a, a_1 i a_2 , przynależą do powierzchni skośnej 2-go stopnia. Jeżeli prosta a będzie elementem zmiennym w wiązce (W) , to ogół takich prostych p utworzy wówczas kompleks prostych.

Z rozważań ust. 15-go wiadomo nam, że te proste badanego kompleksu, które leżą na dowolnej płaszczyźnie τ , utworzą w ogólności krzywą kompleksu K_5 klasy 5-ej. Z rozważań ust. 16-go wynika, że te proste kompleksu, które przechodzą przez dowolny punkt P , utworzą w ogólności stożek kompleksu Γ^5 rzędu 5-go. Wnosimy stąd, że badany kompleks prostych jest stopnia 5-go.

O ile płaszczyzna τ nie przechodzi przez żaden wierzchołek danych wiązek, to (ust. 15) krzywa kompleksu K_5 jest 14-go rzędu, 3-go rodzaju i posiada trzy styczne podwójne, którymi są dwusieczne krzywej skośnej 3-go rzędu S_{12}^3 . Z łatwością stwierdzimy jednak, że dwusieczna c krzywej S_{12}^3 jest styczną podwójną dla wszystkich krzywych kompleksu, które leżą na płaszczyznach τ pęku o osi c . Wnosimy stąd, że element c jest prostą podwójną badanego kompleksu.

O ile wierzchołek P stożka kompleksu nie leży na żadnej z prostych $W W_1, W W_2$ i $W_1 W_2$, ani na żadnej prostej głównej danych wiązek, ani też na żadnej z krzywych skośnych S_{01}^4, S_{02}^4 i S_{12}^3 , to (ust. 16) wówczas stożek kompleksu Γ^5 rzędu 5-go jest 14-ej klasy, 3-go rodzaju i posiada trzy tworzące podwójne, którymi są proste $P W_1, P W_2$ i dwusieczna d krzywej skośnej S_{12}^3 . Skoro wierzchołek P poruszać się będzie po prostej: a) $P W_1$, b) $P W_2$ lub c) po dwusiecznej d , to z łatwością stwierdzimy, że wymieniona pod a), b) lub c) prosta będzie stale tworzącą podwójną dla wszystkich stożków kompleksu. Owe trzy proste są zatem prostymi podwójnymi badanego kompleksu.

Z uwagi na to, że na dowolnej płaszczyźnie τ leżą trzy proste podwójne badanego kompleksu, a przez dowolny punkt P przechodzą też trzy proste podwójne tego kompleksu, przeto ogół tych prostych podwójnych tworzy kongruencję 3-ej klasy i 3-go rzędu. Kongruencja ta rozpada się jednak (ust. 14) na wiązkę prostych (W_1) , wiązkę (W_2) i na kongruencję 1-go rzędu i 3-ej klasy dwusiecznych krzywej skośnej S_{12}^3 .

Zauważyć należy, że dowolna prosta wiązki (W) jest prostą kompleksu, gdyż (ust. 14) przecina trzy homologiczne proste danych wiązek (W) , (W_1) i (W_2) . Punkty W , W_1 i W_2 są punktami głównymi¹⁾ badanego kompleksu.

Skoro płaszczyzna τ przechodzi przez prostą $W W_1$, wzgl. $W W_2$ lub $W_1 W_2$, to dla odnośnych krzywych kompleksu prosta $W W_1$ (wzgl. $W W_2$) jest (ust. 15) styczną potrójną, a prosta $W_1 W_2$ jest styczną poczwórną. Podobnie, gdy wierzchołek P leży na wymienionych prostych, to dla odnośnych stożków kompleksu prosta $W W_1$ (wzgl. $W W_2$) jest (ust. 16) tworzącą potrójną, a prosta $W_1 W_2$ tworzącą poczwórną. Możemy tedy elementy $W W_1$ i $W W_2$ nazwać prostami potrójnymi, a prostą $W_1 W_2$ prostą poczwórną badanego kompleksu.

A zatem dochodzimy do następujących twierdzeń:

Skoro pomiędzy prostami wiązki (W) , oraz prostami każdej z dwóch kolineacyjnych wiązek (W_1) i (W_2) — których wierzchołkami są trzy dowolne i różne od siebie punkty W , W_1 i W_2 — ustanowimy przekształcenia kwadratowe, to wówczas: ogół prostych, z których każda przecina trzy homologiczne proste tych wiązek, utworzy kompleks 5-go stopnia.

Wszystkie proste wiązki (W) są prostami tego kompleksu. Proste podwójne tego kompleksu wyznaczają kongruencję 3-go rzędu i 3-ej klasy, która rozpada się na dwie wiązki (W_1) i (W_2) , oraz na kongruencję dwusiecznych krzywej skośnej 3-go rzędu S_{12}^3 . Wierzchołki danych wiązek są punktami głównymi, proste $W W_1$ i $W W_2$ są prostami potrójnymi, a prosta $W_1 W_2$ jest prostą poczwórną tego kompleksu.

Prawdziwe są również twierdzenia (p. ust. 14—16), dwoiście odpowiadające poprzednim:

Skoro pomiędzy prostami układu płaskiego (ω) , oraz prostami każdego z dwóch kolineacyjnych układów płaskich (ω_1) i (ω_2) — których podstawami są trzy dowolne i różne od siebie płaszczyzny ω , ω_1 i ω_2 —

¹⁾ Th. Reye, l. c. Bd. III, p. 2, nazywa punktem głównym (Hauptpunkt) kompleksu taki punkt, który jest wierzchołkiem wiązki prostych, należących do tego kompleksu. Podobnie płaszczyzną główną (Hauptebene) kompleksu nazywa podstawą układu płaskiego, którego wszystkie proste należą do tego kompleksu.

ustanowimy przekształcenia kwadratowe, to wówczas: ogół prostych, z których każda przecina trzy homologiczne proste tych układów, utworzy kompleks 5-go stopnia.

Wszystkie proste układu (ω) są prostami tego kompleksu. Proste podwójne tego kompleksu utworzą kongruencję 3-ej klasy i 3-go rzędu, która rozpada się na dwa układy (ω_1) i (ω_2) , oraz na kongruencję prostych dwupłaszczyznowych powierzchni rozwijalnej 3-ej klasy Σ_{12}^3 . Podstawy danych układów są płaszczyznami głównymi, proste $\omega \omega_1$ i $\omega \omega_2$ są prostami potrójnymi, a prosta $\omega_1 \omega_2$ jest prostą poczwórną tego kompleksu.

18. Pomiedzy prostami czterech wiązek (W) i (W_1) , dla $\tau = 1, 2, 3$, których wierzchołkami są cztery dowolne i różne od siebie punkty W i W_1 , niechaj zachodzą zależności:

$$(W_1) \times (W_2) \times (W_3), (W) \pi^2 (W_1), (W) \pi^2 (W_2), (W) \pi^2 (W_3) \dots \quad (10)$$

wymienione pod (1b), (2b) i (3b) w ust. 2-im. Cztery proste a, a_1, a_2 i a_3 , stanowiące dowolną czwórkę homologicznych elementów tych wiązek, są w ogólności prostami skośnymi i nie leżą na tej samej powierzchni skośnej 2-go stopnia. Wobec tego istnieją dwie takie proste p , które przecinają ową czwórkę prostych. Skoro prosta a będzie elementem zmiennym w wiązce (W) , to ogół takich prostych p utworzy wówczas kongruencję prostych.

