rej dwie krzywizny główne są równe. Treścią II Rozdz. są badania własności geometrycznych promieni świetlnych i trajektoryj punktu swobodnego w polu statystycznem przy pomocy wzorów Freneta dla przestrzeni Riemanna. Ze wzorów uzyskanych w ten sposób wynika między innemi, że promień świetlny i trajektorja, wychodzące z tego samego punktu i w tym samym kierunku, mają w tymże punkcie wspólne trójściany Freneta i równe skręcenia (*Tw* 3). Stąd mamy dalszy wniosek: jeżeli w pewnem polu statycznem, promienie świetlne są krzywemi płaskiemi, to trajektorje punktu swobodnego posiadają tę samą własność, i nawzajem (*Tw* 4). Dodajmy wreszcie, że wyznaczenie promieni świetlnych i trajektoryj punktu swobodnego w polu statycznem zostało sprowadzone do rozwiązania jednego i tego samego zagadnienia z rachunku warjacyjnego. Ostatni rozdział został poświęcony następującemu zagadnieniu: wyznaczyć te pola statyczne, w których promienie świetlne, a zatem także i trajektorje punktu swobodnego, są krzywemi płaskiemi. Zagadnienie to posiada trzy jedynie rozwiązania, określone wzorami $(A_i)$, $(B_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ względnie wzorami $(A_i')$, $(B_i')$ $(i=1, 2, 3)$, zależnie od tego, czy równania Einsteina przyjmujemy w pierwotnej formie czy też w formie późniejszej, uogólnionej. Z pośród tych trzech rozwiązań jedno jest znanem rozwiązaniem Schwarzschilda względnie Trefftz'a, dwa inne, o ile wiem, nie były dotychczas wyznaczone.



EDWARD STAMM.

# Geometrische Theorie logischer Funktionen.

**Beitrag zur Algebra der Logik.**

## Teorja geometryczna funkcyj logicznych.

**Przyczynek do Algebry Logiki.**



§ 1. **Einleitung**. Whiteheads Theorie der logischen Funktionen[1]) behandelt die Funktionen nur im allgemeinen. In der vorliegenden Abhandlung untersuchen wir verschiedene spezielle Funktionen der Algebra der Logik auf Grund einer Klassifikation, welche sich durch logische Transformationen begründen lässt. Wir geben unserer Theorie geometrisches Gepräge; sie ist eine „analytische Geometrie" im 2-dim „logischen Raume"[2])

[1]) Mem. on the alg. of symb. log., Amer. Journ. of. Math., XXIII, 1901. Vgl auch dessen Abh. „The logic of relations, log. subst. groups etc." l. c. XXV, 1903.

[2]) Wir beschänken uns auf 2 — dim. Raum, die „Ebene", d. h. auf Funktionen einer unabhängigen Variablen. Es steht aber nihts im Wege eine analoge Theorie für Funktionen mehrerer Variablen, d. h. eine mehrdimensionale Geometrie zu bilden

Dabei stützen wir uns auf die von Cayley[3]) begründete und von F. Klein[4]) ausgebildete gruppentheoretische Auffassung der Geometrie.

Die Sätze der Algebra der Logik[5]) sammt der Funktionen — und Transformationentheorie[6]) werden als bekannt verausgesetzt.

In der Algebra der Logik bedienen wir uns folgender Symbolik: Z logische Null (Modul der logischen Addition), T Totalität (Modul der logischen Multiplikation), $a \cup b$ logische Summe, $a \cap b$ oder kürzer $ab$ logisches Produkt von $a$ und $b$, $a'$ Negation von $a$, $a \between b = a b' \cup a' b$, $a \,)(\, b = (a \between b)' = a b \cup a' b'$, $a \subset b$ Subsumtion ($a$ sub $b$).

§ 2. **Vorläufige Klassifikation ebener Gebilde.** Wir nennen Punkt m 2—dim. logischen Raume (kürzer Pt) jede Dyade von Dingen des logischen Bereiches; wir bezeichnen die Pte durch $(a, b)$, $(x, y)$, $P(a, b), \ldots$ Die Dinge $x$, $y$ in $(x, y)$ nennen wir Koordinaten.

Zwei Pte $(a_1, a_2)$, $(b_1, b_2)$ sind dann und nur dann gleich, wenn $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ ist.

Jede Gleichung (kürzer Gg)

$$a x y \cup b x y' \cup c x' y \cup d x' y = Z, \tag{2}$$

wo $x$, $y$ Veränderliche und $a$, $b$, $c$, $d$ Konstanten oder Funktionen variabler Parameter, mit der Bedingung

$$a b c d = Z \tag{2·1}$$

sind, stellt eine Gesammtheit von Pten dar. Wir sagen in diesem Falle, dass (2) und (2·1) eine ebene Linie oder eine Gesammtheit von Linien darstellt.

---

[3]) A sixth mem. on quantics, Philos. Trans., 149 (1859), G. 61ff.; Coll. Math Pap., II (1889), S. 561ff.

[4]) Vergl. Betr. ü. neue geom. Forsch., Erlangen 1872, Math. Ann., 43 (1889), S. 63ff.

[5]) Unter Algebra der Logik verstehen vir reine Klassentheorie (ohne Rücksicht auf Anwendungen), Vgl.: L. Couturat, L'alg. de la log., 1905; E. Huntington, Sets of indep. postulates for the alg. of. log., Trans. Amer. Math. Soc., V, 1904; E. Schröder, Vorl ü. Alg. d. Log., Bd. I — III, 1890 ff.; Abriss d. Alg. d. Log., 1910: E. Stamm, Grundz. d. Alg. d. Log., Warschau, 1913 (polnisch; umfasst auch Funktionen und Transformationentheorie); A. N. Whitehead, A treat. on universal alg., I, 1898.

[6]) Vgl. die zwei unter 1) angeführten Abh. Whiteheads u. meine unter 5) zit. Arbeit.





Wenn für $x = x_0$ die Variable $y$ in (2) den Wert $y_0$ annimmt, so sagen wir, dass die entsprechende Linie (Gesammtheit von Linien) durch den Pt $(x_0, y_0)$ hindurchgeht, oder dass der Pt $(x_0, y_0)$ auf der Linie (Gesammtheit von Linien) liegt.

Vorläufig nennen wir Gerade (kürzer Ge) die Linie, welche durch die Gg

$$y = a x \cup b x' = f(x) \tag{2·2}$$

bestimmt ist, wo $a$ und $b$ Konstanten sind.

Geradenbüschel nennen wir die Gesammtheit der Gen mit der Gg

$$y = a p x \cup b p x' \cup c p' x \cup d p' x' = f(p, x), \tag{2·3}$$

wo $p$ variabler Parameter ist.

Kollineare nennen wir die Linie mit der Gg

$$x = a m \cup b m' = \varphi(m), \qquad y = c m \cup d m' = \psi(m), \tag{2·4}$$

wo $m$ unabhängige Variable ist.

Kollinearenbüschel nennen wir die Gesammtheit von Linien mit der Gg

$$\begin{aligned} x &= a_1 p m \cup a_2 p m' \cup a_3 p' m \cup a_4 p' m' = \varphi(p, m), \\ y &= b_1 p m \cup b_2 p m' \cup b_3 p' m \cup b_4 p' m' = \varphi(p, m), \end{aligned} \tag{2·5}$$

wo $m$ unabhängige Variable und $p$ Parameter ist.

§ 3. **Entfernung** Die fundamentale Beziehung zwischen zwei beliebigen Pten nennen wir Entfernung dieser Pte[7]), und definieren folgendermassen:

1) Die Entfernung ist invariant bei der Substitution $\mathbf{T} x = a \between x$, $\mathbf{T} y = b \between y$, wo $a$ und $b$ beliebig sind[8]);

---

[7]) Weil wir in unserem Systeme der Geometrie manche zu den Formen der gewöhnlichen Geometrie analogen Gebilde finden, geben wir diesen Gebilden dieselben Namen, wie sie in der gewöhnlichen Geometrie besitzen. Wir nehmen aber dabei keine Rücksicht auf gewisse Eigenschaften dieser Gebilde, sondern auf ihre Stellung im Systeme der Geometrie.

[8]) Später werden wir beweisen, dass die Entfernung bei jeder Substitution invariant bleibt.

2) die Entfernung ist symmetrisch bezüglich beider Pte:

3) die Entfernung ist gleich $Z$ nur wenn beide Pte zusammenfallen.

Um eine analytische Formel für die Entfernung zu gewinnen, wollen wir zuerst allgemein nachallen Invarianten zweier beliebiger Pte bei der erwähnten Sabstitutionfragen. Weil beide Pte beliebig sind, müssen die gesuchten Invarianten Funktionen ihrer Koordinaten sein, wobei die Koeffizienten dieser Funktionen nur die Werte $Z$ oder $T$ besitzen können. Wir setzen also

$$\left.\begin{aligned} f(x_1, x_2, y_1, y_2) = {} & A\, x_1 y_1 x_2 y_2 \cup B_1\, x_1 y_1 x_2 y'_2 \cup B_2\, x_1 y_1 x'_2 y_2 \cup \\ & \cup B_3\, x_1 y'_1 x_2 y_2 \cup B_4\, x'_1 y_1 x_2 \cup C_1\, x_1 y_1 x'_2 y'_2 \cup C_2\, x_1 y'_1 x_2 y'_2 \cup \\ & \cup C_3\, x'_1 y_1 x_2 y'_2 \cup C_4\, x_1 y'_1 x'_2 y_2 \cup C_5\, x'_1 y_1 x'_2 y_2 \cup C_6\, x'_1 y'_1 x_2 y_2 \cup \\ & \cup D_1\, x_1 y'_1 x'_2 y'_2 \cup D_2\, x'_1 y_1 x'_2 y'_2 \cup D_3\, x'_1 y'_1 x_2 y'_2 \cup \\ & \cup D_4\, x'_1 y'_1 x'_2 y_2 \cup E\, x'_1 y'_1 x'_2 y'_2, \end{aligned}\right\} \quad (\alpha)$$

wo $A$ bis $E$ die Koeffizienten, welche den Wert $Z$ oder $T$ besitzen, aber vorläufig unbestimmt, und $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$ die gegebenen Pte sind. Den Wert der Koeffizienten $A$ bis $E$ bestimmen wir mit Hilfe der Methode der unbestimmten Koeffizienten[9]). Nach der Ausführung der Substitution und Vereinfachung erhalten wir den Ausdruck

$$M_1\, x_1 y_1 x_2 y_2 \cup M_2\, x_1 y_1 x_2 y'_2 \cup \ldots \cup M_{16}\, x'_1 y'_1 x'_2 y'_2. \quad (\beta)$$

wo $M$ Funktionen von $A$ bis $E$ und von $a$, $b$ sind. Vergleichen wir die Koeffizienten von $(\alpha)$ und $(\beta)$, so bekommen wir das System

$$\begin{aligned} A\, a' b' \cup C_2\, a' b \cup C_5\, a b' \cup E\, a b &= A, \\ B_1\, a' b' \cup B_3\, a' b \cup D_2\, a b' \cup D_4\, a b &= B_1, \\ B_2\, a' b' \cup D_1\, a' b \cup B_4\, a b' \cup D_3\, a b &= B_2, \\ \text{— — — — — — — — — —} \end{aligned}$$

also die Bedingungen

$$A = C_2 = C_5 = E, \quad B_1 = B_3 = D_2 = D_4, \quad B_2 = D_1 = B_4 = D_3,$$
$$C_1 = C_4 = C_3 = C_6.$$

[9]) Vgl. meine Arbeit „Beitr. z. Alg. d. Log." Monatsh. f. Math. u Phys., XXII, 1911, S. 143f.





Sind also die Werte der Koeffizienten $A_1$, $B_1$, $B_2$, $C_1$ bestimmt, so sind die Werte aller unserer Koeffizienten bestimmt. Dies gibt uns 16 mögliche Fälle, welche 16 gesuchte Invarianten geben:

$$\begin{aligned} N_1 &= Z, \\ N_2 &= (x_1 \between x_2)\,(y_1 \between y_2), \\ N_3 &= (x_1 \between x_2)\,(y_1 )( y_2), \\ N_4 &= (x_1 )( x_2)\,(y_1 \between y_2), \\ N_5 &= (x_1 )( x_2)\,(y_1 )( y_2), \\ N_6 &= x_1 \between x_2 \\ N_7 &= y_1 \between y_2, \\ N_8 &= (x_1 \between x_2) \between (y_1 \between y_2), \\ N_9 &= (x_1 \between x_2) \between (y_1 \between y_2), \\ N_{10} &= y_1 )( y_2, \\ N_{11} &= x_1 )( x_2, \\ N_{12} &= (x_1 \between x_2) \cup (y_1 \between y_2), \\ N_{13} &= (x_1 \between x_2) \cup (y_1 )( y_2), \\ N_{14} &= (x_1 )( x_2) \cup (y_1 \between y_2), \\ N_{15} &= (x_1 )( x_2) \cup (y_1 )( y_2), \\ N_{16} &= T. \end{aligned}$$

Unseren drei Postulaten genügt nur die Invariante $N_{12}$. Wir definieren also:

*Die Entfernung zweier Pte* $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$ *ist der Wert des Ausdruckes*

$$\Delta = (x_1 \between x_2) \cup (y_1 \between y_2). \qquad (3{\cdot}1)$$

Wir nennen *Entfernung des Ptes* $(x_0, y_0)$ *von der Linie* (Gesammtheit von Linien) das Minimum der Entfernungen des Ptes $(x_0, y_0)$ von den Pten dieser Linie (Gesammtheit), und *Entfernung der Linie (Gesammtheit)* $l_1$ *von der Linie (Gesammtheit)* $l_2$ das Minimum der Entfernungen der Pte von $l_1$ von den Pten von $l_2$.

§ 4. **Strahlenbüschel.** Wir nennen *Strahlenbüschel* die Gesammtheit der Gen durch einen gegebenen Pt. — Ist der gegebene Pt $(x_0, y_0)$, so lautet die *Gg des Strahlenbüschels* durch $(x_0, y_0)$:

$$y = [(x_0' \cup y_0)\, p \cup x_0\, y_0\, p']\, x \cup [(x_0 \cup y_0)\, p \cup x_0'\, y_0\, p']\, x', \qquad (4)$$

wo $p$ ein variabler Parameter ist.

