sphère soit égale en grandeur et en signe au rayon de la semi-sphère.

3. Représentation dans l'étendue*) des semi-plans et des semi-sphères. — Considérons un plan réel, représenté en coordonnées cartésiennes rectangulaires par l'équation

$$\xi x + \eta y + \zeta z + 1 = 0, \tag{1}$$

où ξ, η, ζ sont les coefficients. Le plan (1) porte deux semi-plans. Je dirai que le premier a pour coordonnées

$$\xi, \eta, \zeta, + \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2},$$

et le second

$$\xi, \eta, \zeta, - \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}.$$

Ainsi à tout système de nombres ξ, η, ζ, τ, satisfaisant à la relation

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \tau^2 = 0, \tag{2}$$

correspond un semi-plan (P) bien déterminé.

Étant donné un semi plan (P) de coordonnées ξ, η, ζ, τ, nous conviendrons de prendre pour région positive relative au semi-plan la région des points x, y, z, tels que l'expression

$$\frac{\xi x + \eta y + \zeta z}{\tau}$$

soit positive. En vertu de cette convention, et de celle qui a été faite plus haut relativement au signe de la distance d'un point à un semi-plan, l'expression précédente représente en grandeur et en signe la distance au semi-plan (P) du point x, y, z.

Soient maintenant λ, μ, ν les coordonnées du centre d'une semi-sphère (S), ρ son rayon (positif ou négatif). Pour que le semi-plan (P) et la semi-sphère (S) soient tangents, il faut et il suffit que l'on ait la relation

$$\frac{\lambda\xi + \mu\eta + \nu\zeta + 1}{\tau} = \rho,$$

ou

$$\lambda\xi + \mu\eta + \nu\zeta - \rho\tau + 1 = 0. \tag{3}$$

Les relations (2) et (3) peuvent être interprétées dans l'étendue.

(*A suivre*)

*) J'emploierai, pour parler de l'espace à quatre dimensions, le mot d'étendue, introduit par Jouffret dans son Traité élémentaire de Géométrie à quatre dimensions (Paris, Gauthier-Villars, 1904).

A. ROSENBLATT.

Sur les variétés algébriques à trois dimensions dont les genres satisfont linégalité $P_g \leqq 3\,(p_g - p_a - 3)$.

O rozmaitościach algebraicznych trójwymiarowych, których liczby rodzajowe czynią zadość nierówności $P_g \leqq 3\,(p_g - p_a - 3)$.

1. Envisageons une variété algébrique V_3 à trois dimensions et soient P_g, p_g, p_a le genre géométrique de la variété, le genre géometrique d'une surface générale de la variété et le genre arithmétique de cette surface. Nous supposons que ces genres satisfont à l'inégalité

$$P_g \leqq 3\,(p_g - p_a - 3). \tag{1}$$

M. Comessatti*) a montré que ces variétés possèdent ou des faisceaux irrationnels (de genre $\geqq 2$) de surfaces algébriques ou bien des congruences irrégulières (d'irrégularité $\geqq 3$) de courbes algébriques.

Envisageons le système linéaire $\sum_{i=0}^{r} \lambda_i u_i$ d'intégrales de M. Picard de première espèce de la variété V_3 $(r + 1 = = p_g - p_a)$ et la matrice M

$$M = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x_0} \cdots \frac{\partial u_r}{\partial x_0} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial u_0}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial u_r}{\partial x_2} \end{vmatrix} \tag{2}$$

x_i, $i = 0, 1, 2$ étant les variables indépendantes. Désignons par $X_{i,j,k}$ le mi-

*) „Sulle varietà algebriche che posseggono integrali semplici funzionalmente dipendenti". Atti della R. Accademia dei Lincei. T. 22. 1913.

neur d'ordre 3 de cette matrice formé par les colonnes de numéros i, j, k. On peut interpréter ces mineurs comme coordonnées grassmanniennes des plans d'un espace S_r passant par les 3 points dont les coordonnées homogènes figurent dans les trois lignes de M.