Celem wyznaczenia klasy tej kongruencji, przetnijmy dane wiązki dowolną płaszczyzną τ , nie przechodzącą przez wierzchołki W i W_1 . Z relacji (10) i ust. 2-go wynika wprost, że pomiędzy punktami czterech w ten sposób otrzymanych układów płaskich zachodzą zależności:

$$(\tau_1) \times (\tau_2) \times (\tau_3), (\tau) \pi^2 (\tau_1), (\tau) \pi^2 (\tau_2), (\tau) \pi^2 (\tau_3).$$

Układy te posiadają (ust. 8) dziewięć czwórek homologicznych punktów, z których każda czwórka np. $A A_1 A_2 A_3$ leży na jednej prostej t . Element t przecina zatem cztery proste a, a_1, a_2 i a_3 danych wiązek i należy do badanej kongruencji. Ponieważ na dowolnej płaszczyźnie τ leży 9 takich prostych t , przeto omawiana kongruencja prostych jest klasy 9-ej.

Aby wyznaczyć rząd tej kongruencji, weźmy pod uwagę kompleks prostych Γ_{012} stopnia 5-go, którego proste (ust. 17) przecinają trójki homologicznych prostych wiązek (W) , (W_1) i (W_2) . Jeżeli przez d oznaczmy dwusieczną krzywej S_{12}^3 , przechodzącą przez dany punkt P , to dla kompleksu Γ_{012} jego stożek kompleksu o wierzchołku P jest (ust. 16) w ogólności rzędu 5-go i posiada trzy tworzące podwójne $P W_1$, $P W_2$ i d . Uwzględnić musimy nadto kompleks prostych Γ_{123} stopnia 3-go,

którego proste¹⁾ przecinają trójki homologicznych prostych trzech kolineacyjnych wiązek (W_1), (W_2) i (W_3), oraz jego stożek kompleksu o wierzchołku P , który jest rzędu 3-go i posiada trzy tworzące PW_1 , PW_2 i d . Owe dwa stożki o wspólnym wierzchołku P przecinają się — oprócz w trzech podwójnie liczonych tworzących PW_1 , PW_2 i d — jeszcze w $(5 \cdot 3 - 6) = 9$ -ciu dalszych tworzących. Każda z trzech prostych PW_1 , PW_2 i d przecina (ust. 14) dwie trójki homologicznych prostych np. $a_1 a_2$ i $b_1 b_2$ wiązek (W), (W_1), (W_2) i jest w ogólności skośną względem prostych a_3 i b_3 wiązki (W_3); natomiast każda z tych prostych, jako tworząca wymienionego powyżej stożka kompleksu 3-go rzędu, przecina trójkę homologicznych prostych np. $c_1 c_2 c_3$ kolineacyjnych wiązek (W_1), (W_2) i (W_3). Trzy proste PW_1 , PW_2 i d nie należą zatem do badanej kongruencji.

Przypuśćmy, że jedna — oczywiście różna od prostej d — z dalszych 9-ciu wspólnych tworzących dwóch stożków kompleksu odpow. rzędu 5-go i 3-go, przecina: jako tworząca pierwszego stożka trzy proste np. e , e_1 i e_2 , a jako tworząca drugiego stożka przecina trzy proste np. f , f_1 i f_2 . Tworząca ta musiałaby być zatem krawędzią przecięcia się homologicznych płaszczyzn $a_1 = e_1 f_1$ i $a_2 = e_2 f_2$ kolineacyjnych wiązek (W_1) i (W_2), a temsamem dwusieczną $a = a_1 a_2$ krzywej S_{12}^3 . Z uwagi na to, że kongruencja dwusiecznych krzywej S_{12}^3 jest 1-go rzędu, przeto przechodząca przez P prosta $a = a_1 a_2$ zjednoczyć się musi z wymienioną poprzednio dwusieczną d . Założenie nasze doprowadziło zatem do sprzeczności. Wnosimy stąd, że, o ile jedna z owych 9-ciu wspólnych tworzących przecina np. trójkę prostych $e e_1 e_2$, musi zarazem (jako tworząca stożka 3-go rzędu) przecinać trójkę prostych $e_1 e_2 e_3$. Innymi słowy: ta prosta należy do badanej kongruencji, gdyż przecina cztery proste e , e_1 , e_2 i e_3 . Dowiedliśmy zatem, że przez dowolny punkt P przechodzi 9 prostych kongruencji, czyli badana kongruencja prostych jest rzędu 9-go.

Uwaga. Rząd tej kongruencji mogliśmy też wyznaczyć bezpośrednio, stosując zasadę dwoistości do ostatniego dowodu, podanego w ust. 8-ym.

Dla kompleksu prostych Γ_{123} stopnia 3-go weźmy pod uwagę jego stożek kompleksu o wierzchołku $P = W$. Ponieważ każda tworząca tego stożka przecina trójkę homologicznych prostych np. a_1 , a_2 , a_3 kolineacyjnych wiązek (W_1), (W_2) i (W_3), oraz element a wiązki (W), przeto każda tworząca tego stożka 3-go rzędu jest elementem badanej kongruencji, a jego wierzchołek $P = W$ jest punktem osobliwym 3-go stopnia tej kongruencji.

¹⁾ Fr. Kliem, l. c. str. 20 — 22.

Dla kompleksu Γ_{012} stopnia 5-go weźmy pod uwagę stożek kompleksu o wierzchołku $P = W_3$. Każda tworząca tego stożka przecina trzy proste homologiczne np. a , a_1 i a_2 wiązek (W), (W_1) i (W_2), a nadto, jako element wiązki (W_3), również i prostą a_3 . Każda tworząca tego stożka 5-go rzędu przynależy zatem do badanej kongruencji, a wierzchołek $P = W_3$ jest punktem osobliwym 5-go stopnia tej kongruencji. W podobny sposób, uzględniając dwa dalsze kompleksy prostych 5-go stopnia Γ_{023} i Γ_{031} , których proste przecinają trójki homologicznych prostych danych wiązek (W), (W_2) i (W_3), wzgl. (W), (W_3) i (W_1) — wykazać możemy, że: wierzchołki W_1 i W_2 są też punktami osobliwymi 5-go stopnia badanej kongruencji. A zatem:

Skoro pomiędzy prostymi wiązki (W), oraz prostymi każdej z trzech kolineacyjnych wiązek (W_1), $\iota = 1, 2, 3$ — których wierzchołkami są cztery dowolne i różne od siebie punkty W i W_ι — ustanowimy przekształcenia kwadratowe, to wówczas: ogół prostych, z których każda przecina cztery homologiczne proste tych wiązek, utworzy kongruencję 9-go rzędu i 9-ej klasy.