Denn jede Ge, welche durch $(x_0, y_0)$ geht befriedigt die Gg $y_0 = a x_0 \cup b x'_0$. Diese Gg ist mit $a' x_0 y_0 \cup a x_0 y'_0 \cup b' x_0' y_0 \cup b x_0' y_0' = Z$, dh. mit $y_0' a b \cup (x_0 \between y_0) a b' \cup (x_0 )( y_0) a' b \cup y_0 a' b' = Z$ äquivalent. Diese Gg ist aber für $a$ und $b$ möglich und hat die Lösung

$$a = (x_0' \cup y_0) n \cup x_0 y_0 n', \qquad b = (x_0 \cup y_0) v \cup x_0' y_0 v',$$

wo $u$ und $v$ beliebig sind. Die Gg

$$y = [(x_0' \cup y_0) u \cup x_0 y_0 u'] x \cup [(x_0 \cup y_0) v \cup x_0' y_0 v'] x'$$

ist aber mit (4) äquivalent. Denn man kann immer $p$ so wählen, dass die Ggen

$$(x_0' \cup y_0) u \cup x_0 y_0 u' = (x'_0 \cup y_0) p \cup x_0 y_0 p',$$

$$(x_0 \cup y_0) v \cup x_0' y_0 v' = (x_0 \cup y_0) p \cup x_0' y_0 p'$$

gelten, weil dieses System für $p$ möglich ist.

Es lässt sid leicht beweisen, dass die Gen von (4) keinen für alle gemeinsamen Pt ausser $(x_0, y_0)$ besitzen.

Der Strahlenbüschel besitzt folgende Eigenschaft: Jeder Pt jeder Gen des Strahlenbüschels durch $(x_0, y_0)$ hat vom Pte $(x_0, y_0')$ die Entfernung $T$ und umgekehrt.

Beweis. Wir schreiben (4) in der Form

$$y = (x_0' \cup y_0) p x \cup (x_0 \cup y_0) p x' \cup x_0 y_0 p' x \cup x_0' y_0 p' x'.$$

Die Entfernung des Pts $(x_0, y_0')$ vom Pte $(x, y)$ ist gleich

$$D = (x_0 \between x) \cup \{y_0' \between [(x_0' \cup y_0) p x \cup (x_0 \cup y_0) p x' \cup x_0 y_0 p' x \cup$$

$$\cup x_0' y_0 p' x']\} = (x_0 \between x) \cup (x_0 \cup y_0) p x \cup (x_0' \cup y_0) p x' \cup$$

$$\cup (x_0 \cup y_0') p' x \cup (x_0' \cup y_0') p' x' = T p x \cup T p x' \cup T p' x \cup$$

$$\cup T p' x' = T.$$

Umgekehrt folgt aus

$$(x_0 \between x) \cup (y_0' \between y) = T \tag{4·1}$$

leicht (4).





§ 5. **Linienkoordinaten.** Linienkoordinaten der Geraden (2·2) nennen wir die Ausdrücke

$$\xi = a )( b, \qquad \eta = a. \tag{5}$$

Daraus folgt

$$a = \eta, \qquad b = \xi )( \eta. \tag{5·1}$$

Setzen wir (5·1) in (2·2) ein, so erhalten wir

$$y = \eta x \cup (\xi )( \eta) x'. \tag{5·2}$$

Diese Gg ist mit

$$\eta' x y \cup \eta x y' \cup (\xi \between \eta) x' y \cup (\xi )( \eta) x' y' = Z, \tag{5·21}$$

dh. mit

$$y' \xi \eta \cup y' \xi \eta' \cup (x \between y) \xi' y \cup (x )( y) \xi' \eta' = Z \tag{5·22}$$

äquivalent. Aus (5·22) folgt für $\eta$

$$\eta = y \xi \cup (x )( y) \xi'; \tag{5·23}$$

diese Gg besitzt die Form von (5·2).

Jede der Ggen (5·2) bis (5·23) stellt für variable $x, y$ und konstante $\xi$, $\eta$ eine Ge oder „Punktreihe", und für variable $\xi, \eta$ und konstante $x, y$ einen Pt oder Strahlenbüschel.

In analoger Weise wie die Pte bezeichnen wir die Gen mit Hilfe der Linienkoordinaten durch das Symbol $[\xi, \eta]$.

§ 6. **Der geometrische Dualismus.** Dem Begriff der Entfernung entspricht dual der Begriff des Winkels. Wir nennen Winkel zwischen zwei Gen $[\xi_1, \eta_1]$, $[\xi_2, \eta_2]$ den Ausdrück

$$\nabla = (\xi_1 \between \xi_2) \cup (\eta_1 \between \eta_2). \tag{6}$$

Den Winkel zwischen Ge und Pt, dh. Strahlenbüschel (Gesammtheit von Pten) und den Winkel zwischen Pt (Gesammtheit von Pten) und Gesammtheit von Pten (Pt) definieren wir als Minimum der möglichen Winkel, ähnlich wie bei der Gen.

Der auf diese Weise konstruierte geometrische Dualismus ist vom logischen Dualismus verschieden. Mit diese. Dualismus haben wir eigentlich zwei Geometriesysteme gebildet, das eine mit den Grundbegriffen Pt und Entfernung, das andere mit den Grundbegriffen Ge und Winkel. In formaler Hinsicht sind beide Systeme identisch; wenn wir aber eine Beziehung zwischen geometrischen Gebilden beider Systeme auf Grund der Relationen (5) herstellen, so vereinigen wir dadurch beide Systeme in eins, in welchem die Symbole $(x, y)$, $[\xi, \eta]$ verschiedene Bedeutungen besitzen.

Dem Pte auf einer Gen entspricht eine Ge durch den Pt. Zwei Pten auf einer Gen entsprechen zwei Gen durch einen Pt und umgekehrt.

Die dualen Sätze schreiben wir, ähnlich wie es in der projektiven Geometrie nach dem Vorgange Steiners geschicht, in zwei Kolonnen.

Die Beweise der dualen Sätze folgen aus dem Prinzip der geometrischen Dualität; wir können sie deshalb weglassen.

§ 7. **Entfernung und Winkel.** Folgende Sätze sind leicht zu beweisen.

Die Entfernung zweier Pte

$$\eta = a\,\xi \cup b\,\xi', \quad \eta = c\,\xi \cup d\,\xi'$$

ist gleich

$$\Delta = (a \between c) \cup (b \between d).$$

Der Winkel zwischen zwei Geraden

$$y = a\,x \cup b\,x', \quad y = c\,x \cup d\,x$$

ist gleich

$$\nabla = (a \between c) \cup (b \between d). \quad (7)$$

Die Entfernung des Ptes $(x_0, y_0)$ von der Gen (Punktreihe) $[\xi_0, \eta_0]$ ist gleich

$$\Delta = [\eta_0\, x_0 \cup (\xi_0)(\eta_0)\, x_0'] \between y_0.$$

Der Winkel zwischen der Gen $[\xi_0, \eta_0]$ und dem Pte (Strahlenbüschel) $(x_0, y_0)$ beträgt

$$\nabla = [y_0\, \xi_0 \cup (x_0)(y_0)\xi_0'] \between \eta_0. \quad (7\cdot1)$$

Die Entfernung zweier Gen

$$y = a\,x \cup b\,x', \quad y = c\,x \cup d\,x'$$

ist gleich

$$\Delta = (a \between c)\,(b \between d).$$

Der Winkel zwischen zwei Pten

$$\eta = a\,\xi \cup b\,\xi', \quad \eta = c\,\xi \cup d\,\xi' \quad (8)$$

beträgt

$$\nabla = (a \between c)\,(b \between d). \quad (7\cdot2)$$

Die Entfernung zweier Pte ist immer dem Winkel zwischen diesen Gen subsumiert.

Der Winkel zwischen zwei Pten ist immer der Entfernung dieser Pte subsumiert.





§ 8. **Ausweichende Geraden und Punkte.**

Zwei Gen $(\gamma)$ haben dann und nur dann gemeinsame Pte, wenn

$$(a \between c)\,(b \between d) = Z$$

ist.

Zwei Strahlenbüschel $(\gamma)$ haben dann und nur dann gemeinsame Gen, wenn

$$(a \between c)(b \between d) = Z \quad (8)$$

ist.

Beweis folgt aus (7·2).

Geraden, welche keine gemeinsamen Pte und Strahlenbüschel (Pte), welche keine gemeinsamen Gen besitzen nennen wir ausweichende.

Es lässt sich leicht beweisen, dass wenn zwei Gen nicht ausweichend sind, im allgemeinen beliebig viele gemeinsame Pte oder „Schnittpunkte“ existieren. Analoges gilt für Strahlenbüschel.

Weiter gilt folgender Satz, dessen Beweis wir dem Leser überlassen.

Ist eine Ge $g$ und ein Pt $P$ ausserhalb der Gen $g$ gegeben, so gibt es Gen durch $P$, welche mit $g$ gemeinsame Pte besitzen, und es gibt Gen durch $P$, welche zu $g$ ausweichend sind.

Ist ein Pt $G$ und eine Ge $p$ ausserhalb des Ptes $G$ gegeben, so gibt es Pte auf $p$, welche mit $G$ gemeinsame Gen besitzen, und es gibt Pte auf $p$, welche zu $G$ ausweichend sind.

§ 9. **Kollinearität und Koinzidenz.**

Der Pt $M$ ist mit den Pten $K$ und $L$ kollinear, wenn die Relation

$$(K \Delta M) \between (M \Delta L) = K \Delta L.$$

besteht, wo $A \Delta B$ die Entfernung der Pte $A$ und $B$ bedeutet.

Die Ge $m$ ist mit den Gen $k$ und $l$ koinzident, wenn die Relation

$$(k \nabla m) \between (m \nabla l) = k \nabla l \quad (9)$$

besteht, wo $a \nabla b$ den Winkel zwischen den Gen $a$ und $b$ bedeutet

Die Koinzidenz in diesem Sinne ist wom Zusammenfallen verschieden.

Wenn die Pte $K, L, M$, die Koordinaten $(u_1, v_1)$ $(u_2, v_2)$, $(u_3, v_3)$ besitzen, so ist die notwendige und hinreichende Bedingung der Kollinearität.

Wenn die Gen $k$, $l$, $m$ die Koordinaten $[u_1, v_1]$, $[u_2, v_2]$, $[u_3, v_3]$ bezitzen, so ist die notwendige und hinreichende Bedingung der Koinzidenz

$$[(u_1 \between u_2) \cup (v_1 \between v_2)] \between [(u_2 \between u_3) \cup (v_2 \between v_3)] \between [(u_3 \between u_1) \cup (v_3 \between v_1)] = Z. \quad (9\cdot1)$$

Beweis folgt aus (9).

Die Kollinearität ist eine ternäre s y m m e t r i s c h e Beziehung. Wir sprechen deshalb kurz von Kollinearität dreier Pte.

Die Koinzidenz ist eine ternäre s y m m e t r i s c h e Beziehung. Wir sprechen deshalb kurz von Koinzidenz dreier Gen.

§ 10. **Dreieck und Dreiseit.**

Wir nennen D r e i e c k jede Gesammtheit von drei verschiedenen Pten.

Wir nennen D r e i s e i t jede Gesammtheit von drei verschiedenen Gen.

Wir nennen I n h a l t des Dreieckes $P(u_1, v_1)$, $Q(u_2, v_2)$ $R(u_3\, v_3)$ den Wert des Ausdruckes

$$A(P\,Q\,R) = f(u_1, v_1, u_2, v_2, u_3\, v_3),$$

wo $f$ die Funktion auf der linken Seite von (9·1) bedeutet.

Wir nennen I n h a l t des Dreiseits $p\,[u_1, v_1]$, $q\,[u_2, v_2]$, $r\,[u_3, v_3]$ den Wert des Ausdruckes

$$\nabla\,(p\,q\,r) = f(u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3) \quad (10)$$

wo $f$ die Funktion auf den linken Seite von (9·1) bedeutet.

Sind die Pte $P, Q, R$ kollinear, so ist der Inhalt des Dreieckes $P\,Q\,R$ gleich $Z$.

Sind die Gen $p$, $q$, $r$ koinzident, so ist der Inhalt des Dreiseits $p\,q\,r$ gleich $Z$.