L'inégalité (1) entraîne l'inégalité

$$\delta \geqq \binom{r+1}{3} - 3\,(r-2), \tag{3}$$

où δ est le nombre d'équations linéaires indépendantes

$$\sum_{\substack{i<j<k \\ 0}}^{r} a^{\nu}_{ijk}\, X_{ijk} = 0, \qquad \nu = 1 \dots \delta \tag{4}$$

remplies par les coordonnées grasmanniennes X_{ijk}. Le système $\overline{W}$ de plans dans l'S_r possède au moins un espace S_{r-3} directeur*), c'est à dire coupé par tous les plans de $\overline{W}$. En effet représentons les coëfficients a^{ν}_{ijk} comme coordonnées homogènes d'un point P_ν de l'espace S_R, $R = \binom{r+1}{3} - 1$. Nous obtenons un espace linéaire $S_{\delta-1}$, à $\delta-1$ dimensions qui coupe la variété de Grasmann V_d, $d = 3\,(r-2)$ de l'espace S_R en une variété V de dimension au moins égale à

$$\delta - \binom{r+1}{3} + 3\,(r-2).$$

A chaque point P de V correspond un espace directeur S_{r-3} de $\overline{W}$.

Donc si l'on a dans (3) le signe d'inégalité où bien si l'espace linéaire $S_{\delta-1}$ touche la variété V_d de Grassmann, le systéme W de plans possède deux espaces directeurs S^0_{r-3}, S^1_{r-3} infiniment voisins.

2. Nous pouvons supposer que l'espace directeur S^0_{r-3} est l'espace déterminé par les trois points fondamentaux P_1, P_2, P_3, de la matrice

$$A^0 = \begin{vmatrix} 1, 0, 0 \dots\dots 0 \\ 0, 1, 0 \dots\dots 0 \\ 0, 0, 1 \dots\dots 0 \end{vmatrix} \tag{5}$$

A^0 désignant aussi le point de V_d qui correspond à S^0_{r-3}. Soit S^0 le plan de l'espace S_r qui passe pas ces trois points fondamentaux. Au point

*) Cf. mon Mémoire: „Sur quelques propriétés des systèmes algébriques d'espaces à le dimensions contenus dans un espace linéaire a r dimensions". Annales de la Société Polonaise de Mathématique. T. III. Cracovie 1924.

A^1 infiniment voisin de A^0 il correspond un plan S^1 infiniment voisin de S^0. Si S^1 est indépendant de S^0, il détermine avec S^0 un espace S_5 à 5 dimensions, dans lequel nous placerons les points fondamentaux P_4, P_5, P_6. Nous avons alors la matrice

$$A^{(1)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & dt & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & dt & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & dt \dots \end{vmatrix} \tag{6}$$

A A^0 correspond le complexe spécial d'équation

$$X_{012} = 0 \tag{7}$$

et à $A^{(1)}$ le complexe spécial d' équation

$$X_{012} + dt\,(X_{015} + X_{123} + X_{204}) = 0. \tag{8}$$

De (7) nous tirons

$$u_2 = \varphi\,(u_0, u_1) \tag{9}$$

en supposant les intégrales u_0, u_1, u_2 indépendantes deux à deux. Choisissons u_0, u_1 comme variables indépendantes au lieu de x_0, x_1. L'équation (8) peut alors s'écrire

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\partial u_5}{\partial u_0}, & \frac{\partial u_5}{\partial u_1}, & \frac{\partial u_5}{\partial x_2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\partial u_2}{\partial u_0}, & \frac{\partial u_2}{\partial u_1}, & 0 \\ \frac{\partial u_3}{\partial u_0}, & \frac{\partial u_3}{\partial u_1}, & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial u_2}{\partial u_0}, & \frac{\partial u_2}{\partial u_1}, & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial u_4}{\partial u_0}, & \frac{\partial u_4}{\partial u_1}, & \frac{\partial u_4}{\partial x_2} \end{vmatrix} = 0.$$

Nous avons donc

$$\frac{\partial u_5}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial u_0}\,\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial u_1}\,\frac{\partial u_4}{\partial x_2} = 0.$$