Wierzchołek W jest punktem osobliwym 3-go stopnia, a każdy z wierzchołków W_1 , W_2 i W_3 jest punktem osobliwym 5-go stopnia tej kongruencji.

Z rozważań dwoistych wynika prawdziwość twierdzeń:

Skoro pomiędzy prostymi układu płaskiego (ω), oraz prostymi każdego z trzech kolineacyjnych układów płaskich (ω_ι), $\iota = 1, 2, 3$, — których podstawami są cztery dowolne i różne od siebie płaszczyzny ω i ω_ι — ustanowimy przekształcenia kwadratowe, to wówczas: ogół prostych, z których każda przecina cztery homologiczne proste tych układów, utworzy kongruencję 9-ej klasy i 9-go rzędu.

Podstawa ω jest płaszczyzną osobliwą 3-go stopnia, a każda z podstaw ω_1 , ω_2 i ω_3 jest płaszczyzną osobliwą 5-go stopnia tej kongruencji.

19. Poszczególne proste a_0 , b_0 , ... kongruencji 9-go rzędu i 9-ej klasy, badanej w ustępie 18-ym, niechaj przecinają odpow. czwórki homologicznych prostych: a , a_1 , a_2 , a_3 ; b , b_1 , b_2 , b_3 ; ... danych wiązek (W) i (W_ι), $\iota = 1, 2, 3$. Wiadomo nam¹⁾, że proste a_0 , b_0 , ... tej kongruencji, które przecinają dowolnie przyjętą prostą p^* , utworzą powierzchnię skośną Ψ stopnia $(9 + 9) = 18$ -go, dla których element p^* jest 9-ciokrotną kierownicą. — Skoro uwzględnimy ogół tworzących a_0 , b_0 , ... powierzchni Ψ , to zbadać możemy miejsca geometryczne:

- a) prostych a , b , ... wiązki (W).
- b) prostych a_ι , b_ι , ... ($\iota = 1, 2, 3$) wiązki (W_ι).

¹⁾ R. Sturm, Die Gebilde ersten u. zweiten Grades d. Liniengeometrie in synthetischer Behandlung, Leipzig 1892, I Th., Nr. 34.

W tym celu weźmy pod uwagę w wiązce (W) dowolny pęk prostych $W(d, e, \dots)_\delta$, leżący na dowolnie przyjętej płaszczyźnie δ . Homologiczne proste $d, e, \dots$ kolineacyjnych wiązek (W_i) leżą (p. relacja (10) ust. 18-go i ust. 2) odpow. na stożkach 2-go stopnia Δ_i^2 , przyczem zachodzą rzutowości:

$$W(d, e, \dots)_\delta \bar{\wedge} \Delta_1^2(d_1, e_1, \dots) \bar{\wedge} \Delta_2^2(d_2, e_2, \dots) \bar{\wedge} \Delta_3^2(d_3, e_3, \dots).$$

Proste, które przecinają homologiczne proste tych pęków, tworzą¹⁾ powierzchnię skośną Φ stopnia $2(1+2+2+2)=14$ -go. Ponieważ prosta p^* przecina 14 tworzących powierzchni Φ , a przez każdy punkt przecięcia się płaszczyzny δ z owymi 14-oma tworzącymi przechodzi jedna prosta pęku (W) $_\delta$, przeto dowiedliśmy²⁾, że: w przypadku a) miejscem geometrycznym prostych $a, b, \dots$ wiązki (W) jest stożek 14-go rzędu Γ^{14} .

Zalóżmy teraz, że płaszczyzna podstawowa δ pomocniczego pęku (W) $_\delta$ przechodzi przez prostą główną np. l wiązki (W). Otrzymamy wówczas (ust. 2) rzutowe pęki prostych:

$$W(d, e, \dots)_\delta \bar{\wedge} W_1(d_1, e_1, \dots)_{\delta_1} \bar{\wedge} W_2(d_2, e_2, \dots)_{\delta_2} \bar{\wedge} W_3(d_3, e_3, \dots)_{\delta_3} \dots \quad (11)$$

których podstawami są homologiczne płaszczyzny δ i δ_i uważanych wiązek, przechodzące odpow. przez proste główne l i x_i . Proste, przecinające czwórki homologicznych prostych tych pęków, tworzą³⁾ powierzchnię skośną Φ^8 stopnia 8-go. Uwzględnić musimy nadto, że prostej głównej l podporządkowane są w wiązkach (W_i) trzy rzutowe pęki prostych

$$W_1(f_1, \dots) \bar{\wedge} W_2(f_2, \dots) \bar{\wedge} W_3(f_3, \dots),$$

leżące odpow. na płaszczyznach głównych λ_1, λ_2 i λ_3 tych wiązek. Proste, przecinające trójki homologicznych prostych tych pęków, tworzą³⁾ kongruencję 3-go rzędu i 3-ej klasy. Proste zaś tej kongruencji, które przecinają prostą główną l , przynależą do powierzchni skośnej Φ_l stopnia $(3+3)=6$ -go, dla której l jest 3-krotną kierownicą. Rozważana poprzednio powierzchnia 14-go stopnia Φ rozpada się w tym przypadku na powierzchnię 8-go stopnia Φ^8 i na powierzchnię 6-go stopnia Φ_l . Prosta p^* przecina 8 tworzących powierzchni Φ^8 i 6 tworzących powierzchni Φ_l ,

¹⁾ A. Plamitzer, Sätze über die Treffgeraden projektiver Strahleninvoluntionen höheren Grades, deren Träger unikursale Gebilde sind, Sitzungsber. d. Akademie d. Wissenschaften, Wien 1917, Bd. 126 (Abt. IIa) Nr. 13 (dla $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = v_1 = 1, v_2 = v_3 = v_4 = 2$).

²⁾ F. Klemm, l. c. na str. 31-ej podaje analogiczny dowód dla stożka 8-go rzędu.

³⁾ R. Sturm, l. c. Bd. I. Nr. 257.

a przez $(8+6)=14$ punktów przebiecia się tych tworzących z płaszczyzną podstawową δ przechodzi tyleż prostych pęku (W) $_\delta$, które są tworzącymi stożka Γ^{14} rzędu 14-go. Ponieważ jednak 6 tworzących powierzchni Φ_l przecina jej kierownicę l — leżącą na płaszczyźnie δ — w sześciu punktach, przeto 6 tworzących stożka Γ^{14} zjednoczyło się na prostej głównej l . Z uwagi na to, że δ jest dowolną płaszczyzną, przechodzącą przez l , przeto element l jest 6-ciokrotną tworzącą stożka Γ^{14} . W podobny sposób wykazemy, iż dwie dalsze proste główne m i n wiązki (W) są też 6-ciokrotnymi tworzącymi stożka Γ^{14} .