Ist im Dreieck $PQR$ $P \Delta Q = \delta_1$, $Q \Delta R = \delta_2$, $R \Delta P = \delta_3$, so ist

$$A\,(P\,Q\,R) = \delta_1 \between \delta_2 \between \delta_3.$$

Ist im Dreiseit $p\,q\,r$ $p \nabla q = \delta_1$, $q \nabla r = \delta_2$, $r \nabla p = \delta_3$ so ist

$$\nabla\,(p\,q\,r) = \delta_1 \between \delta_2 \between \delta_3. \quad (10·1)$$

§ 11. **Invarianten der Substitutionsgruppe.** Aus der Definition der Kollinearität folgt, dass jede Substitution, welche die Entfernung ungeändert lässt auch die Kollinearität nicht ändert. Wenn wir also die a l l g e m e i n e S u b s t i t u t i o n bestimmen wollen, welche die K o l l i n e a r i t ä t n i c h t ä n d e r t, so genügt es die allgemeinste Substitution zu bestimmen, für welche die Entfernung eine Invariante ist. Wir nehmen an, dass die gesuchte Substitution die Gestalt

$$\mathrm{T}x = a_1\, xy \cup a_2\, xy' \cup a_3\, x'y \cup a_4\, x'y', \quad \mathrm{T}y = b_1\, xy \cup b_2\, xy' \cup b_3\, x'y \cup b_4\, x'y' \quad (\alpha)$$

besitzt, wobei noch, wie die Transformationentheorie der Algebra der Logik lehrt





$$\prod_{k=1}^{4} (a'_k \cup b'_k) \cup \prod_k (a'_k \cup b_k) \cup \prod_k (a_k \cup b'_k) \cup \prod_k (a_k \cup b_k) = Z \quad (\beta)$$

sein muss. Weil, wie es bekannt ist, sechs Koeffizienten die Substitution bestimmen, und weil $a_4$ und $b_4$ durch die Formeln

$$a_4 = a'_1\, a'_2 \cup a'_2\, a'_3 \cup a'_3\, a'_1, \quad b_4 = b'_1\, b'_2 \cup b'_2\, b'_3 \cup b'_3\, b'_1 \quad (\gamma)$$

gegeben sind, werden wir nur die Koeffizienten $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ bestimmen müssen. Die Entfernung zweier P-te $K\,(x_1, y_1)$, $L\,(x_2, y_2)$ ist $K \Delta L = (x_1 \between x_2) \cup (y_1 \between y_2)$. Nach der Substitution ($\alpha$) erhalten wir

$$\begin{aligned} K_0 \Delta L_0 = {} & (a_1\, x_1\, y_1 \cup a_2\, x_1\, y'_1 \cup a_3\, x'_1\, y_1 \cup a_4\, x'_1\, y'_1) \between \\ & \between (a_1\, x_2\, y_2 \cup a_2\, x_2\, y'_2 \cup a_3\, x'_3\, y_2 \cup a_4\, x'_2\, y'_2 \cup \\ & \cup (b_1\, x_1\, y_1 \cup b_2\, x_1\, y'_1 \cup b_3\, x'_1\, y_1 \cup b_4\, x'_1\, y'_1) \between \\ & \between (b_1\, x_2\, y_2 \cup b_2\, x_2\, y'_2 \cup b_3\, x'_2\, y_2 \cup b_4\, x'_2\, y'_2), \end{aligned}$$

wo $K_0$, $L_0$ die transformierten Pte bedeuten. Dieser Ausdruck muss $K \Delta L$ gleich sein:

$$K_0 \Delta L_0 = (x_1 \between x_2) \cup (y_1 \between y_2). \quad (\delta)$$

Um die Koeffizienten $a_1$ bis $a_4$ zu bestimmen, haben wir also die Relationen ($\beta$), ($\gamma$), ($\delta$) Wenn wir jetzt beide Seiten von ($\delta$) in kleinste Bestandteile der Dinge $x_1, y_1, x_2, y_2$ entwickeln und die Koeffizienten vergleichen, bekommen wir

$$\left.\begin{aligned} &(a_1 \between a_2) \cup (b_1 \between b_2) = T, \quad (a_1 \between a_3) \cup (b_1 \between b_3) = T, \quad (a_1 \between a_4) \cup (b_1 \between b_4) = T \\ &(a_2 \between a_3) \cup (b_2 \between b_3) = T, \quad (a_2 \between a_4) \cup (b_2 \between b_4) = T, \quad (a_3 \between a_4) \cup (b_3 \between b_4) = T \end{aligned}\right\} \quad (\varepsilon)$$

Wenn wir jetzt in diesem Systeme die Werte von $a_4$ und $b_4$ aus ($\gamma$) einsetzen, und das System auf die Form

$$F\,(a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3) = Z \quad (\xi)$$

bringen, so verifizieren wir leicht, dass ($\xi$), welches mit ($\gamma$) und ($\varepsilon$) äquivalent ist und ($\delta$) nicht enthält, mit ($\beta$) nach der Substitution der Werte ($\gamma$), äquivalent ist. Analoges gilt für die Koinzidenz. Weil nun ($\xi$) jede Substitution bestimmt, welche die Entfernung invariant lässt, haben wir folgenden Satz bewiesen:

Die Entfernung zweier Pte ist eine Invariante für jede Substitution zweier unabhangigen Variablen.

Der Winkel zwischen zwei Gen ist eine Invariante für jede Substitution zweier unabhängigen Variablen.

Daraus folgt direkt der weitere Satz:

Die Entfernung zweier Pte, der Inhalt des Dreieckes und die Kollinearität von drei Pten sind Invarianten der Substitutionsgruppe.

Der Winkel zwischen zwei Gen, der Inhalt des Dreiseites und die Koinzidenz von drei Gen sind Invarianten der Substitutionsgruppe.

Wenn wir (ξ) nach $a_1$ bis $b_4$ auflösen, so erhalten wir die Koeffizienten der allgemeinsten Form der Substitution. Sie lässt sich auf folgende spezielle Substitutionen zurückführen:

$$\left.\begin{array}{lllll} \text{I. } Tx=x', & \text{II. } Tx=x, & \text{III. } Tx=y, & \text{IV. } Tx=x \between y, & \text{V. } Tx=x, \\ \quad Ty=y; & \quad Ty=y'; & \quad Ty=x; & \quad Ty=y; & \quad Ty=x \between y \end{array}\right\} \quad (11)$$

§ 12. **Entgegengesetete Punkte und Geraden.** Wir haben unserem Systeme der Geometrie zwei Fundamentalgebilde Pt und Ge zu Grund gelegt. Weiter haben wir folgende Fundamentalbeziehungen zwischen Pten eingeführt: Entfernung zweier Pte, Inhalt des Dreieckes und Kollinearität dreier Pte; die entsprechenden dualen Begriffe sind Winkel, Inhalt des Dreiseits und Koinzidenz. Inhalt des Dreieckes ist eine Beziehung zwischen drei beliebigen, die Kollinearität eine Beziehung zwischen drei speziellen Pten. Analoges gilt für die dualen Begriffe. Für zwei Pte ist die Entfernung eine Beziehung zwischen beliebigen Pten, für zwei Gen der Winkel eine Beziehung zwischen beliebigen Gen. Es fehlt also noch eine Beziehung zwischen zwei speziellen Pten und zwei speziellen Gen.

Unsere Geometrie untersucht vor allem solche Eigenschaften ihrer Gebilde, welche bei ausgewählter Transformation invariant sind. In unserem Falle ist diese Transformation jede Substitution. Die gesuchte Beziehung zwischen zwei speziellen Pten (Gen) muss also eine Invariante der Substi-





tutionsgruppe sein. In (3) haben wir alle Invarianten zweier Pte bei der speziellen Substitution $Tx = a \between x$, $Ty = b \between y$ angegeben. Unter diesen Invarianten befinden sich also auch alle Invarianten zweier Pte bei allgemeiner Substitution. Nun ist $N_2$ von (3) bei der Substitution IV (11) nicht invariant, weil wir $TN_2 = N_4$ haben. Ebenso ist $N_3$, $N_4$, $N_6$, $N_7$, $N_{10}$, $N_{11}$ bei III, $N_8$, $N_9$, $N_{13}$, $N_{14}$, $N_{15}$ bei IV nicht invariant. $N_{12}$ ist dagegen, wie wir im vorigen § bewiesen haben, bei jeder Substitution invariant. Bei jeder Substitution invariant ist also auch

$$N_5 = (x_1\,)(\,x_2\,)\,(y_1\,)(\,y_2), \tag{12}$$

denn es ist $N_5 = N_{12}'$. Für die gesuchte Beziehung zwischen zwei speziellen Pten kann also nur $N_5 = Z$ oder $N_5 = T$, dh. $N_{12} = T$, oder $N_{12} = Z$ gewählt werden. Ist $N_{12} = Z$, so sind die beiden Pte identisch. Es bleibt also die Relation $N_{12} = T$, dh. $N_5 = Z$ übrig.

Wir nennen zwei Pte $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$ entgegengesetzt wenn die Relation

$$(x_1\,)(\,x_2)\,(y_1\,)(\,y_2) = Z$$

besteht.

Wir nennen zwei Gen $[\xi_1, \eta_1]$, $[\xi_2, \xi_2]$ entgegengesetzt, wenn die Relation

$$(\xi_1\,)(\,\xi_2)\,(\eta_1\,)(\,\eta_2) = Z \quad (12{\cdot}1)$$

besteht.

Die Entfernung zweier entgegengesetzter Pte ist gleich $T$.

Der Winkel zwischen zwei entgegengesetzten Gen ist gleich $T$.

Die Gesammtheit aller Pte, welche zum gegebenen $(x_0, y_0)$ entgegengesetzt sind bildet den Strahlenbüschel $(x_0, y'_0)$.

Die Gesammtheit aller Gen, welche zur gegebenen $[\xi_0, \eta_0]$ entgegengesetzt sind bildet die Gerade $[\xi_0, \eta'_0]$.

§ 13. **Semikollineare und Semikoinzidente.** Sind zwei beliebige Pte $K(x_1, y_1)$ $L(x_2, y_2)$ gegeben, so gibt es immer mit diesen Pten kollineare Pte. Denn bezeichnen wir den mit $K$ und $L$ kollinearen Pt durch $P(x, y)$, so haben wir nach (9·1) für $x$, $y$ die Bedingung

$$[(x_1 \between x) \smile (y_1 \between y)] \between [(x_2 \between x) \smile (y_2 \between y)] \between [(x_1 \between x_2) \smile (y_1 \between y_2)] = Z$$

diese Gg ist mit

$$A\,x\,y \smile B\,x\,y' \smile C\,x'\,y \smile D\,x'\,y' = Z \tag{$\alpha$}$$

äquivalent, wo $A$ bis $D$ die Werte

$$A = x'_2\, y'_1 (x_1 \cup y_2) \cup x'_1\, y'_2 (x_2 \cup y_1), \quad B = x'_2\, y_1 (x_1 \cup y'_1) \cup x'_1\, y_2 (x_2 \cup y'_1)$$

$$C = x_1\, y'_2 (x'_2 \cup y_1) \cup x_2\, y'_1 (x'_1 \cup y_2), \quad D = x_2\, y_1 (x'_1 \cup y'_2) \cup x_1\, y_2 (x'_2 \cup y'_1)$$

besitzen. Die Resultante der Gg ($\alpha$) ist gleich $Z$, was unsere These beweist.

Lösen wir ($\alpha$) nach $x$ und $y$ auf, so erhalten wir für die Koordinaten jedes mit $K$ und $L$ kollinearen Ptes die Ausdrücke

$$x = M\, m \cup N\, m', \quad y = (P\, m \cup Q\, m')\, p \cup (R\, m \cup S\, m')\, p', \tag{13}$$

wo $m$ unabhängige Variable und $p$ Parameter ist. $M$ bis $S$ besitzen die Werte

$$\left.\begin{aligned} M &= x_1 \cup x_2 \cup (y_1)(y_2) & N &= x_1\, x_2\, (y_1 \between y_2), \\ & & P &= (x_1)(x_2) \cup x_1\, y_1 \cup x_2\, y_2 \\ Q &= (x_1)(x_2) \cup x_1\, y_2 \cup x_2\, y_1, & R &= x_1\, x'_2\, y_1 \cup x'_1\, x_2\, y_2, \\ & & S &= x'_1\, x_2\, y_1 \cup x_1\, x'_2\, y_2. \end{aligned}\right\} \tag{13·1}$$

Die Gg (13) stellt im allgemeinen einen Kollinearenbüschel dar. In speziellen Fällen geht (13), wie wir noch sehen werden, in eine Ge oder einen Geradenbüschel über. Wir nennen das Gebilde (13) Semikollineare und bezeichnen durch $\Delta(K, L)$, wenn alle Pte von (13) mit $K$ und $L$ kollinear sind. Das duale Gebilde nennen wir Semikoinzidente und bezeichnen durch $\nabla(K, L)$.

Ist eine Semikollineare $\Delta(K, L)$ und zwei von $K$ und $L$ verschiedene Pte $K_0$, $L_0$ dieser Semikollinearen gegeben, so kann es Pte der Semikollinearen $\Delta$ $(K, L)$ geben, welche mit $K_0$ und $L_0$ nicht kollinear sind.

Ist eine Semikoinzidente $\nabla(k, l)$ und zwei von $k$ und $l$ verschiedene Gen $k_0$, $l_0$ dieser Semikoinzidenten gegeben, so kann es Gen der Semikoinzidenten $\nabla$ $(k, l)$ geben, welche mit $k_0$ und $l_0$ nicht koinzident sind.

Beweis durch einen Spezialfall $K = (x_1, Z)$, $L = (x_2, Z)$, $K_0 = (Z, Z)$, $L_0 = (T, Z)$.

Die Pte $K$, $L$ in $\Delta(K, L)$ nennen wir Brennpunkte.

Die Gen $k$, $l$ in $\nabla$ $(k, l)$ nennen wir Brenngeraden.





§ 14. **Entfernung und Winkel auf Linien.** Bezeichnen wir durch $i$ das Minimum, durch $s$ das Maximum einer Funktion, so nennen wir den Ausdruck

$$a = i \between s \tag{14}$$

die Schwankung der Funktion.

Ist $f(x) = a\,x \cup b\,x'$, so ist $a(f) = a \between b$.

Ist eine Linie und zwei ihrer Pte $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$ gegeben, so beträgt die Entfernung dieser Pte

$$\Delta\, l = (x_1 \between x_2) \cup (y_1 \between y_2) = \Delta\, x \cup \Delta\, y, \tag{14·1}$$

wo $\Delta\, x = x_1 \between x_2$, $\Delta\, y = y_1 \between y_2$ die Abweichung[10]) der Variablen bedeutet. Liegen die Pte auf der Gen (2·2), so besitzen sie die Koordinaten $(x_1,\; a\,x_1 \cup b\,x'_1)$, $(x_2,\; a\,x_2 \cup b\,x'_2)$. Ihre Entfernung ist also

$$\Delta\, l = \Delta\, x \cup \Delta\, y = (x_1 \between x_2) \cup [(a\,x_1 \cup b\,x'_1) \between (a\,x_2 \cup b\,x'_2)]$$

$$= (x_1 \between x_2) \cup (a \between b)\,(x_1 \between x_2) = x_1 \between x_2 = \Delta\, x.$$

Die Entfernung zweier beliebigen Pte einer Gen ist

$$\Delta\, l = \Delta\, x$$

Der Winkel zwischen zwei beliebigen Gen eines Strahlenbüschels beträgt

$$\Delta\, \lambda = \Delta\, \xi. \tag{14·2}$$

Für die Ge (2·2) kann man leicht folgende Relation verifizieren

$$\Delta y = (a \between b) \;\; \Delta x = a\,(f)\;\; \Delta\, x. \tag{14·21}$$

Für die Kollineare (2·4) ist, wie man leicht ausrechnet

$$\Delta\, x = (a \between b)\, \Delta\, m, \qquad \Delta\, y = (c \between d)\, \Delta\, m, \tag{14·3}$$

wo $\Delta\, m = m_1 \between m_2$ ist. Deshalb haben wir

$$\Delta\, l = [(a \between b) \cup (c \between d)]\, \Delta\, m = [a\,(\varphi) \cup a\,(\psi)]\, \Delta\, m, \tag{14·31}$$

---

10) Den Ausdruck $a \between b$ nennen wir Abweichung von $a$ und $b$.

