F. LEJA.

Sur une dépendance linéaire et son application.

O pewnej zależności linjowej i jej zastosowaniu.

1. Cousidérons un système de r fonctions d'une variable réelle

$$g_1(x),\ g_2(x),\ \ldots,\ g_r(x), \tag{1}$$

définies dans le voisinage d'un point x_0 et pourvues des dérivées premières continues dans ce voisinage et supposons qu'elles ne s'annulent pas toutes en même temps au point x_0. Supposons en outre qu'il existe un système de r^3 constantes telles que

$$c_{ijk} \qquad , i, j, k = 1, 2, \ldots, r,$$

les équations

$$g_i \frac{dg_j}{dx} - g_j \frac{dg_i}{dx} = \sum_{k=1}^{r} c_{ijk}\, g_k \quad , i, j = 1, 2, \ldots r, \tag{2}$$

soient satisfaites identiquement dans le voisinage de x_0.

Je vais montrer que, lorsque ces conditions sout satisfaites, les fonctions (1) doivent être linéairement dépendantes dans un certain voisinage de x_0, pourvu que le nombre r surpasse 3, tandis que cela peut n'avoir pas lieu dans le cas où $r = 2$ ou 3.

Ce fait reste dans une intime liaison avn le théorème connu de S. Lie, qu' un groupe continu des trausformations d'une variété linéaire peut dépendre de trois paramètres essentiels au plus.

2. Supposons que les fonctions (1) satisfont aux conditions spécifiées au début et formons deux fonctions suivantes:

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{r} a_i\, g_i(x)$$

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^{r} b_i\, g_i(x),$$

où

(3)
$$\begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_r \\ b_1, b_2, \dots, b_r \end{matrix}$$

sont deux systèmes de r constantes qui seront déterminées plus bas. L'expression

(4)
$$F(x) = \varphi\,\psi' - \psi\,\varphi'$$

prend la forme suivante

$$F(x) = \sum_{i,j=1}^{r} a_i\, b_j\, (g_i\, g'_j - g_j\, g'_i),$$

d'où, d'après (2), on a

$$F(x) = \sum_{k=1}^{r} \left\{ \sum_{i,j=1}^{r} a_i\, b_j\, c_{ijk} \right\} g_k,$$

ou

(5)
$$F(x) = \sum_{k=1}^{r} \left\{ \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{r} (a_i\, b_j - a_j\, b_i)\, c_{ijk} \right\} g_k.$$

Cherchons à déterminer les constantes (3) de sorte que les trois conditions suivantes soient satisfaites:

1° On a

(6)
$$\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{r} (a_i\, b_j - a_j\, b_i)\, c_{ijk}\, 0 \qquad , k = 1, 2, \dots, r.$$

2° L'un au moins des déterminants

$$a_i\, b_j - a_j\, b_i \qquad , i<j \quad , \quad i, j = 1, 2, \dots, r$$

n'est pas nul,

3° La fonction $\psi(x) = \sum_{i=1}^{r} b_i\, g_i(x)$ est différente de zéro au point x_0.

On voit que les équations (6) sont linéaires et homogènes par rapport aux inconnues

$$d_{ij} = a_i\, b_j - a_j\, b_i \qquad , \quad i<j$$

et que le nombre de ces inconnues est égale à

$$\frac{r(r-1)}{2}.$$

Or ce nombre surpasse celui des équations lorsque $r \geqq 4$ et dans ce cas seulement, car on a

$$\frac{r(r-1)}{2} - r = \frac{r(r-3)}{2}.$$

Il en résulte que, lorsque $r \geqq 4$, il existera des constantes (3) telles que les trois conditions qui viennent d'être specifiées soient satisfaites.

Supposons que $r \geqq 4$ et que les constantes (3) soient choisies de sorte que lesdites conditions soient satisfaites. D'aprés (4) et (5) on a identiquement

$$\varphi\,\psi' - \psi\,\varphi' = 0$$

et, par suite, on a dans un certain voisinage de x_0, dans lequel $\psi(x)$ ne s'annulle pas

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = c,$$

c étant une constante. Posons

$$a_i - c\, b_i = C_i, \qquad i = 1, 2, \dots r;$$

ces constantes ne seront pas toutes nulles et la dernière identité peut être écrite sous la forme

$$\sum_{i=1}^{r} C_i\, g_i(x) = 0.$$

On a donc démontré que, lorsque les fonctions (1) satisfont aux conditions spécifiées au début et lorsque $r \leqq 4$, il existe un voisinage de x_0 dans lequel ces fonctions sont linéairement dépendantes.