Stosując analogiczne rozważania do pęku prostych $W_1(d_1, f_1, \dots)$, o dowolnej podstawie δ_1 , oraz do homologicznych pęków w trzech pozostałych wiązkach (W), (W_2) i (W_3), dochodzimy do rzutowości:

$$\Delta^2(d, f, \dots) \bar{\wedge} W_1(d_1, f_1, \dots) \bar{\wedge} W_2(d_2, f_2, \dots) \bar{\wedge} W_3(d_3, f_3, \dots).$$

Proste, przecinające homologiczne czwórki tych pęków, tworzą¹⁾ powierzchnię skośną Φ_1 stopnia $2(2+1+1+1)=10$ -go. Prosta p^* przecina tedy 10 tworzących powierzchni Φ_1 , a przez każdy punkt przebiecia się tych tworzących z płaszczyzną δ_1 przechodzi jedna prosta pęku $W_1(d_1, f_1, \dots)$. Innymi słowy: w przypadku b) miejscem geometrycznym prostych $a, b, \dots$ jest stożek 10-go rzędu Γ_1^{10} .

Niechaj płaszczyzna δ_1 przechodzi przez prostą główną np. x_1 wiązki (W_1). Oprócz relacji (11) uwzględnić musimy teraz pęk prostych (W) $_\xi$ leżący na płaszczyźnie głównej ξ wiązki (W), oraz homologiczne proste główne x_1, x_2 i x_3 trzech kolineacyjnych wiązek (W_i). Powierzchnia 10-go stopnia Φ_1 rozpada się w tym przypadku na powierzchnię skośną 8-go stopnia Φ^8 i na powierzchnię skośną drugiego stopnia Φ^2 , której tworzące przecinają proste x_1, x_2, x_3 i podporządkowane im proste pęku (W) $_\xi$. Prosta p^* przecina 8 tworzących powierzchni Φ^8 i 2 tworzące powierzchni Φ^2 . Płaszczyzna podstawowa δ_1 — przechodząca przez prostą główną x_1 — przecina te tworzące w $8+2$ punktach, przyczem dwa ostatnie punkty są punktami przebiecia się tworzących powierzchni Φ^2 i leżą na jej kierownicy x_1 . Proste pęku $W_1(d_1, f_1, \dots)$ o podstawie δ_1 , przechodzące przez owe punkty, są tworzącymi badanego stożka 10-go rzędu Γ_1^{10} . Ponieważ jednak z pośród owych $8+2$ tworzących dwie ostatnie zjednoczyły się z elementem x_1 , a δ_1 jest dowolną płaszczyzną przechodzącą przez x_1 , przeto: prosta główna x_1 wiązki (W_1) jest tworzącą podwójną stożka Γ_1^{10} . — W podobny sposób wykazemy, że dwie dalsze proste główne y_1 i z_1 wiązki (W_1) są też tworzącymi podwójnymi tego stożka.

¹⁾ A. Plamitzer, l. c., Nr. 13.

Stosując analogiczne rozważania do wiązek (W_2) i (W_3), otrzymamy dwa dalsze stożki 10-go rzędu Γ_2^{10} i Γ_3^{10} . A zatem:

Skoro przez $a_0, b_0, \dots$ oznaczymy te proste kongruencji 9-go rzędu i 9-ej klasy (ust. 18), które przecinają dowolnie przyjętą prostą p^* i odp. poszczególne czwórki homologicznych prostych: $a, a_1, a_2, a_3; b, b_1, b_2, b_3; \dots$ wiązek (W) i (W_i) — spełniających ($i = 1, 2, 3$) relację (10) ust. 18-go — to wówczas:

a) proste $a, b, \dots$ wiązki (W) leżą na stożku Γ^{14} rzędu 14-go, dla którego trzy proste główne l, m i n wiązki (W) są tworzącymi sześciokrotnymi.

b) proste $a, b, \dots$ wiązki (W_i) leżą na stożku Γ_i^{10} rzędu 10-go, dla którego proste główne x_i, y_i i z_i wiązki (W_i) są tworzącymi podwójnymi.

Zauważyć wkońcu należy, że stożek Γ^{14} , należący do wiązki (W), przekształca się (ust. 2) na mocy relacji (W) $\pi^2(W_i)$ — na stożek 28-go rzędu, który rozpada się na trzy sześciokrotnie liczone płaszczyzny główne λ, μ, ν wiązki (W_i), oraz na stożek 10-go rzędu Γ_i^{10} , z trzema tworzącymi podwójnymi x_i, y_i i z_i . Podobnie stożek Γ_i^{10} przekształca się na stożek 20-go rzędu, który rozpada się na trzy podwójnie liczone płaszczyzny główne ξ, η i ζ wiązki (W), oraz na stożek Γ^{14} rzędu 14-go, z trzema sześciokrotnie tworzącymi l, m i n .

W myśl zasady dwoistości w przestrzeni prawdziwe jest twierdzenie:

Skoro pomiędzy prostymi układu płaskiego (ω), oraz prostymi każdego z trzech kolineacyjnych układów płaskich (ω_i), $i = 1, 2, 3$, — których podstawami są dowolne i różne od siebie płaszczyzny ω i ω_i — ustanowimy przekształcenia kwadratowe,

a) przez $a_0, b_0, \dots$ oznaczymy te proste kongruencji 9-ej klasy i 9-go rzędu, będącej (ust. 18) utworem tych układów, które przecinają dowolnie przyjętą prostą p^* i odpow. poszczególne czwórki homologicznych prostych: $a, a_1, a_2, a_3; b, b_1, b_2, b_3; \dots$ układów (ω) i (ω_i), to wówczas:

a) proste $a, b, \dots$ układu (ω) są stycznymi krzywej 14-ej klasy C_{14} , dla której proste główne l, m i n układu (ω) są stycznymi sześciokrotnymi.

b) proste $a, b, \dots$ układu (ω_i) są stycznymi krzywej 10-ej klasy C_{10} , dla której proste główne x_i, y_i i z_i układu (ω_i) są stycznymi podwójnymi.

20. Korzystając z rozważań poprzedniego ustępu, dowieść możemy prawdziwości twierdzenia:

Skoro pomiędzy prostymi wiązki (W), oraz prostymi każdego z czterech kolineacyjnych wiązek (W_i), $i = 1, 2, 3, 4$ — których wierzchołkami są dowolne i różne od siebie punkty W, W_i — ustanowimy przekształcenia kwadratowe, to wówczas: ogół prostych, z których każda przecina pięć homologicznych prostych tych wiązek, utworzy powierzchnię skośną 28-go stopnia.