Wir können also folgenden allgemeinen Satz aussprechen:

Die Entfernung zweier beliebigen Pte einer einfachen Linie[11]) ist gleich der logischen Summe der Schwankungen von $x$ und $y$, multipliziert mit der Abweichung der unabhängigen Variablen.

Der Winkel zwischen zwei beliebigen Gen einer einfachen Geraden gesammtheit[12]) ist gleich der logischen Summe der Schwankungen von $\xi$ und $\eta$, multipliziert mit der Abweichung der unabhängigen Variablen.

§ 15. **Durchmesser, Fundamentalpunkte und Fundamentalgeraden.**

Wir nennen Durchmesser einer einfachen Linie das Maximum des Ausdruckes

$$\Delta\, l = (x_1 \between x_2) \cup (y_1 \between y_2),$$

wo $x_1$, $y_1$, $x_2$, $y_2$ Koordinaten aller möglichen Pte der Linie bedeuten.

Wir nennen Durchmesser einer einfachen Gesammtheit von Geraden das Maximum des Ausdruckes

$$\Delta\, \lambda = (\xi_1 \between \xi_2) \cup (\eta_1 \between \eta_2), \quad (15)$$

wo $\xi_1$, $\eta_1$, $\xi_2$, $\eta_2$ Koordinaten aller möglichen Gen der Gesammtheit bedeuten.

Zwei Pte einer einfachen Linie nennen wir Fundamentalpunkte dieser Linie, wenn ihre Entferung gleich dem Durchmesser der Linie ist.

Zwei Gen einer einfachen Gesammtheit von Gen nennen wir Fundamentalgeraden dieser Gesammtheit, wenn der Winkezwischen ihnen gleich dem Durchmesser der Gesammtheit ist.

Aus dieser Definition folgen die Sätze:

Der Durchmesser jeder einfachen Linie ist gleich der logischen Summe der Schwankungen beider Variablen.

Der Durchmesser jeder einfachen Geradengesammtheit ist gleich der logischen Summe der Schwankungen beider Variablen.

[11]) Einfache Linien nennen wir Ge und Kollineare.

[12]) Die dualen Gebilde zu (2′2), (2′3), (2′4), (2′5) sind Strahlenbüschel $\eta = f(\xi)$ Büschelschar $\eta = f(\xi, p)$ wo $p$ variabler Parameter ist, Koinzidente $\xi = \varphi(m)$, $\eta = \psi(m)$ und Koinzidentenschar $\xi = \varphi(m, p)$, $\eta = \psi(m, p)$. Einfache Geradengesammtheiten nennen wir den Strahlenbüschel und die Koinzidente.





Der Durchmesser der Gen ist gleich $T$.

Der Durchmesser des Strahlenbüschels ist gleich $T$.

Die Umkehrung des letzten Satzes werden wir später im Zusammenhange mit der Transformationentheorie untersuchen (§ 17).

Die Kollineare (2·4) hat die Fundamentalpunkte

$$(a, c),\ (b, d),$$

die Ge (2·2) die Fundamentalpunkte

$$(T, a),\ (Z, b).$$

Die Koinzidente, deren Gg dieselben Koeffizienten besitzt wie (2·4) hat die Fundamentalgeraden

$$[a, c],\ [b, d], \quad (15{\cdot}1)$$

der Strahlenbüschel $\eta = a\xi \cup b\xi'$ die Fundamentalgeraden

$$[T, a],\ [Z, b]. \quad (15{\cdot}11)$$

Die Entfernung zweier Pte einer einfachen Linie ist gleich dem Durchmesser der Linie multipliziert mit der Abweichung der unabhängigen Variablen:

$$\Delta\, l = D\, \Delta\, m.$$

Der Winkel zwischen zwei Gen einer einfachen Geradengesammtheit ist gleich dem Durchmesser der Gesammtheit multipliziert mit der Abweichung der unabhängigen Variablen:

$$\nabla\, \lambda = D\, \Delta\, m. \quad (15{\cdot}2)$$

Weiter gilt der Satz, dessen Beweis wir dem Leser überlassen:

Die Kollineare (2·4) besitzt so viele Paare von Fundamentalpunkten, als es Wertpaare $m_l$, $m_k$ gibt, wo $m_l$ beliebig ist, und $m_k$ den Wert

$$m_k = (D' \cup m'_l)\, v \cup D m'_l v'$$

besitzt, wo $v$ beliebig ist, und $D$ den Durchmesser der Kollinearen bezeichnet.

Die Fundamentalpunkte der Gen (2·2) sind

$$(x, ax \cup bx'),\ (x', bx \cup ax'),$$

wo $x$ beliebig ist.

Die Koinzidente $\xi = am \cup bm'$, $\eta = cm \cup dm'$ besitzt so viele Paare von Fundamentalgeraden, als es Wertpaare $m_l$, $m_k$ gibt, wo $m_l$ beliebig ist, und $m_k$ den Wert

$$m_k = (D' \cup m'_l)\, v \cup D m'_l v' \quad (15{\cdot}3)$$

besitzt, wo $v$ beliebig ist, und $D$ den Durchmesser der Koinzidenten bezeichnet.

Die Fundamentalgeraden des des Strahlenbüschels sind

$$[\xi, a\xi \cup b\xi'],\ [\xi', b\xi \cup a\xi'], \quad (15{\cdot}31)$$

wo $\xi$ beliebig ist, wenn seine Gg $\eta = a\xi \cup b\xi'$ lautet.

Sind zwei Pte $(a, c)$, $(b, d)$ gegeben, so geht durch diese Pte die Kollineare (2·4) hindurch. Wir werden jetzt alle einfachen Linien bestimmen, welche durch diese zwei Pte hindurchgehen. Weil $(a, c)$ ein Pt dieser Linien ist, so haben wir

$$x = an \cup un', \quad y = cn \cup vn', \tag{15·4}$$

wo $u$ nnd $v$ vorläufig ubestimmt sind, und $n$ Variable ist. Weil (15·4) den Pt $(b, d)$ anthält hat man auch

$$b = an \cup un', \quad d = cn \cup vn'.$$

Dieses System ist mit der Gg

$$\begin{aligned} &[(a \between b) \cup (c \between d)]\, uvn \cup (b' \cup d')\, uvn' \cup [(a \between b) \cup (c \between d)]\, uv'n \cup \\ &\cup [(a \between b) \cup (c \between d)]\, u'vn \cup (b' \cup d)\, uv'n' \cup (b \cup d')\, u'vn' \cup \\ &\cup [(a \between b) \cup (c \between d)]\, u'v'n \cup (b \cup d)\, u'v'n' = Z \end{aligned}$$

äquivalent, welche für $u, v, n$ möglich ist und die Lösung

$$\left.\begin{aligned} u &= \{[b \cup a'(c)(d)]\, p \cup bp'\}\, q \cup \{b\,[a' \cup (c \between d)]\, p \cup bp'\}\, q' \\ v &= \{(d \cup c'(a)(d)]\, p \cup dp'\}\, r \cup \{d\,[c' \cup (a \between b)]\, p \cup dp'\}\, r' \\ n &= (a)(b)\,(c)(d)\,p \end{aligned}\right\} \tag{15·41}$$

besitzt, wo $p$, $q$, $r$ beliebig sind. Wenn wir jetzt (15·4) mit (2·4) vergleichen, so sehen wir, dass ein Pt von (15·4) mit den Werten $p = p_i$, $q = q_i$, $r = r_i$, $n = n_i$ ein Pt von (2·4) ist, wenn das System

$$am \cup bm' = an_i \cup u_i n'_i, \qquad cm \cup dm' = cn_i \cup v_i n'_i$$

möglich ist, wo $u_i$ und $v_i$ die Werte von $u$ und $v$ für $p_i$, $q_i$, $r_i$ bedeuten. Dieses System ist aber möglich, wenn

$$\begin{aligned} &[a'b'(c)(d)\, pq \cup ab\,(c)(d)\, pq' \cup c'd'\,(a)(b)\, pr \cup \\ &\cup cd\,(a)(b)\, pr']\, n_i = Z \end{aligned} \tag{15·411}$$

ist. Ist diese Resultante von $Z$ verschieden, was auch möglich ist, so ist (15·4) von (2·4) verschieden und kein Teil von (2·4). Daraus folgt:





| | |
|---|---|
| Durch zwei Fundamentalpunkte einer einfachen Linie können andere einfache Linien hindurchgehen. | Durch zwei Fundamentalgeraden einer einfachen Geradengesammtheit können andere einfache Gesammtheiten von Gen hindurchgehen. |

Wenn wir den Durchmesser $D_0$ von (15·4) ausrechnen bekommen wir

$$D_0 = (a \between b) \cup (c \between d) \cup [(a \between q) \cup (c \between r)]\, p = D \cup [(a \between q) \cup (c \between r)]\, p,$$

wo $D$ den Durchmesser von (2·4) bezeichnet. Es ist also

$$D \subset D_0.$$

Dies führt zum Satze:

| | |
|---|---|
| Durch zwei gegebene Pte geht eine einzige einfache Linie mit dem Durchmesser, welcher der Entfernung dieser Pte gleich, ist, hindurch. Ausserdem gehen durch diese Pte andere Linien mit anderen Durchmessern hindurch. | Durch zwei gegebene Gen geht eine einzige einfache Geradengesammtheit mit dem Durchmesser, welcher dem Winkel zwischen diesen Gen gleich ist, hindurch. Ausserdem gehen durch diese Gen andere Geradengesammtheiten mit anderen Durchmessern hindurch. |

Setzen wir für die gegebenen Pte $(a, c)$, $(b, d)$ $b = a'$, in welchem Falle die Entfernung beider Pte gleich $T$ ist, so folgt aus (15·41) $u = a'$ $v = d$; (15·4) nimmt dann die Gestalt

$$x = am \cup a'm', \qquad y = cm \cup dm' \tag{15·5}$$

an. Dann ist auch (15·411) befriedigt. (15·5) ist eine Ge, denn aus der ersten Gg (15·5) folgt $m = ax \cup a'x'$. Setzen wir diesen Wert in die zweite Gg ein, so erhalten wir

$$y = (ca \cup da')\, x \cup (da \cup ca')\, x'. \tag{15·51}$$

Sind im allgemeinen die Pte $(a, c)$, $(b, d)$ entgegengesetzt, ist also

$$a = a, \quad b = b, \quad c = c, \quad d = [(a \between b) \cup c']\, w \cup (a)(b)\, c'w', \tag{15·6}$$

wo $w$ beliebig ist, so ist in diesem Falle (15·411) auch befriedigt. (15·4) stellt dann auch eine einfache Linie dar und zwar die Linie mit der Gg

$$x = am \cup bm', \qquad y = cm \cup [(a \between b) \cup c']\, w \cup (a)(b)\, c'w'. \quad (15{\cdot}61)$$

Denn aus (15·41) folgt $u = b$, $\quad v = [(a \between b) \cup c']\, w \cup (a)(b)\, c'w'$. Dies gibt den Satz:

D u r c h z w e i e n t g e g e n g e s e t z t e P t e g e h t e i n e e i n z i g e e i n f a c h e L i n i e, u n d z w a r e i n e G e, o d e r e i n e L i n i e m i t d e r G g (2·4) h i n d u r c h wo $(a, c)$, $(b, d)$ entgegengesetzte Pte mit den Koordinaten (15·6) sind.

D u r c h z w e i e n t g e g e n g e s e t z t e G e n g e h t e i n e e i n z i g e e i n f a c h e G e r a d e n g e s a m m t h e i t, u n d z w a r e i n S t r a h l e b ü s c h e l o d e r e i n e G e s a m m t h e i t m i t d e r G g $\xi = am \cup bm'$, $\eta = cm \cup dm'$, hindurch, wo $[a, c]$, $[b, d]$ entgegengesetzte Gen mit den Koordinaten (15·6) sind.

§ 16. **Liniengeschlechter.** Wir t r a n s f o r m i e r e n d i e L i n i e oder Liniengesammtheit (2·5) mit Hilfe der Transformation

$$\begin{aligned} Tx &= f_1(x, y) = a_1 xy \cup a_2 xy' \cup a_3 x'y \cup a_4 x'y', \\ Ty &= f_2(x, y) = b_1 xy \cup b_2 xy' \cup b_3 x'y \cup b_4 x'y', \end{aligned} \qquad (16)$$

wenn wir anstatt der Koordinaten $x, y$ in (2·5) die neuen Koordinaten (16) einführen.