3. Cette proposition cesse d'être vraie lorsque le nombre des fonctions (1) est ègal á deux ou trois, comme le montre l'exemple des fonctions

$$g_1 = 1, \quad g_2 = x$$

dans le cas $r = 2$ et l'exemple

$$g_1 = 1, \; g_2 = x, \; g_3 = x^2$$

dans le cas $r = 3$. Ces fonctions satisfont aux relations de la forme (2), néanmoins elles sont linéairement indépendantes.

Ajoutons que la proposition du paragraphe précédent est d'une nature locale, c'est-à-dire que la dépendance linéaire y démontrée peut ne s'étendre qu'à un voisinage suffisament petit de x_0. Pour le voir considérons l'exemple suivant:

Soient $g_1(x)$, $g_2(x)$, $g_3(x)$, $g_4(x)$ quatre fonctions définies dans l'intervalle $\left\langle -\frac{4\pi}{p}, \frac{4\pi}{p} \right\rangle$, comme le montre le tableau suivant:

	$\left\langle -\frac{4\pi}{p}, -\frac{2\pi}{p} \right\rangle$	$\left\langle -\frac{2\pi}{p}, 0 \right\rangle$	$\left\langle 0, \frac{2\pi}{p} \right\rangle$	$\left\langle \frac{2\pi}{p}, \frac{4\pi}{p} \right\rangle$
$g_1(x)$	$(1-\cos px)^n$	0	0	0
$g_2(x)$	0	$(1-\cos px)^n$	0	0
$g_3(x)$	0	0	$(1-\cos px)^n$	0
$g_4(x)$	0	0	0	$(1-\cos px)^n$

pet n étant des nombres naturels quelconques. Or, x_0 étant un point quelconque appartenant par exemple à l'intérieur de l'intervalle $<-\frac{2\pi}{p}, 0>$, toutes ces fonctions satisfont dans le voisinage $<-\frac{4\pi}{p}, \frac{4\pi}{p}>$ de ce point aux conditions spécifiées au début; il suffit de poser $c_{ijk} = 0$, pour $i, j, k = 1, 2, 3, 4$, car les expressions

$$g_i\, g'_j - g_j\, g'_i$$

sont partout nulles. Néanmoins ces fonctions sont linéairement indépendantes dans l'intervalle $<-\frac{4\pi}{p}, \frac{4\pi}{p}>$ tout entier, comme il est aisé de voir.

4. Considérons un groupe continu de Lie des transformations d'une variable et supposons qu' il dépende de r paramètres essentiels.

D'après la théorie générale de Lie, il correspondent à ce groupe r transformations infinitésimales de la forme

$$X_i f = \xi_i(x) \frac{\partial f}{\partial x} \qquad , \quad i = 1, 2, \dots r,$$

où les fonctions $\xi_i(x)$ sont régulières et satisfont aux conditions suivantes: 1° Elles sout linéairement indépendantes; 2° il existe r^3 constantes c_{ijk}, $i, j, k = 1, 2, \dots, r$, telles que les relations de la forme (2)

$$\xi_i\, \xi'_j - \xi_j\, \xi'_i = \sum_{k=1} c_{ijk}\, \xi_k \quad , \; i, j = 1, \dots, r$$

sont identiquement satisfaites.

Or, on a vu que cela ne peut avoir lieu que si $r \leqq 3$. Le groupe de Lie des transformations d'une variable ne peut donc dépendre de trois paramètres essentiels au plus.

A. WALFISZ.

Über die Idealfunktion quadratischer Zahlkörper.

O funkcji ideałowej kwadratowych ciał liczbowych.

Es sei ein beliebiger quadratischer Zahlkörper gegeben. Für natürliches n bezeichne $F(n)$ die Anzahl aller Ideale mit der Norm n.

$$H(x) = \sum_{n \leqq x} F(n) \quad {}^{1)}$$

sei die zugehörige Idealfunktion. Ist ρ das Residuum der dem Körper zugeordneten Zetafunktion in ihrem Pole, so hat man nach J. G. van der Corput [2])

$$H(x) = \rho x + O(x^{\theta}) \qquad \left(\theta < \frac{1}{3}\right). \tag{1}$$

Diese Beziehung soll im folgenden zu

$$H(x) = \rho x + O(x^{\frac{163}{494}}) \tag{2}$$

verbessert werden. Hierbei kommt eine Methode zur Anwendung, welche von van der Corput [3]) für das Dirichletsche Teilerproblem ausgear-

[1]) Falls die untere Summationsgrenze nicht explizit bezeichnet wird, ist sie stets Eins.

[2]) J. G. van der Corput „Neue zahlentheoretische Abschätzungen" [Mathematische Annalen **89** (1923), S. 215-254].

[3]) J. G. van der Corput „Verschärfung der Abschätzung beim Teilerproblem" [Mathematische Annalen **87** (1922), S. 39-65].

Prace mat.-fiz. t. XXXIV.