Aby wyznaczyć stopień tej powierzchni Ω , skonstruować należy punkty przebicia się dowolnej prostej p^* z tą powierzchnią. Wiadomo nam, że proste $a_0, b_0, \dots$ przecinające p^* i poszczególne czwórki homologicznych prostych $a, a_1, a_2, a_3, b, b_1, b_2, b_3, \dots$ wiązek (W), (W_1), (W_2) i (W_3), przynależą (ust. 19) do powierzchni skośnej Ψ stopnia 18-go, dla której p^* jest 9-ciokrotną kierownicą. Ponieważ wymienione powyżej proste $a, b, \dots$ ($i = 1, 2, 3$) wiązki (W_i) leżą na stożku 10-go rzędu Γ_i^{10} , przeto z kolineacji wiązek (W_i) i (W_4) wynika, że podporządkowane owym prostym elementy $a_4, b_4, \dots$ wiązki (W_4) są tworzącymi stożka Γ_4^{10} rzędu 10-go. — Każdej tworzącej a_0 powierzchni Ψ podporządkujemy, za pośrednictwem czwórki prostych a, a_1, a_2, a_3 , jedną i tylko jedną tworzącą a_4 stożka Γ_4^{10} , i naodwrot każdej tworzącej a_4 tego stożka jedną ściśle określoną tworzącą a_0 powierzchni Ψ , tę mianowicie, która przecina proste a, a_1, a_2 i a_3 . W ustalonej odpowiedniości [1,1]-znacznej pomiędzy tworzącymi powierzchni Ψ i Γ_4^{10} , które są odpow. rzędu 18-go i 10-go, istnieje¹⁾ $(18 + 10) = 28$ par homologicznych tworzących c_0 i $c_4, \dots$, z których każda para się przecina. Tworząca np. c_0 powierzchni skośnej Ψ przecina tedy czwórkę prostych c, c_1, c_2 i c_3 , oraz prostą homologiczną c_4 (stożka Γ_4^{10}) i leży na badanej powierzchni Ω . Ponieważ jednak każda z owych 28 tworzących $c_0, \dots$ powierzchni Ψ przecinać musi jej 9-krotną kierownicę p^* , przeto dowolnie przyjęta prosta p^* przebija powierzchnią Ω w 28 punktach, a temsamem powierzchnia ta jest 28-go stopnia, c. b. d. w.

Z rozważań dwoistych wynika prawdziwość twierdzenia:

Skoro pomiędzy prostymi układu płaskiego (ω), oraz prostymi każdego z czterech kolineacyjnych układów płaskich (ω_i), $i = 1, 2, 3, 4$ — których podstawami są dowolne i różne od siebie płaszczyzny ω i ω_i — ustanowimy przekształcenia kwadratowe, to wówczas: ogół prostych, z których każda przecina pięć homologicznych prostych tych układów, utworzy powierzchnię skośną 28-go stopnia.

21. Skoro uwzględnimy ogół tworzących $c_0, d_0, \dots$ powierzchni skośnej Ω , które przecinają odpow. piątki homologicznych prostych $a, a_1, a_2, a_3, a_4; b, b_1, b_2, b_3, b_4; \dots$ wiązek (W) i (W_i), to zbadać możemy miejsca geometryczne:

a) prostych $c, d, \dots$ wiązki (W).

b) prostych $c, d, \dots$ ($i = 1, 2, 3, 4$) wiązki (W_i).

¹⁾ A. Plamitzer, Ueber mehrdeutige Verwandtschaften auf unikursalen Trägern, Prace matem.-fizyczne, Tom XXX. Warszawa 1919, Nr. 2.

W tym celu weźmy pod uwagę w wiązce (W) dowolny pęk prostych $W(a, b, \dots)_8$, któremu podporządkowane są (ust. 2) w wiązce (W) rzutowe pęki prostych

$\Delta_1^2(a_1, b_1, \dots) \bar{\wedge} \Delta_2^2(a_2, b_2, \dots) \bar{\wedge} \Delta_3^2(a_3, b_3, \dots) \bar{\wedge} \Delta_4^2(a_4, b_4, \dots)$, których podstawami są stożki 2-go stopnia Δ^2 . Dowolnej prostej a tego pęku podporządkowana jest w kolineacyjnych wiązce (W) czwórka prostych a_1, a_2, a_3 i a_4 ; dwie proste a^* , przecinające ową czwórkę, przebiegają płaszczyzną podstawową δ tego pęku w punktach A^* , przez które przechodzą dwie proste $a' = WA^*$ pęku (W) $_{\delta}$. Elementowi a podporządkujemy owe proste a' . — Prosta a' przecina 16 takich prostych $a^*, b^*, \dots$, gdyż ogół prostych, które przecinają czwórki homologicznych prostych powyżej wypisanych pęków (Δ^2), tworzą (ust. 19) powierzchnię skośną $2(2+2+2+2) = 16$ -go stopnia. Ponieważ każdej czwórce (z pośród uzyskanych w ten sposób 16-u czwórek) homologicznych prostych wiązek (W) podporządkowaną jest w wiązce (W) jedna i tylko jedna prosta, leżąca na δ , przeto: elementowi a' podporządkowaliśmy 16 prostych $a, \dots$. Odpowiedniość [16,2]-znacząca¹⁾ pomiędzy prostymi a i a' pęku (W) $_{\delta}$ posiada 16+2 elementów zjednoczonych, a każdy z tych 18-tu elementów zjednoczonych $c = c'$ posiada tę własność, że: Prosta c^* , przecinająca proste homologiczne c_1, c_2, c_3 i c_4 wiązek (W) oraz element c' pęku (W) $_{\delta}$, przecina zarazem i element c wiązki (W), gdyż $c = c'$. Wnosimy stąd, że każda z 18-u w ten sposób otrzymanych prostych $c^*, \dots$ jest tworzącą powierzchni skośnej Ω , a elementy zjednoczone $c = c', \dots$ naszej odpowiedzi leżą na stożku 18-go rzędu Γ^{18} . W przypadku a) miejscem geometrycznym prostych $c, d, \dots$ wiązki (W) jest zatem stożek 18-go rzędu Γ^{18} .

Niechaj płaszczyzna podstawowa δ przechodzi przez prostą główną np. l wiązki (W). Wówczas pękowi prostych $W(a, b, \dots)_8$ podporządkowane są (ust. 2) rzutowe pęki prostych

$$W_1(a_1, b_1, \dots) \bar{\wedge} W_2(a_2, b_2, \dots) \bar{\wedge} W_3(a_3, b_3, \dots) \bar{\wedge} W_4(a_4, b_4, \dots),$$

które leżą odpow. na płaszczyznach δ_i , a proste, przecinające czwórki homologicznych prostych tych pęków, utworzą (ust. 19) powierzchnię skośną stopnia 8-go. W sposób analogiczny do poprzedniego, ustanowimy odpowiedniość [8,2]-znaczącą pomiędzy prostymi a i a' w pęku (W) $_{\delta}$, a elementy zjednoczone dowodzą, że na dowolnej płaszczyźnie δ leży $(8+2) = 10$ tworzących stożka Γ^{10} . — Prostej głównej l podporządkowane są w wiązce (W) cztery pęki prostych, leżące odpow. na płaszczyznach

¹⁾ Fr. Klem, l. c. na str. 32 rozważa pięć kolineacyjnych wiązek i podaje analogiczną odpowiedniość [8,2]-znaczącą.

głównych λ_i tych wiązek. Proste, przecinające czwórki homologicznych prostych tych ostatnich pęków, utworzą powierzchnię skośną Λ stopnia 8-go. Prosta l przecina Λ w 8-miu takich prostych $e^*, f^*, \dots$, z których każda np. e^* przecina elementy e_1, e_2, e_3 i e_4 wiązek (W), oraz prostą homologiczną $e = l$ wiązki (W), i jest wobec tego tworzącą powierzchni 28-go stopnia Ω . Za pośrednictwem ośmiu prostych $e^*, f^*, \dots$ skonstruowaliśmy w tym przypadku na dowolnej płaszczyźnie δ pęku (W) $_{\delta}$ ośm takich tworzących stożka Γ^{18} , które *zjednoczyły się* na prostej l . Prosta główna l wiązki (W) jest tedy 8-krotną tworzącą stożka Γ^{18} . — W podobny sposób dowiedzimy, że dwie dalsze proste główne m i n wiązki (W) są również 8-krotnymi tworzącymi stożka Γ^{18} .