Ist ein Linie oder Liniengesammtheit

$$\begin{aligned} x &= \varphi(p, m) = apm \cup bpm' \cup cp'm \cup dp'm', \\ y &= \psi(p, m) = epm \cup fpm' \cup gp'm \cup hp'm' \end{aligned} \qquad (16{\cdot}1)$$

und eine Substitution (16) gegeben, welche die inverse Substitution

$$\begin{aligned} T^{-1} x &= F_1(x, y) = \alpha_1 xy \cup \alpha_2 xy' \cup \alpha_3 x'y \cup \alpha_4 x'y', \\ T^{-1} y &= F_2(x, y) = \beta_1 xy \cup \beta_2 xy' \cup \beta_3 x'y \cup \beta_4 x'y' \end{aligned} \qquad (16{\cdot}11)$$

besitzt, wobei, wie aus der Transformationentheorie bekannt ist

$$\prod_{i=1}^{4} (a'_i \cup b'_i) \cup \prod_i (a'_i \cup b_i) \cup \prod_i (a_i \cup b'_i) \cup \prod_i (a_i \cup b_i) = Z, \quad (16{\cdot}12)$$





$$\prod_{i=1}^{4} (\alpha'_i \cup \beta'_i) \cup \prod_i (\alpha'_i \cup \beta_i) \cup \prod_i (\alpha_i \cup \beta'_i) \cup \prod_i (\alpha_i \cup \beta_i) = Z \quad (16{\cdot}121)$$

gilt, so sind, wie man leicht ausrechnet, die Koordinaten der transformierten Linien

$$\left.\begin{aligned} x &= F_1(a, e)\, pm \cup F_1(b, f)\, pm' \cup F_1(c, g)\, p'm \cup F_1(d, h)\, p'm', \\ y &= F_2(a, e)\, pm \cup F_2(b, f)\, pm' \cup F_2(c, g)\, p'm \cup F_2(d, h)\, p'm'. \end{aligned}\right\} \quad (16{\cdot}13)$$

Eine Linie (Gesammtheit von Linien)

$x = \varphi(p, m)$, $\qquad y = \psi(p, m)$

ist mit der Linie (Gesammtheit von Linien)

$x_0 = \varphi_0(p, m) \qquad y_0 = \psi_0(p, m)$

k o n g r u e n t, wenn wenigstens eine Substitution (16) existiert, welche (16·2) in (16·21) transformiert, welche also die Relationen

$$Tx = x_0, \quad Ty = y_0$$

befriedigt.

Eine Gesammtheit von Gen

$\xi = \varphi(p, m)$, $\quad \eta = \psi(p, m)$ (16·2)

ist mit der Gesammtheit von Gen

$\xi_0 = \varphi_0(p, m)$, $\quad \eta_0 = \psi_0(p, m)$ (16·21)

k o n g r u e n t, wenn wenigstens eine Substitution $T\xi = f_1(\xi, \eta)$, $T\eta = f_2(\xi, \eta)$ existiert, welche (16·2) in (16·21) transformiert, welche also die Relationen

$$T\xi = \xi_0, \quad T\eta = \eta_0 \quad (16{\cdot}22)$$

befriedigt.

Wir wollen nun die notwendigen und hinreichenden Bedingungen der Kongruenz der Linien vom geometrischen Standpunkte aus untersuchen. Sind zwei Linien

$$\begin{aligned} x &= \varphi(m) = am \cup bm', & y &= \psi(m) = cm \cup dm'; \\ x &= \varphi_0(m) = a_0 m \cup b_0 m', & y &= \psi_0(m) = c_0 m \cup d_0 m' \end{aligned}$$

gegeben und sind ihre Durchmesser gleich, $D = D_0$, so existiert stets eine Substitution (16), (16·11), (16·12), (16·121), welche die erste dieser Linien in die zweite überführt. Denn, wenn die zweite Linie aus der ersten durch die Substitution (16) enstehen soll, so folgt aus (16·13)

$$F_1(a, c) = a_0, \quad F_1(b, d) = b_0, \quad F_2(a, c) = c_0, \quad F_2(b, d) = d_0.$$

Dieses System stellt ein Gleichungssystem, für die Unbekannten $\alpha_1$ bis $\beta_4$ dar. Seine Resultante ist $R = D_0\, D'$; sie ist wegen $D = D_0$ gleich $Z$. Das System ist also für $\alpha_1$ bis $\beta_4$ möglich. Es existiert deshalb eine Transformation, welche die erste gegebene Linie in die zweite überführt. Aus $D = D_0$ schliessen wir weiter, dass die Entfernung der Fundamentalpunkte $(a, c)$, $(b, d)$, $(a_0, c_0)$, $(b_0, d_0)$ durch diese Transformation sich nicht ändert Es ändert sich also auch die Entfernnng aller anderen Fundamentalpunkte nicht.

Aus (15·2) folgt, dass unsere Transformation auch die Entfernung zweier beliebigen Pte der Linie nicht ändert; sie ist also eine Substitution. Umgekehrt, wenn es eine Substitution gibt, welche die Linie $x = \varphi\,(m)$, $y = \psi\,(m)$ in die Linie $x = \varphi_0\,(m)$, $y = \psi_0\,(m)$ überführt, so ändert diese Substitution als solche die Entfernung der Fundamentalpunkte nicht. Wir haben also den Satz:

Die notwendige und hinreichende Bedingung der Kongruenz zweier Linien ist die Gleichheit ihrer Durchmesser:

Die notwendige und hinreichende Bedingung der Kongruenz zweier Gesammtheiten von Gen ist die Gleichheit ihre Durchmesser:

$$D_0 = (a_0 \between b_0) \cup (c_0 \between d_0) = (a \between b) \cup (c \between d) = D. \tag{16·3}$$

Sind zwei Gesammtheiten von Linien

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi\,(p, m) = apm \cup bpm' \cup cp'm \cup dp'm', \\ y &= \psi\,(p, m) = epm \cup fpm' \cup gp'm \cup hp'm', \end{aligned}\right. \tag{16·41}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi_0\,(p, m) = a_0pm \cup b_0pm' \cup c_0p'm \cup d_0p'm', \\ y &= \psi_0\,(p, m) = e_0pm \cup f_0\,pm' \cup g_0p'm \cup h_0p'm' \end{aligned}\right. \tag{16·42}$$

gegeben, dann beweist man analog, dass der Bedingung (16·3) das Bedingungssystem

$$\left.\begin{aligned} (a_0 \between b_0) \cup (e_0 \between f_0) &= (a \between b) \cup (e \between f), \\ (a_0 \between c_0) \cup (e_0 \between g_0) &= (a \between c) \cup (e \between g), \\ (a_0 \between d_0) \cup (e_0 \between h_0) &= (a \between d) \cup (e \between h), \\ (b_0 \between c_0) \cup (f_0 \between g_0) &= (b \between c) \cup (f \between g), \\ (b_0 \between d_0) \cup (f_0 \between h_0) &= (b \between d) \cup (f \between h), \\ (c_0 \between d_0) \cup (g_0 \between h_0) &= (c \between d) \cup (g \between h). \end{aligned}\right\} \tag{16·4}$$





entspricht.

Die Gesammtheit aller miteinander kongruenten Linien nennen wir Liniengeschlecht. Jedes Liniengeschlecht ist durch die Fundamentalpunkte, oder, was das selbe ist, durch den Durchmesser bestimmt.

Die Liniengeschlechter bezeichnen wir durch die Symbole

$$(L_a)\,,\ \begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix} \;\Big|\; [M_a]\,,\ \begin{bmatrix} a, & b \\ c, & d \end{bmatrix} \tag{16·5}$$

wo in $(L_a)$ bezw. $[M_a]$ der Buchstabe $a$ hen Durchmesser bedeutet, und in $\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}$ bezw. $\begin{bmatrix} a, b \\ c, d \end{bmatrix}$ die Koordinaten der Fundamentalpunkte $x_1 = a, y_1 = c$, $x_2 = b$, $y_2 = d$ angegeben sind. Mit dem Symbol $L_a$ bezw. $M_a$ bezeichnen wir die Linien selbst.

Weil wir früher bewiesen haben, dass die Klasse der Transformationen, welche die Entfernung nicht ändern, mit der Klasse der Transformationen, welche die Kollinearität nicht ändern, und beide Klassen mit der Klasse der Substitutionen identisch sind, so folgt daraus, dass das Liniengeschlecht alle Linien enthält, welche dieselben, sich auf den Begriffen der Entfernung und Kollinearität stützenden Eigenschaften besitzen, d. h. Eigenschaften, die bei der Substitution invariant bleiben.

Weil wir früher bewiesen haben, dass die Klasse der Transformationen, welche den Winkel nicht ändern mit der Klasse der Transformationen, welche die Koinzidenz nicht ändern, und beide Klassen mit der Klasse der Substitutionen identisch sind, so folgt daraus, dass das Geschlecht einer Gesammtheit von Gen alle Gesammtheiten enthält, welche dieselben, sich auf den Begriffen des Winkels und Koinzidenz stützenden Eigenschaften besitzen, d. h. Eigenschaften, die bei der Substitution invariant bleiben.

§ 17. **Gerade I und Gerade II.** Die oben angegebenen Grundlinien der Klassifikation zwingen uns zur Präzisiernng des Begriffes der Gen. Ge haben wir die Gesammtheit der Pte genannt, welche dürch die Gleichung (2·2) bestimmt sind. Nach dem vorigen Satze gehört diese Ge zum Geschlecht $(L_T)$. Es existiesen jedoch Kollinearen, welche nicht die Gg (2·2) besitren, und desen Durchmesser auch gleich $T$ ist. Diese Kollinearen besitzen dieselben, bei der Substiution invarianten Eigenschaften, wie die Ge (2·2). Wir definieıen deshalb:

Wir nennen G e r a d e jede Kollineare vom Geschlechte $(L_T)$, *dh.*

$$\begin{pmatrix} a, b \\ c, [(a \between b) \cup c'] u \cup (a \between b) c' u' \end{pmatrix},$$

Wir nennen S t r a h l e n b ü s c h e l jede Koinzidente vom Geschlechte $[M_T]$, *dh.*

$$\begin{bmatrix} a, b \\ c, [(a \between b) \cup c'] u \cup (a \between b) c' u' \end{bmatrix}, \quad (17)$$

wo $a$, $b$, $c$ Konstanten sind und $u$ beliebig ist.

Die Ge mit der Gg (2·2) nennen wir G e r a d e I, die Ge (17), wenn $a \neq b'$ ist, G e r a d e II.

Den Strahlenbüschel mit der Gg $\eta = a\xi \cup b\xi'$ nennen wir S t r a h l e n b ü s c h e l I, den Strahlenbüschel (17), wenn $a \neq b'$ ist, S t r a h l e n b ü s c h e l II.

Die Linienkoordinaten betreffen die Gen II nicht. Deshalb sind die Gesammtheiten von Gen wie Strahlenbüschel $\eta = a\xi \cup b\xi'$, Geradenbüschel $y = apx \cup bpx' \cup cp'x \cup dp'x'$ und Büschelschar $\eta = ap\xi \cup bp\xi' \cup \dot{\cup}\, cp'\xi \,\dot{\cup}\, dp'\xi'$ Gesammtheiten von Gen I. Der Strahlenbüschel $\eta = a\xi \cup b\xi'$ ist mit der Gen I dual. Mit der Gen II ist der Strahlenbüschel II dual. Der Strahlenbüschel I hat in Punktkoordinaten die Gg (4), der Strahlenbüschel II die Gg

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 m \,\dot{\cup}\, vm', \\ y &= y_0 m \cup \{[(x_0' \cup y_0') u \cup x_0 y_0' u'] v \,\dot{\cup}\, [(x_0 \cup y_0') u \,\dot{\cup}\, x_0' y_0' u'] v'\} m'. \end{aligned}\right\} (17{\cdot}1)$$

Beide Strahlenbüschel haben den Mittelpunkt $(x_0, y_0)$. Man kann leicht zeigen, dass ein Pt des Strahlenbüschels (17·1), welcher durch die Werte $m_1$, $u_1$, $v_1$ bestimmt ist dann und nur dann ein Pt des Strahlenbüschels (4) ist, wenn

$$m'_1 (x_0 )( v_1) = Z \qquad (17{\cdot}11)$$





ist. Umgehelrt ist ein Pt von (4), welcher durch die Werte $p_1$, $x_1$ bestimmt ist dann und nur dann ein Pt von (17·1), wenn

$$x_1 x_0 y'_0 \,\dot{\cup}\, x'_1 x'_0 y_0 = Z \qquad (17{\cdot}12)$$

gilt. Jeder Pt des Strahlenbüschels I mit dem Mittelpunkte $(x_0, y_0)$ hat vom Pte $(x_0, y'_0)$ die Entfernung $T$; dies gilt für Strahlenbüschel II nicht.

Der Unterschied zwischen Ge I und Ge II tritt klar hervor, wenn wir beide Linien mit der Semikollinearen (§ 13) vergleichen. In dieser Beziehung lässt sich folgender Satz beweisen.

Jede Ge I ist Semikollineare. Ge II kann kann nicht Semikollineare sein.

Jeder Strahlenbüschel I ist Semikoinzidente. Strahlenbüschel II kann nicht Semikoinzidente sein.

§ 18. **Kanonische Linien.** Die Eigenschaften des Symbols $\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}$ folgen aus den Eigenschaften des Ausdruckes für die Entfernung zweier Pte und den Eigenschaften der Substitution. Aus (16) und (16·11) folgt, dass $f_1(a, c)$, $f_1(b, d)$, $f_2(a, c)$, $f_2(b, d)$ und die analogen Ausdrücke $F_1$, $F_2$ die Koordinaten der transformierten Fundamentalpunkte bedeuten. Weil in demselben Geschlechte die Fundamentalpunkte dieselbe Entfernung besitzen, so haben wir:

$$\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 [a, c], f_1 [b, d] \\ f_2 [a, c], f_2 [b, d] \end{pmatrix}. \qquad \begin{bmatrix} a, b \\ c, d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 (a, c), f_1 (b, d) \\ f_2 (a, c), f_2 (b, d) \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Aus der Symmetrie der Entfernung folgt

$$\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b, a \\ d, c \end{pmatrix}. \qquad \begin{bmatrix} a, b \\ c, d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b, a \\ d, c \end{bmatrix}. \quad (18{\cdot}01)$$

Weiter lassen sich aus den Eigenschaften der Substitution folgende Relationen beweisen:

$$\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c, d \\ a, b \end{pmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} a, b \\ c, d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c, d \\ a, b \end{bmatrix}, \quad (18{\cdot}03)$$

$$\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a', b' \\ c, d \end{pmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} a, b \\ c, d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a', b' \\ c, d \end{bmatrix}, \quad (18{\cdot}03)$$

$$\begin{pmatrix} a, & b\\ c, & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\between c, & b\between d\\ c & d\end{pmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} a, & b\\ c, & d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\between c, & b\between d\\ c\;, & d\end{bmatrix}, \tag{18·04}$$

$$\begin{pmatrix} a, & b\\ c, & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\between k, & b\between k\\ c\between l, & d\between l\end{pmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} a, & b\\ c, & d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\between k, & b\between k\\ c\between l, & d\between l\end{bmatrix}, \tag{18·05}$$

wo $k$ und $l$ beliebig sind,

$$\begin{pmatrix} Z, a\\ Z, b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z, & Z\\ Z, & a\cup b\end{pmatrix}. \qquad \begin{bmatrix} Z, a\\ Z, b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z, & Z\\ Z, & a\cup b\end{bmatrix}. \tag{18·06}$$

Nun folgt aus (18·05) und (18·06)

$$\begin{pmatrix} a, & b\\ c, & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\between a, & a\between b\\ c\between c, & c\between d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z, & a\between b\\ Z, & c\between d\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} Z, & Z\\ Z, & [a\between b]\cup[c\between d]\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z, & Z\\ Z, & D\end{pmatrix},$$

wo $D$ der Durchmesser ist. Aus (18·01), (18·02), (18·03) deduzieren wir weitere Symbole, welche $\begin{pmatrix} a, & b\\ c, & d\end{pmatrix}$ gleich sind. Sammt dem vorigen sind dies:

$$\begin{pmatrix} Z, & Z\\ Z, & D\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Z, & D\\ Z, & Z\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} D, & Z\\ Z, & Z\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Z, & Z\\ D, & Z\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} T, & T\\ Z, & D\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Z, & D\\ T, & T\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} D, & Z\\ T, & T\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} T, & T\\ D, & Z\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Z, & Z\\ T, & D'\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} T, & D'\\ Z, & Z\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} D', & T\\ Z, & Z\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Z, & Z\\ D', & T\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} T, & T\\ T, & D'\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} T, & D'\\ T, & T\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} D', & T\\ T, & T\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} T, & T'\\ D', & T\end{pmatrix}.$$

Vergleicht man diese Symbole miteinander, so sieht man, dass man sie auf 8 folgende reduzieren kann:

$$\begin{pmatrix} D, & Z\\ Z, & Z\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Z, & Z\\ D, & Z\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} D' & T\\ Z, & Z\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} T, & T\\ D, & Z\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} T, & T\\ D', & T\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} D', & T\\ T, & T\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} D, & Z\\ T, & T\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Z, & Z\\ D', & T\end{pmatrix}. \tag{18·1}$$





Die entsprechenden Linien sind:

$$\left.\begin{array}{llllll} x = Dm & x = Z & x = D'\cup m' & x = T & x = T & x = D'\cup m' \\ y = Z, & y = Dm, & y = Z, & y = Dm, & y = D'\cup m', & y = T, \\ & & x = Dm & x = Z & & \\ & & y = T, & y = D'\cup m'. & & \end{array}\right\} \tag{18·11}$$

Die Linien (18·11) nennen wir kanonische für das Geschlecht $(L_D)$. Wir erhalten die kanonischen Linien durch Transformation der Fundamentalpunkte in Pte $(Z, Z)$, $(T, Z)$, $(Z, T)$, $(T, T)$ und auf spezielle Linien $y = Z$, $x = T$, $y = T$, $x = Z$.

Die Ge hat folgende kanonische Gen:

$$y = Z, \quad x = Z, \quad y = T, \quad x = T. \tag{18·12}$$

Jede einfache Linie besitzt dieselben bei der Substitution invarianten Eigenschaften wie die kanonischen Linien desselben Geschlechtes.

Jede einfache Gesammtheit von Gen I besitzt dieselben bei der Substitution invarianten Eigenschaften, wie die kanonischen Linien desselben Geschlechtes.

Der Beweis folgt aus dem Begriffe der kanonischen Linien.

Jeder Kollinearenbüschel ist durch zwei Kollinearen bestimmt.

Jede Koinzidentenschar ist durch zwei Koinzidenten bestimmt.

Denn die Gg des Kollinearenbüschels

$$\begin{aligned} x &= \varphi(p, m) = apm \cup bpm' \cup cp'm, dp'm', \\ y &= \psi(p, m) = epm \cup fpm' \cup gp'm \cup hp'm' \end{aligned} \tag{18·2}$$

kann in der Form

$$\left.\begin{aligned} x &= (am \cup bm')\, p \cup (cm \cup dm')\, p' = \varphi(T, m)\, p \cup \varphi(Z, m)\, p', \\ y &= (em \cup fm')\, p \cup (gm \cup hm')\, p' = \psi(T, m)\, p \cup \psi(Z, m)\, p' \end{aligned}\right\} \tag{18·21}$$

geschrieben werden. Der Kollinearenbüschel (18·2) ist durch die Kollinearen

$$\left.\begin{array}{ll} x = \varphi\,(T, m) = am \smile bm' & x = \varphi\,(Z, m) = cm \smile dm' \\ y = \psi\,(T, m) = em \smile fm' & y = \psi\,(Z, m) = gm \smile hm' \end{array}\right\} \quad (18{\cdot}22)$$

bestimmt.

Ist $a = T,\ b = Z,\ c = T,\ d = Z,$ so geht (18·2) in

$$y = f\,(p, x) = epx \smile fpx' \smile gp'x \smile hp'x', \qquad (18{\cdot}23)$$

also in Geradenbüschel über. Die Ggen (18·22) verwandelm sich dann in

$$y = f\,(T, x) = ex \smile fx', \qquad y = f\,(Z, x) = gx \smile hx'. \quad (18{\cdot}29)$$

Die Linien (18·22) bezw. (18·24) nennen wir G e n e r a t o r e n von (18·2) bezw. (18·23). Die Generatoren haben für Gesammtheiten von Linien dieselbe Bedeutung, wie Fundamentalpunkte für einfache Linien.

Für Symbole von Geschlechtern der Kollinearenbüschel und Koinzidentenscharen wählen wir also die Symbole

$$(L_{a/b}),\ \left(\begin{array}{c|c} a,\ b & c,\ d \\ e,\ f & g,\ h \end{array}\right), \qquad [M_{a/b}]\ \left[\begin{array}{c|c} a,\ b & c,\ d \\ e,\ f & g,\ h \end{array}\right], \quad (18{\cdot}3)$$

wo im ersten Symbole $a$ und $b$ die Durchmesser der beiden Generatoren, im zweiten $a, b, c, d$ die Koordinaten der Fundamentalpunkte des einen, $e, f, g, h$ die Koordinaten der Fundamentalpunkte des anderem Generators bedeuten. Analog für Scharen. Die Büschel bezw. die Scharen selbst bezeichnen wir durch $L_{a/b}$, $M_{a/b}$.

Die Darstellung der Sätze, welche an diesen Ort gehören würde uns zu weit führen. Wir geben nur, ohne Beweis, folgenden Satz:

Der Büschel

$$\left(\begin{array}{c|c} a,\ b & c,\ d \\ e,\ f & g,\ h \end{array}\right)$$

kann, wenn es sich um Eigenschaften, welche bei der Substitution invariant bleiben, handelt, auf den Büschel

$$\left(\begin{array}{c|c} Z,\ Z & Tc,\ Td \\ Z,\ [a \between b] \smile [e \between f] & Tg,\ Th \end{array}\right)$$

Die Schar

$$\left[\begin{array}{c|c} a,\ b & c,\ d \\ e,\ f & g,\ h \end{array}\right] \quad (18{\cdot}4)$$

kann, wenn es sich um Eigenschaften, welche bei der Substitution invariant bleiben, handelt, auf die Schar

$$\left[\begin{array}{c|c} Z\ Z & Tc,\ Td \\ Z, (a \between b) \smile (e \between f) & Tg,\ Th \end{array}\right] \quad (18{\cdot}41)$$





reduziert werden; dabei erhalten wir die Werte $Tc$ bis $Th$ auf Grund der Substitution

$$Tx = [(a)(b) \smile (e)(f)]\,xy \smile$$
$$\smile (e \between f)\,xy' \smile [(a \between b) \smile$$
$$\smile (e)(f)]\,x'y,$$
$$Ty = xy \smile [(a \between b) \smile (e)(f)]\,xy' \smile$$
$$\smile (a)(b)\,(e \between f)\,x'y.$$

reduziert werden; dabei erhalten wir die Werte $Tc$ bis $Th$ auf Grund der Substitution

$$\left.\begin{array}{c} T\xi = [(a)(b) \smile (e)(f)]\,\xi\eta \smile \\ \smile (e \between f)\,\xi\eta' \smile [(a \between b) \smile \\ \smile (e)(f)]\,\xi'\eta, \\ T\eta = \xi\eta \smile [(a \between b) \smile \\ (e)(f)]\xi\eta' \smile (a)(b)(e \between f)\xi'\eta \end{array}\right\} (18{\cdot}411)$$

§ 19. **Verallgemeinerte Kollineare und verallgemeinerte Koinzidente.**

J e d e d r e i P u n k t e e i n e r K o l l i n e a r e n, a l s o a u c h e i n e r G e r a d e n s i n d k o l l i n e a r.

J e d e d r e i G e n I e i n e r K o i n z i d e n t e n, a l s o a u c h e i n e s S t r a h l e n b ü s c h e l s s i n d k o i n z i d e n t.

Beweis. Es genügt zu beweisen, dass jede drei Pte der kanonischen Kollinearen

$$x = Dm, \qquad y = Z, \qquad (\alpha)$$

wo $D$ beliebig ist, kollinear sind. Sind drei beliebige Pte von ($\alpha$), nämlich $P\,(x_i, Z)$, $Q\,(x_k, Z)$, $R\,(x_l, Z)$ gegeben, so haben wir wegen $x_i = Dm_i$, $x_k = Dm_k$, $x_l = Dm_l$

$$P \Delta Q = D\,(m_i \between m_k), \qquad Q \Delta R = D\,(m_k \between m_l),$$

also

$$(P \Delta Q) \between (Q \Delta R) = D\,(m_i \between m_k \between m_k \between m_l) = D\,(m_i \between m_l) = P \Delta R.$$

Die Bedingung der Kollinearität ist also erfüllt.

Die Kollinearität ist also in unserem System der Geometrie keine charakteristische Eigenschaft der Gen. Die Ge unterscheidet sich von anderen Linien durch ihren Durchmesser $T$. Die Kollinearität dagegen ist allen Kollinearen gemeinsam. Unsere Geometrie ähnelt also einer gewöhnlichen ebenen Geometrie des Kreises, mit endlichem oder unendlichen Radius.

Den Fundamentalpunkten entsprechen die Endpunkte des Durchmessers, dem Durchmesser der Linien der Durchmesser des Kreises. Jedes Liniengeschlecht enthält Kreise mit demselben Durchmesser.

Um die Beziehung der Kollinearität noch näher zu untersuchen, wollen wir nach G e s a m m t h e i t e n v o n P t e n fragen, d e r e n j e d e d r e i k o l l i n e a r sind. Wir werden diese Gesammtheit v e r a l l g e m e i n e r t e K o l l i n e a r e nennen. Die duale Form, deren alle drei Geraden I koinzident sind, nennen wir v e r a l l g e m e i n e r t e K o i n z i d e n t e.

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Gg

$$x = \varphi(m) = Am \cup Bm',$$
$$y = \psi(m, p) = Cmp \cup$$
$$\cup Dmp' \cup Em'p \cup Fm'p',$$

wo $m$ unabhängige Variable und $p$ Parameter ist, eine verallgemeinerte Kollineare darstellt, ist

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Gg

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \varphi(m) = Am \cup Bm', \\ \eta &= \psi(m, p) = Cmp \cup \\ &\cup Dmp' \cup Em'p \cup Fm'p', \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

wo $m$ unabhängige Variable und $p$ Parameter ist, eine verellgemeinerte Koinzidente derstellt, ist

$$(A \between B)[(c \between D) \cup (E \between F)] = Z. \qquad (19{\cdot}1)$$

Beweis. Weil jede drei Pte $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$, $(x_3, y_3)$ von (19) kollinear sein müssen, so gibt das nach (9·1) die Bedingungsgleichung

$$[(x_1 \between x_2) \cup (y_1 \between y_2)] \between [(x_2 \between x_3) \cup (y_2 \between y_3)] \between$$
$$\between [(x_3 \between x_1) \cup (y_3 \between y_1)] = Z.$$

Für $x_1$ bis $y_3$ sollen wir die Werte (19), dh.

$$x_i = A m_i p_i \cup A m_i p'_i \cup B m'_i p_i \cup B m'_i p'_i = \varphi(m_i, p_i)$$
$$y_i = C m_i p_i \cup D m_i p'_i \cup E m'_i p_i \cup F m'_i p'_i = \Psi(m_i\, p_i),$$

$i = 1, 2, 3$, setzen. So haben wir z. $B$ für $x_1\, y_1\, x'_2\, y_2\, x_3\, y'_3$:

$$x_1 y_1 x'_2 y_2 x_3 y'_3 = \varphi(m_1, p_1)\, \psi(m_1, p_1) \varphi'(m_2, p_2)\, \psi(m_2, p_2)\, \varphi(m_3, p_3)\, \psi'(m_3, p_3). \quad (\alpha)$$





Aus der Bedingung der Kollinearität folgt

$$\left.\begin{aligned} x_1\, y_1\, x'_2\, y_2\, x_3\, y'_3 = Z, \quad x'_1\, y_1\, x_2\, y_2\, x_3\, y'_3 = Z, \ldots, \\ x'_1\, y'_1\, x_2\, y'_2\, x'_3\, y_3 = Z. \end{aligned}\right. \quad (\alpha_1)$$

Verwandeln wir $(\alpha)$ und $(\alpha_1)$ in die Form $I = Z$, so erhalten wir

$$\Sigma \cup f_i\, (A, B, C, D, E, F)\, \sigma_{mp} = Z, \qquad (\beta)$$

wo $\Sigma \cup$ die logische Summe, $f_i$ Produkte der Koeffizienten $A$ bis $F$, und $\sigma_{mp}$ die kleinsten Bestandteile (Konstituenten) von $m_1, p_1, m_2, p_2, m_3, p_3$ sind. Weil $(\beta)$ für alle $(x, y)$ von (19), also auch für alle $m, p$ gilt, so muss

$$f_i\, (A, B, C, D, E, F) = Z \qquad (\gamma)$$

für alle $i$ sein.