Zastosujemy teraz analogiczne rozwiązania do pęku prostych $W_1(a_1, b_1, \dots)$, którego podstawą δ_1 jest dowolna płaszczyzna wiązki (W) $_{\delta}$. Pękowi temu podporządkowane są (ust. 2) w wiązce (W) pęk prostych na stożku 2-go stopnia Δ^2 , a w trzech pozostałych wiązce pęki prostych, odpow. o płaszczyznach podstawowych δ_2, δ_3 i δ_4 . Proste, które przecinają elementy homologiczne czterech ostatnich rzutowych pęków prostych, utworzą (ust. 19) powierzchnię skośną stopnia $2(2+1+1+1) = 10$ -go. W omówiony powyżej sposób ustanowimy odpowiedniość [10,2]-znaczącą pomiędzy prostymi a_1 i a'_1 pęku o wierzchołku W_1 i podstawie δ_1 , a temsamem wykażemy, że: w przypadku b) miejscem geometrycznym prostych $c_1, d_1, \dots$ wiązki (W) $_{\delta_1}$ jest stożek 12-go rzędu Γ^{12} .

Zalóżmy wkońcu, że płaszczyzna δ_1 przechodzi przez prostą główną np. x_1 wiązki (W) $_{\delta_1}$. Wówczas pękowi prostych $W_1(a_1, b_1, \dots)$ o podstawie δ_1 podporządkowane są w pozostałych wiązce rzutowe pęki proste:

$$W(a, b, \dots) \bar{\wedge} W_2(a_2, b_2, \dots) \bar{\wedge} W_3(a_3, b_3, \dots) \bar{\wedge} W_4(a_4, b_4, \dots)$$

o płaszczyznach podstawowych $\delta, \delta_2, \delta_3$ wzgl. δ_4 , a proste, przecinające homologiczne proste tych pęków, utworzą powierzchnię skośną 8-go stopnia. Pomiedzy prostymi a_1 i a'_1 pęku $W_1(a_1, b_1, \dots)$ ustanowić możemy odpowiedniość [8,2]-znaczącą, a temsamem dowieść, że na płaszczyźnie δ_1 leży $8+2 = 10$ tworzących stożka Γ^{12} . Ponadto uwzględnić musimy proste główne x_2, x_3, x_4 wiązek (W) i pęk homologicznych prostych (W) $_{\xi}$ na płaszczyźnie głównej ξ wiązki (W), oraz powierzchnię Λ^2 stopnia 2-go, której tworzące przecinają proste główne x_2, x_3, x_4 i proste pęku (W) $_{\xi}$. Prosta główna x_1 przecina dwie tworzące e^* i f^* powierzchni Λ^2 , które są tworzącymi powierzchni 28-go stopnia Ω , gdyż przecinają odpow. proste e i f pęku (W) $_{\xi}$, oraz proste główne x_1, x_2, x_3 i x_4 wiązek (W). Za pośrednictwem prostych e^* i f^* skonstruowaliśmy na płaszczyźnie δ_1 dwie takie tworzące e_1 i f_1 stożka Γ^{12} , które *zjednoczyły się*

na prostej głównej x_1 . Ponieważ δ_1 jest dowolną płaszczyzną, przechodzącą przez x_1 , przeto: prosta główna x_1 wiązki (W_1) jest tworzącą podwójną stożka Γ_1^{12} . — W ten sam sposób wykazemy, że dwie dalsze proste główne y_1 i z_1 wiązki (W_1) są też tworzącymi podwójnymi tego stożka.

Stożkowi Γ_1^{12} podporządkowane są w kolineacyjnych wiązkach (W_2), (W_3) i (W_4) również stożki 12-go rzędu Γ_2^{12} , Γ_3^{12} i Γ_4^{12} . Proste główne tych wiązek są odpow. tworzącymi podwójnymi owych stożków. A zatem:

Skoro przez $c_0, d_0, \dots$ oznaczymy poszczególne tworzące powierzchni skośnej 28-go stopnia Ω , które (ust. 20) przecinają piątki homologicznych prostych: $c, c_1, c_2, c_3, c_4; d, d_1, d_2, d_3, d_4; \dots$ wiązek (W) i (W_i), to wówczas:

a) proste $c, d, \dots$ wiązki (W) leżą na stożku 18-go rzędu Γ^{18} , dla którego proste główne l, m i n wiązki (W) są tworzącymi ośmiokrotnymi.

b) proste $c_i, d_i, \dots$ ($i = 1, 2, 3, 4$) wiązki (W_i) leżą na stożku 12-go rzędu Γ_i^{12} , dla którego proste główne x_i, y_i i z_i wiązki (W_i) są tworzącymi podwójnymi.

Uwzględniając przekształcenia kwadratowe, zachodzące pomiędzy prostymi wiązek (W) i (W_i), zauważyć należy, że: Stożek Γ^{18} przekształca się (ust. 2) na stożek 36-go rzędu, który rozpada się na trzy ośmiokrotnie liczone płaszczyzny główne λ_i, μ_i i ν_i wiązki (W_i), oraz na stożek rzędu 12-go Γ_i^{12} , z trzema tworzącymi podwójnymi x_i, y_i i z_i . Podobnie stożek Γ_i^{12} przekształca się na stożek rzędu 24-go, który rozpada się na trzy podwójnie liczone płaszczyzny główne ξ, η i ζ wiązki (W), oraz na stożek 18-go rzędu Γ^{18} , z trzema ośmiokrotnymi tworzącymi l, m i n .

W myśl zasady twoistości w przestrzeni prawdziwe jest następujące twierdzenie:

Skoro przez $c_0, d_0, \dots$ oznaczymy poszczególne tworzące powierzchni skośnej 28-go stopnia, które przecinają piątki homologicznych prostych: $c, c_1, c_2, c_3, c_4; d, d_1, d_2, d_3, d_4; \dots$ układów płaskich (ω) i (ω_i), przyjętych w ust. 20-ym, to wówczas:

a) proste $c, d, \dots$ układu płaskiego (ω) są stycznymi krzywej 18-ej klasy C_{18} , dla której proste główne l, m i n układu (ω) są stycznymi ośmiokrotnymi.

b) proste $c_i, d_i, \dots$ ($i = 1, 2, 3, 4$) układu płaskiego (ω_i) są stycznymi krzywej 12-ej klasy C_{12} , dla której proste główne x_i, y_i i z_i układu (ω_i) są stycznymi podwójnymi.