Um die Gestalt von $f_i$ zu bestimmen schreiben wir $(\alpha)$ allgemeiner:

$$\left.\begin{aligned} &(a_1 m_1 p_1 \cup a_2 m_1 p'_1 \cup a_3 m'_1 p_1 \cup a_4 m'_1 p'_1)\ (b_1 m_1 p_1 \cup b_2 m_1 p'_1 \cup \\ &\cup b_3 m'_1 p_1 \cup b_4 m'_1 p'_1) \cup (a'_1 m_2 p_2 \cup a'_2 m_2 p'_2 \cup a'_3 m'_2 p_2 \cup \\ &\cup a'_4 m'_2 p'_2)\ (b_1 m_2 p_2 \cup b_2 m_2 p'_2 \cup b_3 m'_2 b_2 \cup b_4 m'_2 p'_2) \cap \\ &\cap (a_1 m_3 p_3 \cup a_2 m_3 p'_3 \cup a_3 m'_3 p_3 \cup a_4 m'_3 p'_3)\ (b'_1 m_3 p_3 \cup \\ &\cup b'_2 m_3 p'_3 \cup b'_3 m'_3 p_3 \cup b'_4 m'_3 p'_3). \end{aligned}\right\} \quad (\delta)$$

Im kleinsten Bestandteile $x_1, y_1\, x'_2\, y_2\, x_3\, y'_3$ besitzen die Koeffiezienten $f_i$, wie man leicht in $(\delta)$ verifiziert, die Typen $ab\,ab'\,a'b$, $ab\,a'b\,ab'$, $ab'\,ab\,a'b$, $ab'a'b\,ab$, $a'b\,ab\,ab'$, $a'b\,ab'ab$ und die Indices, welche auf das erste, zweite und dritte Paar der Faktoren in den Kombinationen 1, 2, 3 — 1, 2, 4 — 1, 3, 4 — 2, 3, 4 verteilt sind, z. B. $a_1\, b_1\, a_2\, b'_2\, a'_3\, b_3$, $a_1\, b_1\, a_2\, b'_2\, a'_4\, b_4, \ldots$, $a_1\, b_1\, a'_2\, b_2\, a_3\, b'_3$, $a_1\, b_1\, a_2\, b'_2\, a'_3\, b_3 \ldots$ Wir erhalten auf diese Weise in $x_1\, y_1\, x'_2\, y_2\, x_3\, y'_3$ 24 Koeffizienten $f_i$, dh. 24 Ggen vom Typus $(\gamma)$. Es ist leicht festzustellen, dass die Koeffizienten $f_i$ in anderen kleinsten Bestandteilen $\sigma$ nur durch die Paare $ab$, $ab'$, $a'b$, $a'b'$ in den Kombinationen I) $ab$, $ab'$, $a'b$, II) $ab$, $ab'$, $a'b'$, III) $ab$, $a'b$, $a'b'$, IV) $ab'$, $a'b$, $a'b'$ gebildet sind. So ist z. B. $x_1\, y_1\, x'_2\, y_2\, x_3\, y'_3$ durch I) gebildet. Wir erhalten auf diese Weise 96 Koeffizienten $f_i$, also 96 Ggen $(\gamma)$.

In unserem Falle (19) ist $a_1 = A,\ a_2 = A,\ a_3 = B,\ a_4 = B,\ b_1 = C,\ b_2 = D,\ b_3 = E,\ b_4 = F$. Aus den 96 Ggen müssen wir diejenigen ausschliessen, in welchen $f_l$ die Ausdrücke $a_1\, a'_2,\ a'_1\, a_2,\ a_3\, a'_4,\ a'_3\, a_4$ enthalten. Die Anzahl dieser Ggen in jeder Gruppe beträgt 16. Es sind also insgesammt 64 Ggen auszuschliessen. Es bleiben also 32 übrig. Jeder der 32 Ausdrücke $f_l$ hat die gemeinsammen Faktoren $AB$ oder $A'B$. Der ganze Ausdruck besitzt also die Gestalt

$$AB'S \cup A'BS = Z.$$

Setzen wir $S$ hinter die Klammer, so erhalten wir

$$(A \between B)\,(C\,D\,E\,F' \cup C\,D\,E'\,F \cup C\,D'E\,F \cup C'D\,E\,F \cup C\,D'\,E\,F' \cup$$
$$\cup\, C'D\,E\,F' \cup C\,D'E'F \cup C'D\,E'\,F \cup C\,D'\,E'F' \cup C'D\,E'\,F' \cup$$
$$\cup\, C'D'E\,F' \cup C'\,D'\,E'\,F) = Z,$$

oder

$$(A \between B)\ (C\,D\,E\,F \cup C\,D\,E'F' \cup C'\,D'\,E\,F \cup C'\,D'\,E'\,F')' = Z,$$

dh.

$$(A \between B)\ [(C \between D) \cup (E \between F)] = Z.$$

Gilt umgekehrt (19·1), so gilt auch die Beziehung, welche die Kollinearität jeder drei Punkte des Systems (19) charakterisiert. Denn aus (19·1) folgt ($\gamma$), also auch die Bedingung der Kollinearität.

Die Bedingung (19·1) können wir noch in anderer Form schreiben. Sind vier Pte $P_1\,(a_1, b_1),\ P_2\,(a_2, b_2)\ \ P_3\,(a_3, b_3)\ \ P_4\,(a_4, b_4)$ gegeben, so ist die notwendige und hinreichende Bedingung ihrer Kollinearität die Kollinearität jeder drei Pte von ihnen:

$$\begin{array}{ll} \delta_1 \between \delta_2 \between \delta_5 = Z, & \delta_1 \between \delta_4 \between \delta_6 = Z, \\ \delta_3 \between \delta_4 \between \delta_5 = Z, & \delta_2 \between \delta_3 \between \delta_6 = Z, \end{array} \qquad (19\cdot11)$$

wo $P_1 \Delta P_2 = \delta_1,\ \ P_2 \Delta P_3 = \delta_2,\ \ P_3 \Delta P_4 = \delta_3,\ \ P_4 \Delta P_1 = \delta_4,\ \ P_1 \Delta P_3 = \delta_5,\ \ P_2 \Delta P_4 = \delta_6$. Das System (19·11) ist mit

$$\left.\begin{array}{l} \delta_1\,\delta_2\,\delta_5 \cup \delta_1\,\delta'_2\,\delta'_5 \cup \delta'_1\,\delta_2\,\delta'_5 \cup \delta'_1\,\delta'_2\,\delta_5 = Z, \\ \delta_1\,\delta_4\,\delta_6 \cup \delta_1\,\delta'_4\,\delta'_6 \cup \delta'_1\,\delta_4\,\delta'_6 \cup \delta'_1\,\delta'_4\,\delta_6 = Z, \end{array}\right\} \qquad (19\cdot12)$$





$$\left.\begin{array}{l} \delta_3\,\delta_4\,\delta_5 \cup \delta_3\,\delta'_4\,\delta'_5 \cup \delta'_3\,\delta_4\,\delta'_5 \cup \delta'_3\,\delta'_4\,\delta_5 = Z, \\ \delta_2\,\delta_3\,\delta_6 \cup \delta_2\,\delta'_3\,\delta'_6 \cup \delta'_2\,\delta_3\,\delta'_6 \cup \delta'_2\,\delta'_3\,\delta_6 = Z. \end{array}\right\} \qquad (19\cdot12)$$

In unserem Falle ist

$$\begin{array}{ll} (a_1, b_1) = (A, C), & (a_2, b_2) = (A, D), \\ (a_3, b_3) = (B, E), & (a_4, b_4) = (B, F). \end{array} \qquad (\varepsilon)$$

Das System (19.12) nimmt also die Gestalt

$$\begin{array}{llll} \delta_1\,\delta_2\,\delta_5 = (A \between B)\,(C \between D) = Z, & \delta_1\,\delta'_2\,\delta'_5 = Z, & \delta'_1\,\delta_2\,\delta'_5 = Z, & \delta'_1\,\delta'_2\,\delta_5 = Z, \\ \delta_1\,\delta_4\,\delta_6 = (A \between B)\,(C \between D) = Z, & \delta_1\,\delta'_4\,\delta'_6 = Z, & \delta'_1\,\delta_4\,\delta'_6 = Z, & \delta'_1\,\delta'_4\,\delta_6 = Z, \\ \delta_3\,\delta_4\,\delta_5 = (A \between B)\,(E \between F) = Z, & \delta_3\,\delta'_4\,\delta'_5 = Z, & \delta'_3\,\delta_4\,\delta'_5 = Z, & \delta'_3\,\delta'_3\,\delta_5 = Z, \\ \delta_2\,\delta_3\,\delta_6 = (A \between B)\,(E \between F) = Z, & \delta_2\,\delta'_3\,\delta'_6 = Z, & \delta'_2\,\delta_3\,\delta'_6 = Z, & \delta'_2\,\delta'_3\,\delta_6 = Z, \end{array}$$

an, also zusammen (19 1). Die Pte ($\varepsilon$) sind aber Fundamentalpunkte der Generatoren von (19). Dies führt zum Satz:

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Gg (19) eine

| | |
|---|---|
| verallgemeinerte Kollineare darstellt ist die Kollinearität der Fundamental punkte $(A, C)$, $(A, D)$, $(B, E)$, $(B, F)$ der Generatoren von (19). | verallgemeinerte Koinzidente darstellt ist die Koinzidenz der Fundamentalgeraden $[A, C]$ $[A, D]$. $[B, E]$, $[B, F]$ der Generatoren von (19). |

An diesen Satz reiht sich eine Gruppe anderer Sätze, welche wir ohne Beweise anführen.

| | |
|---|---|
| Ein Geradenbüschel I kann nicht verallgemeinerte Kollineare sein. | Ein Büschelscher kann nicht verallgemeinerte Koinzidente sein. |
| Jede Ge I ist eine verallgemeinerte Kollineare. | Jeder Strahlenbüschel I ist eine verallgemeinerte Koinzidente. |

Jede drei Gen 1, welche gemeinsammen Pt besitzen sind koinzident. Die Umkehrung davon gilt aber nicht.

Jede Kollineare ist verallgemeinerte Kollineare.

Jede Koinzidente ist verallgemeinerte Koinzidente.

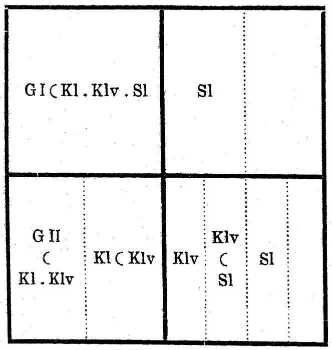
§ 20. **Zusammenstellung untersuchter Linien.** Wir wollen jetzt das gegenseitige Verhältnis untersuchter Linien im Zusammenhange mit der Form der Ggen graphisch illustrieren. Bezeichnungsweise:

G I = Ge I,
G II = Ge II,
Kl = Kollineare,
Klv = Verallgemeinerte Kollineare,
Sl = Semikollineare.

S I = Strahlenbüschel I,
S II = Strahlenbüschel II,
Kd = Koinzidente,
Kdv = Verallgemeinerte Koinzidente,
Sd = Semikoinzidente.

Das Zeichen $A \subset B$ sagt aus, dass $A$ zugleich $B$ ist. Ist $A \subset B$ und $A \subset C$, so schreiben wir kürzer $A \subset B.C$; zB $GI \subset Kl.Klv.Sl$ bezeichnet, dass jede Ge I zugleich Kollineare, Verallgemeinerte Kollineare und Semikollineare ist.

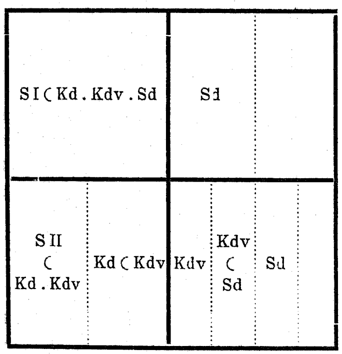
$y = f(x)$ $\qquad$ $y = f(p, x)$




$x = \varphi(m)$, $\qquad$ $x = \varphi(m)$,

$y = \psi(m)$ $\qquad$ $y = \psi(p, m)$

$\eta = f(\xi)$ $\qquad$ $\eta = f(p, \xi)$




$\xi = \varphi(m)$, $\qquad$ $\xi = \varphi(m)$,

$\eta = \psi(m)$ $\qquad$ $\eta = \psi(p, m)$

§ 21. **Gewebe des Geradenbüschels und der Büschelschar.** Wir haben früher [(18·23), (18·24)] bewiesen, dass der Geradenbüschel I mit der Gg





$$y = f(p, x) = apx \cup bpx' \cup cp'x \cup dp'x' \tag{21}$$

durch zwei Generatoren

$$y = f_1(x) = ax \cup bx', \quad y = f_2(x) = cx \cup dx' \tag{21·1}$$

in folgender Weise

$$y = f_1(x)\, p \cup f_2(x)\, p' \tag{21·11}$$

bestimmt ist. Jede zwei Gen I bestimmen einen Geraden üschel I, und jeder Geradenbüschel I ist durch zwei Gen bestimmt. Im speziellen Falle $y = f_1(x) = a$, $y = f_2(x) = c$ reduziert sich (21) auf

$$y = ap \,\dot{\cup}\, cp'. \tag{21·12}$$

Dieses Gebilde ist von der Gen $y = ax \cup cx'$ selbstverständlich verschieden.

Alles dies gilt auch für die duale Form, dh. Büschelschar I.

Der Geradenbüschel

$$y = f_2(x)\, q \cup f_1(x)\, q' \tag{21·13}$$

ist mit (21) identisch. Denn jedem $p$ entspricht ein $q$, nämlich $q = p'$. Desselbe betrifft $q$.