22. Korzystając z rozważań dwóch ostatnich ustępów, dowieść możemy prawdziwości twierdzenia:

Skoro pomiędzy prostymi wiązkami (W), oraz prostymi każdej z pięciu kolineacyjnych wiązek (W_i), $i = 1, 2, 3, 4, 5$ — których wierzchołkami są dowolne i różne od siebie punkty W i W_i — ustanowimy przekształcenia kwadratowe, to wówczas: istnieje 40 prostych, z których każda przecina sześć homologicznych prostych tych wiązek.

W tym celu weźmy pod uwagę powierzchnię skośną 28-go stopnia Ω , której tworzące $c_0, d_0, \dots$ przecinają (ust. 20) piątki prostych: $c, c_1, c_2, c_3, c_4; d, d_1, d_2, d_3, d_4; \dots$ wiązek (W), (W_1), (W_2), (W_3) i (W_4). Ponieważ proste np. $c_1, d_1, \dots$ wiązki (W_1) są (ust. 12) tworzącymi stożka Γ_1^{12} rzędu 12-go, przeto z kolineacji wiązek (W_1) i (W_5) wynika, że homologiczne proste $c_5, d_5, \dots$ wiązki (W_5) są też tworzącymi stożka 12-go rzędu Γ_5^{12} . Każdej tworzącej c_0 powierzchni Ω podporządkujemy — za pośrednictwem piątki prostych c, c_1, c_2, c_3, c_4 — jedną i tylko jedną tworzącą c_5 stożka Γ_5^{12} , i naodwrot, każdej tworzącej c_5 stożka Γ_5^{12} podporządkujemy jedną ściśle określoną tworzącą c_0 powierzchni Ω , tę mianowicie, która przecina proste c, c_1, c_2, c_3 i c_4 . Odpowiedniość [1,1]-znaczną pomiędzy tworzącymi c_0 i c_5 powierzchni Ω i Γ_5^{12} , które są odpow. 28-go i 12-go rzędu, posiada $(28 + 12) = 40$ par takich homologicznych tworzących c_0 i $c_5, \dots$, z których każda para (ust. 20) się przecina. Tworząca np. c_0 powierzchni Ω przecina zatem piątkę prostych c, c_1, c_2, c_3, c_4 , oraz prostą c_5 stożka Γ_5^{12} . Istnieje zatem 40 takich prostych $c_0, \dots$, z których każda przecina sześć homologicznych prostych wiązek (W) i (W_i), c. b. d. w.

Twierdzeniu temu podporządkowane jest dwoje następujące twierdzenie:

Skoro pomiędzy prostymi układu płaskiego (ω), oraz prostymi każdej z pięciu kolineacyjnych układów płaskich (ω_i), $i = 1, 2, 3, 4, 5$ — których podstawami są dowolne i różne od siebie płaszczyzny ω i ω_i — ustanowimy przekształcenia kwadratowe, to wówczas: istnieje 40 prostych, z których każda przecina sześć homologicznych prostych tych układów płaskich.

Die vorliegende Abhandlung zerfällt in vier Teile. Im ersten Teile stelle ich allgemeine Kollineationen:

$$(\omega_1) \times (\omega_2) \times (\omega_3) \times \dots \times (\omega_n) \dots \quad (1)$$

zwischen n gegebenen ebenen Punktfeldern (ω_i) , $i = 1, 2, \dots, n$, und eine allgemeine quadratische Verwandtschaft (Cremonasche Verwandtschaft vom 2-en Grade)

$$(\omega) \times^2 (\omega_1) \dots \quad (2)$$

zwischen einem gegebenen ebenen Punktfelde (ω) und dem Punktfelde (ω_1) her. Ich bezeichne mit L, M, N und X_1, Y_1, Z_1 die Haupt- oder Fundamentalpunkte und mit $x = NM, y = NL, z = LM$ und $l_1 = Z_1 Y_1, m_1 = Z_1 X_1, n_1 = X_1 Y_1$ die Hauptgeraden der quadratischen Verwandtschaft.

Zwischen dem Punktfelde (ω) und jedem von den $(n-1)$ übrigen Punktfeldern (ω_i) , $i = 2, 3, \dots, n$, ergibt sich unmittelbar aus den Relationen (1) und (2) folgende Klasse quadratischer Verwandtschaften:

$$(\omega) \pi^2 (\omega_2), (\omega) \pi^2 (\omega_3), \dots, (\omega) \pi^2 (\omega_n) \dots \quad (3)$$

Diese Verwandtschaften besitzen eine charakteristische Eigenschaft: Die Punkte X, Y, Z und die Geraden l, m, n des Feldes (ω_i) — welche laut (1) den Elementen X_1, Y_1, Z_1 und l_1, m_1, n_1 des Feldes (ω_1) entsprechen — bilden Hauptpunkte, bzw. Hauptgeraden des betrachteten Feldes.

Gleichzeitig bespreche ich analoge Beziehungen zwischen ebenen Strahlenfeldern, zentrischen Ebenenbündeln und Strahlenbündeln.

Der zweite Teil dieser Abhandlung enthält folgende Sätze:

Sind zwischen dem Punktfelde (ω) und jedem von zwei kollinearen Punktfeldern $(\omega_1), (\omega_2)$ quadratische Verwandtschaften festgestellt, so gehen durch irgend einen festen Punkt P_0 — der in der gemeinsamen Grundebene dieser drei Felder liegt — fünf solche Geraden, dass jede von ihnen je drei entsprechende Punkte dieser Felder verbindet.

Die Verbindungsgeraden sämtlicher Tripel homologer Punkte der betrachteten Felder erzeugen eine Plankurve 5-er Klasse, 14-er Ordnung und 3-en Geschlecht. Jede von den drei Koinzidenzgeraden der kollinearen Felder (ω_1) und (ω_2) enthält zwei Tripel entsprechender Punkte der Felder $(\omega), (\omega_1), (\omega_2)$ und ist eine Doppeltangente der betrachteten Kurve 5-er Klasse K_5 .

Berechnet man mit $a = A A_1 A_2, b = B B_1 B_2, \dots$ die sämtlichen Tangenten der Kurve K_5 , so erzeugen:

a) die Punkte $A, B, \dots$ des Feldes (ω) eine Plankurve C 5-er Ordnung, 14-er Klasse und 3-en Geschlecht, welche die drei Hauptpunkte L, M, N zu Doppelpunkten besitzt.

b) die Punkte $A, B, \dots, i = 1, 2$, des Feldes (ω_i) eine allgemeine Plankurve C_i 4-er Ordnung, 12-er Klasse und 3-en Geschlecht, welche durch die Hauptpunkte X_i, Y_i und Z_i hindurchgeht.

Sind zwischen dem Punktfelde (ω) und jedem von drei kollinearen Punktfeldern (ω_i) , $i = 1, 2, 3$, welche mit (ω) kollokal sind, quadratische Verwandtschaften festgestellt, so liegen 9-mal je vier entsprechende Punkte dieser Felder in gerader Linie.

Im diesen zweiten Teile bespreche ich gleichzeitig analoge Eigenschaften 3., bzw. 4. kollokaler Strahlenfelder, konzentrischer Ebenenbündel und Strahlenbündel.

Der dritte Teil enthält folgende Sätze:

Sind zwischen dem Ebenenbündel (W) und jedem von zwei kollinearen Ebenenbündeln $(W_1), (W_2)$ quadratische Verwandtschaften festgestellt, so liegen auf irgend einer festen Gerade p_0 — die durch keinen von den drei verschiedenen Scheitelpunkten dieser Bündel hindurchgeht — fünf Schnittpunkte je dreier homologer Ebenen der betrachteten Bündel.

Die Schnittpunkte sämtlicher Tripel entsprechender Ebenen dieser Bündel erzeugen eine Fläche 5-er Ordnung, welche eine doppelte kubische Raumkurve besitzt. In Punkten dieser Raumkurve schneiden sich je zwei homologe Strahlen der kollinearen Bündel (W_1) und (W_2) .

Sind zwischen dem Ebenenbündel (W) und jedem von drei kollinearen Ebenenbündeln (W_i) , $i = 1, 2, 3$, quadratische Verwandtschaften festgestellt, so erzeugen die Schnittpunkte sämtlicher Quadrupel homologer Ebenen dieser Bündel (welche verschiedene Scheitelpunkte haben) eine Raumkurve 9-er Ordnung, 57-er Klasse, 28-en Rang und 6-en Geschlecht, welche 22 scheinbare Doppelpunkte besitzt.

Bezeichnet man mit $A = \alpha \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3, B = \beta \beta_1 \beta_2 \beta_3, \dots$ die sämtlichen Punkte dieser Raumkurve 9-er Ordnung R^9 , so erzeugen:

a) die Ebenen $\alpha, \beta, \dots$ des Bündels (W) eine Kegelfläche Γ 7-er Klasse, 24-er Ordnung und 6-en Geschlecht, für welche jede von den drei Hauptebenen λ, μ, ν des Bündels (W) eine dreifache Berührungsebene ist.

b) die Ebenen $\alpha, \beta, \dots, \iota = 1, 2, 3$, des Bündels (W_i) eine Kegelfläche Γ_i 5-er Klasse, 20-er Ordnung und 6-en Geschlecht, welche die drei Hauptebenen ξ, η, ζ des Bündels (W_i) zu Tangentialebenen besitzt.

Zu den früheren fügen wir noch einen fünften Ebenenbündel (W_4) hinzu, der zu dem Bündel (W_1) kollinear ist, so schneiden sich 14-mal je fünf homologe Ebenen dieser Bündel in je einem Punkte.

Aus dualen Betrachtungen ergeben sich ganz analoge Eigenschaften der 3., 4., und 5. Punktfelder, die bezw. in verschiedenen Grundebenen liegen.

Im vierten und letzten Teile meiner Abhandlung, nach der Ableitung einiger Hilfsätze, wende ich mich einer liniengeometrischen Problemgruppe zu:

Sind zwischen dem Strahlenbündel (W) und jedem von zwei kollinearen Strahlenbündeln (W_1), (W_2) — die verschiedene Scheitelpunkte haben — quadratische Verwandtschaften festgestellt, so erzeugen die Treffgeraden sämtlicher Tripel homologer Strahlen dieser Bündel einen Komplex 5-en Grades. Alle Geraden des Bündels (W) gehören dem Komplex an. Die Doppelgeraden des Komplexes bilden eine Kongruenz 3-er Ordnung und 3-er Klasse; sie zerfällt in die Bündel (W_1), (W_2) und in die Kongruenz der Bisekanten einer kubischen Raumkurve, in deren Punkten entsprechende Strahlen der kollinearen Bündel (W_1) und (W_2) sich schneiden. Die Scheitelpunkte W , W_1 und W_2 der betrachteten Bündel sind Hauptpunkte des Komplexes, die Geraden W , W_1 , W_2 sind dreifache- und der Strahl $W_1 W_2$ ist eine vierfache - Gerade des Komplexes.

Fügen wir noch einen vierten Strahlenbündel (W_3) hinzu, der zum Bündel (W_1) kollinear ist, so erzeugen die Treffgeraden sämtlicher Quadrupel homologer Strahlen dieser Bündel eine Kongruenz 9-er Ordnung und 9-er Klasse. Der Scheitelpunkt W ist ein singulärer Punkt 3-en Grades und jeder Bündelscheitel W_i , $i = 1, 2, 3$, ist ein singulärer Punkt 5-en Grades dieser Kongruenz.

Bezeichnet man mit $a, b, \dots$ die Strahlen der betrachteten Kongruenz, welche irgend eine feste Gerade p^* und sämtliche Quadrupel homologer Strahlen: $a, a_1, a_2, a_3; b, b_1, b_2, b_3; \dots$ der gegebenen Bündel schneiden, so erzeugen:

a) die Geraden $a, b, \dots$ des Bündels (W) eine Kegelfläche Γ 14-er

Ordnung, welche die Hauptgeraden l, m, n dieses Bündels zu 6-fachen Erzeugenden besitzt.

b) die Geraden $a, b, \dots, \iota = 1, 2, 3$, des Bündels (W_i) eine Kegelfläche Γ_i 10-er Ordnung, welche die Hauptgeraden x, y, z dieses Bündels zu Doppelerzeugenden hat.

Sind zwischen dem Strahlenbündel (W) und jedem von vier kollinearen Strahlenbündeln (W_i), $i = 1, 2, 3, 4$ — welche verschiedene Scheitelpunkte besitzen — quadratische Verwandtschaften festgestellt, so erzeugen die Treffgeraden sämtlicher Quintupel homologer Strahlen dieser Bündel eine Regelfläche 28-en Grades.

Bezeichnet man mit $c, d, \dots$ die Erzeugenden dieser Regelfläche, welche sämtliche Quintupel homologer Strahlen: $c, c_1, c_2, c_3, c_4; d, d_1, d_2, d_3, d_4; \dots$ der betrachteten Bündel schneiden, so erzeugen:

a) die Geraden $c, d, \dots$ des Bündels (W) eine Kegelfläche Γ 18-er Ordnung, welche die drei Hauptgeraden l, m, n dieses Bündels zu 8-fachen Erzeugenden hat.

b) die Geraden $c, d, \dots, \iota = 1, 2, 3, 4$, des Bündels (W_i) eine Kegelfläche Γ_i 12-er Ordnung, welche die drei Hauptgeraden x, y, z dieses Bündels zu Doppelerzeugenden hat.

Sind endlich zwischen dem Strahlenbündel (W) und jedem von fünf kollinearen Strahlenbündeln (W_i), $i = 1, 2, 3, 4, 5$ — welche verschiedene Scheitelpunkte besitzen — quadratische Verwandtschaften festgestellt, so gibt es im Allgemeinen 40 solche Geraden, die jede von ihnen je sechs entsprechende Strahlen dieser Bündel schneidet.

In diesem letzten Teile meiner Abhandlung bespreche ich gleichzeitig auch analoge Eigenschaften der Strahlenfelder.