Wir nehmen jetzt an, dass die Generatoren des gegebenen Geradenbüschels gemeinsame Pte besitzen. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist

$$(a \,\underset{\cdot}{)(}\, c)\ (b \,\underset{\cdot}{)(}\, d) = Z, \tag{21·2}$$

weil $(a \,\underset{\cdot}{)(}\, c)\ (b \,\underset{\cdot}{)(}\, d)$ die Entfernung beider Generatoren ist. Lösen wir (21·2) auf, so erhalten wir

$$a = a, \quad b = b, \quad c = c, \quad d = [b \cup (a)(c)]\, m \cup b\, (a \,\underset{\cdot}{)(}\, c)\, m', \tag{21·21}$$

wo $a$, $b$, $c$, $m$ beliebig sind. Zwei Gen I, welche gemeinsame Pte besitzen, haben also die Ggen

$$y = ax \cup bx', \quad y = cx \cup [(a)(c) \cup b]\, m \cup (a \,\underset{\cdot}{)(}\, c)\, bm'. \tag{21·22}$$

Um die Koordinaten der gemeinsamen Pte zu bestimmen setzen wir $ax \cup bx' = cx \cup dx'$, dh. $(a \,\underset{\cdot}{)(}\, c)\, x \,\dot{\cup}\, (b \,\underset{\cdot}{)(}\, d)\, x' = Z$, lösen diese Gleichung nach $x$ auf und substituieren den Wert von $x$ in $y = ax \cup bx'$

oder $y = cx \cup dx'$. Wir erhalten auf diese Weise, wenn wir noch (21·21) berücksichtigen

$$x = (a\,)(\,c)\, m \cup (a\,)(\,c)\,(b \between u)\, m',$$
$$y = [ac \cup (a \between c)\, b]\, m \cup [(ac \cup b)\, u \cup (a \cup c)\, bu']\, m', \tag{21·23}$$

wo $u$ beliebig und $m$ unabhängige Variable ist.

Wir nennen die gemeinsamen Pte zweier Generatoren K n o t e n, und gemeinsame Gen zweier Generatoren B a l k e n.

Aus (21·23) folgt:

Existieren Knoten der Generatoren eines Geradenbüschels so bilden sie einen Kollinearenbüschel.

Existieren Balken der Generatoren einer Büschelschar, so bilden sie eine Koinzidentenschar.

Die Gesammtheit der Knoten der Generatoren nennen wir G e w e b e, die Gesammtheit der Balken der Generatoren G e r ü s t.

Das Gewebe des Geradenbüschels kann nicht Gerade sein.

Das Gerüst der Büschelschar kann nicht Strahlenbüschel sein.

Denn der Durchmesser des Gewebes (21·23) ist gleich

$$D = (a\,)(\,c)\ (b\,)(\,u), \tag{21·24}$$

und für Ge muss $(a\,)(\,c)\ (b\,)(\,u) = T$, dh. $(a \between c) \cup (b \between u) = Z$, oder, was dasselbe ist, $a = c$, $b = u$, sein. Weil $m$ in (21·21) gleich $u$ ist, ist in diesem Falle $d = b$; der Geradenbüschel (21) ist also mit der Gen 1 $y = ax \cup bx'$ identisch.

Jede Ge 1 des Geradenbüschels (21) geht durch die Knoten (21·22) hindurch, und das Gewebe (21·23) enthält alle Pte, welche allen Gen 1 von (21) gemeinsam sind, und nur solche.

Jeder Strahlenbüschel 1 der Büschelschar enthält die Balken der Generatoren der Büschelschar, und das Gerüst der Büschelschar enthält alle Gen 1, welche allen Strahlenbüscheln 1 der Büschelschar gemeinsam sind, und nur solche.

Denn wenn wir die gemeinsamen Pte aller Gen von (21) bestimmen wollen, müssen wir für jedes $x = x_0$ das Minimum von $y$ gleich dem Maximum setzen: $acx_0 \cup bdx'_0 = (a \cup c)\, x_0 \cup (b \cup d)\, x'_0$. Diese Gg ist aber mit $(a \between c)\, x_0 \cup (b \between d)\, x'_0 = Z$ äquivalent.





Reduziert sich das Gewebe (21·23) auf einen einzigen Pt, also der Geradenbüschel I auf Strahlenbüschel I, so ist der Durchmesser von (21·23) gleich $Z$, und umgekehrt.

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass das Gewebe des Geradenbüschels aus einem einzigen Pte besteht ist die Gleichheit

$$(a\,)(\,c)\ (b\,)(\,u) = Z.$$

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass das Gerüst der Büschelschar aus einer einzigen Gen besteht ist die Gleichheit

$$(a\,)(\,c)\ (b\,)(\,u) = Z. \tag{21·3}$$

Die Gg (21·3) hat die Lösung

$$a = a, \quad b = b, \quad c = c, \quad u = [(a \between c) \cup b']\, v \cup (a\,)(c\,)\, b'v',$$

Setzen wir den Wert von $u$ in (21·23) ein, so erhalten wir

$$x = a\,)(\,c, \qquad y = ab \cup bc \cup ca, \tag{21·31}$$

weil $ac \cup (a \between c)\, b$ mit $ab \cup bc \cup ca$ identisch ist. Die Koordinaten des Knotens sind also durch (21·31) bestimmt. In (21·21), wo $m$ mit $u$ identisch ist, hat $d$ in diesem Falle den Wert $d = a\,)(\, b \between c$, also der Geradenbüschel (21) die Gg

$$y = apx \cup bpx' \cup cp'x \cup (a\,)(\, b \between c)\, p'x'. \tag{21·32}$$

Diese Gg ist aber die Gg des Strahlenbüschels I, dh. des Ptes (21·31)

Weiter gelten zwei folgende Sätze, welche wir ohne Beweise angeben:

Semikollineare, welche Geradenbüschel ist, besitzt kein Gewebe.

Semikoinzidente, welche Büschelschar ist, besitzt kein Gerüst.

Die Kollineare

$$x = \alpha m \cup \beta m', \quad y = \gamma m \cup \delta m'$$

ist Gewebe eines Geradenbüschels wenn

Die Koinzidente

$$\xi = \alpha m \cup \beta m', \quad \eta = \gamma m \cup \delta m' \tag{21·4}$$

ist Gerüst einer Büschelschar wenn

$$\alpha' \beta \cup (\alpha' \cup \beta)\ (\gamma \between \delta) = Z \tag{21·41}$$

ist.

Betrachten wir Strahlenbüschel I als Pte, dh. Knoten des Büschels, so gilt der Satz: J e d e K o l l i n e a r e i s t e i n e B ü s c h e l s c h a r u n d u m g e k e h r t.

Denn der duale Satz: Jede Koinzidente ist ein Geradenbüschel, ist evident.

Die Büschelschar

$$\eta = ap\xi \cup bp\xi' \cup cp'\xi \cup dp'\xi' \tag{21·5}$$

ist in dieser Hinsicht mit der Kollinearen

$$x = (a)(b)\,m \cup (c)(d)\,m', \qquad y = am \cup cm' \tag{21·51}$$

äquivalent. Die Kollineare (21·51) stellt jede beliebige Kollineare dar, denn wir können immer

$$a)(b = \alpha, \qquad c)(d = \beta, \qquad a = \gamma, \qquad c = \delta,$$

wo $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ beliebig sind, setzen.

Wir haben in § 4 bewiesen, dass jeder Pt jeder Gen des Strahlenbüschels I mit dem Mittelpunkte $(x_0\ y_0)$ vom Pte $(x_0, y_0')$ die Entfernung $T$ besitzt. Analoge Eigenschaft weisen Geradenbüschel auf, welche Gewebe besitzen. Ist ein Geradenbüschel

$$y = f_1(x)\,p \cup f_2(x)\,p' = apx \cup bpx' \cup cp'x \cup dp'x' \tag{21·6}$$

gegeben, so ist die Entfernung der Pte von (21·6) vom Pte $(x_l, y_l)$

$$\left.\begin{aligned} \Delta &= (x_l \between x) \cup [y_l \between (apx \cup bpx' \cup cp'x \cup dp'x')] \\ &= [x'_l \cup (a \between y_l)]\,px \cup [x_l \cup (b \between y_l)]\,px' \cup [x'_l \cup \\ &\cup (c \between y_l)]\,p'x \cup [x_l \cup (d \between y_l)]\,p'x'. \end{aligned}\right\} \tag{21·61}$$

Soll diese Entfernung konstant sein, so muss $\Delta$ von $p$ und $x$ unabhängig sein. Dies gibt

$$x'_l \cup (a \between y_l) = x_l \cup (b \between y_l) = x'_l \cup (c \between y_l) = x_l \cup (d \between y_l). \tag{21·62}$$

Dieses System ist mit der Gg

$$(a \cup c)\,x_l y_l \cup (a' \cup c')\,x_l y'_l \cup (b \cup d)\,x'_l y_l \cup (b' \cup d')\,x'_l y_l = Z \tag{21·63}$$

äquivalent, welche möglich ist, wenn

$$(a \between c)\;(b \between d) = Z \tag{21·64}$$

gilt, wenn also die Entfernung beider Generatoren $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ gleich $Z$ ist. Gilt (21·64) so hat (21·63) die Auflösung

$$x_l = (a)(c)\,m \cup (b \between d)\,m',$$

$$y_l = [a'c' \cup (a \between c)\,b'd']\,m \cup [b'd' \cup (b \between d)\,a'c']\,m'.$$





Die Gg (21·64) hat die Auflösungen (21·21). Setzen wir den Wert für $d$ in das vorige System ein, so erhalten wir

$$x_l = (a)(c)\,m \cup (a)(c)\,(b \between u)\,m',$$

$$y_l = [a'c' \cup b'\,(a \between c)]\,m \cup [b'\,(a' \cup c')\,u \cup (b' \cup a'c')\,u']\,m', \tag{21·65}$$

wo wir an Stelle von $m$ in (21·21) $u$, welches beliebig ist setzen. Jeder Pt des Geradenbüschels (21·6) hat von jedem Punkte (21·65) konstante Entfernung. Vergleichen wir (21·65) mit dem Gewebe des Geradenbüschels (21·6), dh. mit (21·23), so sehen wir, dass die Werte von $x$ identisch sind; die $y$ Werte von (21·65) erhalten wir dagegen aus den entsprechenden Werten von (21·23), wenn wir anstatt jeder Konstante ihre Negation setzen. Dabei soll man beachten, dass $a \between c = a' \between c'$ ist. Wir können leicht verifizieren, dass auf diese Weise gebildeter Ausdruck (21·65) Negation von $y$ in (21·23) ist.

Wir nennen das Gebilde (21·65) G e g e n g e w e b e des Geradenbüschels (21·6), und die duale Form G e g e n g e r ü s t.

Die konstante Entfernung $\Delta$ kann aus (21·61), (21·62), (21·65) ausgerechnet werden. Sie hat den Wert

$$\Delta = T. \tag{21·66}$$

Wir haben also den Satz:

W e n n d e r G e r a d e n b ü s c h e l I G e w e b e b e s i t z t, s o h a t j e d e r P t d i e s e s B ü s c h e l s v o n j e d e m P t e d e s G e g e n g e w e b e s d i e E n t f e r n u n g $T$.

W e n n d i e B ü s c h e l s c h a r I G e r ü s t b e s i t z t, s o i s t d e r W i n k e l z w i s c h e n j e d e r G e n d i e s e r S c h a r u n d j e d e r G e n d e s G e g e n g e r ü s t e s g l e i c h $T$.

Reduziert sich der Geradenbüschel auf Strahlenbüschel I mit dem Mittelpunkte $(x_0, y_0)$, so besteht das Gegengewebe aus dem einzigen Knoten $(x_0, y_0')$, und wir kehren zum früher bewiesenen Satze zurück.

Sind beide Generatoren des Büschels (21·6) identisch, geht also der Geradenbüschel in eine Ge I über, so hat das Gegengewebe die Gg $y = a'x \cup b'x'$. Dies gibt den Satz:

Jeder Pt der Gen

$$y = ax \cup bx'$$

hat von jedem Pte der Gen

Der Winkel zwischen jeder Gen I des Büschels

$$\eta = a\xi \cup b\xi' \tag{21·67}$$

und jeder Gen I des Büschels

$$y = a'x \cup b'x' \qquad\qquad \eta = a'\xi \cup b'\xi' \tag{21·671}$$

die Entfernung $T$, und umgekehrt. | beträgt $T$, und umgekehrt.

Die über Gewebe und Gegengewebe der Geradenbüschel, so wie über Gerüst und Gegengerüst der Büschelscharen bewiesenen Sätze lassen sich auf Kollinearenbüschel und Koinzidentenscharen erweitern.

Wir wollen noch alle Pte $(x_l, y_l)$ bestimmen, deren Entfernung von jedem Pte der Kollinearen

$$x = am \cup bm', \qquad y = cm \cup dm' \tag{21·7}$$

konstant ist.

Diese Entfernung muss von $m$ unabhängig und dabei konstant sein. Dies gibt:

$$(a \between x_l) \cup (c \between y_l) = (b \between x_l) \cup (d \between y_l) = C.$$

Dieses System ist mit der Gg

$$\left.\begin{aligned} &[(ac \cup bd)\, C \cup (a' \cup b' \cup c' \cup d')\, C']\, x_l y_l \cup \\ &\cup [(ac' \cup bd')\, C \cup (a' \cup b' \cup c \cup d)\, C']\, x_l y_l \cup \\ &\cup [a'c \cup b'd)\, C \cup (a \cup b \cup c' \cup d')\, C']\, x'_l y_l \cup \\ &\cup [(a'c' \cup b'd')\, C \cup (a \cup b \cup c \cup d)\, C']\, x'_l y'_l = Z \end{aligned}\right\} \tag{21·71}$$

äquivalent, welche möglich ist, wenn

$$R = [(a \between b) \cup (c \between d)]\, C' = D\, C' = Z \tag{21·72}$$

ist. Diese Bedingung können wir auch folgendermassen schreiben:

$$D \sqsubset C. \tag{21·72}$$

Daraus folgt:

Ist (21·7) eine Ge, dh. $D = T$, dann mus $C = T$ sein. Ist $C = T$, so kann die Kollineare (21·7) beliebig sein.

Ist die gegebene Koinzidente ein Strahlenbüschel, ist also $D = T$, so muss der Winkel $C$ gleich $T$ sein. Ist der Winkel $C = T$, so kann die Koinzidente beliebig sein.

Lösen wir (21·71) nach $x_l$ und $y_l$ auf, so überzeugen wir uns, dass der geometrische Ort aller von allen Pten der Kollinearen (21·7) äquidistanten Pte im allgemeinen ein Kollinearenbüschel ist.