Donc

$$u_5 - u_4\,\frac{\partial \varphi}{\partial u_1} - u_3\,\frac{\partial \varphi}{\partial u_0} = \chi\,(u_0, u_1),$$

nous obtenons et la relation

$$u_5 = u_4\,\frac{\partial \varphi}{\partial u_1} + u_3\,\frac{\partial \varphi}{\partial u_0} + \chi\,(u_0, u_1). \tag{10}$$

Supposons maintenant que S^1 détermine avec S^0 seulement un espace S_4. On a alors la matrice

$$A^{(1)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & dt & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & dt & \dots \end{vmatrix} \tag{11}$$

Donc on a l'équation de complexe

$$X_{012} + dt\,(X_{203} + X_{014}) = 0\,, \tag{12}$$

ou bien l'équation

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u_2}{\partial u_0}, & \dfrac{\partial u_2}{\partial u_1}, & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial u_0}, & \dfrac{\partial u_3}{\partial u_1}, & \dfrac{\partial u_3}{\partial x_2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{\partial u_4}{\partial u_0}, & \dfrac{\partial u_4}{\partial u_1}, & \dfrac{\partial u_4}{\partial x_2} \end{vmatrix} = 0\,,$$

donc

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\,\frac{\partial u_2}{\partial u_1} - \frac{\partial u_4}{\partial x_2} = 0\,,$$

et

$$u_4 = u_3\,\frac{\partial \varphi}{\partial u_1} + \chi\,(u_0\,, u_1). \tag{13}$$

Enfin, si' il n' y a qu'un point indépendant de P_1, P_2, P_3, on a la matrice

$$A^{(1)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & dt & \ldots \end{vmatrix}\,, \tag{14}$$

donc

$$X_{013} = 0 \tag{15}$$

$$u_3 = \chi\,(u_0\,.\,u_1)\,. \tag{16}$$

D'après M. Comessatti il y a sur la variété V_3 une congruence irrégulière d'irrégularité $\geqq 3$ de courbes, puisque les trois intégrales u_0, u_1, u_2 sont supposées deux à deux indépendantes. Envisageons une courbe C de la congruence

$$u_0 = c_0\,,\; u_1 = c_1\,.$$

Sur cette courbe l'intégrale de M. Picard

$$v = u_5 - u_4 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}\right)_{c_0,\,c_1} - u_3 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_0}\right)_{c_0,\,c_1} \tag{17}$$

est constante.

Envisageons le faisceau $\{F\}$ de surfaces données par l'équation

$$v = k\,, \tag{18}$$

où k est un paramètre variable. La surface F qui correspond à la valeur $k = k_0 = \chi\,(c_0^0,\, c_1^0)$ passe par la courbe C_0 qui correspond aux valeurs c_0^0, c_1^0 des paramètres c_0, c_1. Les surfaces F ne peuvent couper les courbes C de la congruence $\{C\}$ en des points variables avec C, autrement elles couperaient C_0, ce qui n'est pas le cas. Donc les surfaces F sont composées par les courbes C.

Donc v est une intégrale de M. Picard de la congruence $\{C\}$ de courbes.

Donnons à c_0, c_1 trois systèmes de valeurs $c_0^0, c_1^0;\, c_0^1, c_1^1;\, c_0^2, c_1^2$ et envisageons le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1, & \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial u_0}\right)^0, & \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial u_1}\right)^0 \\ 1, & \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial u_0}\right)^1, & \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial u_1}\right)^1 \\ 1, & \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial u_0}\right)^2, & \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial u_1}\right)^2 \end{vmatrix}$$

qui correspond à ces trois systèmes de valeurs. Si ce déterminant était identiquement nul pour tous les systèmes de valeurs de c_0, c_1, il y aurait une relation

$$m + m_0\,\frac{\partial \varphi}{\partial u_0} + m_1\,\frac{\partial \varphi}{\partial u_1} = 0 \tag{19}$$

entre les dérivées $\dfrac{\partial \varphi}{\partial u_0}$, $\dfrac{\partial \varphi}{\partial u_0}$, où les m sont des constantes. En intégrant le système

$$-\frac{du_2}{m} = \frac{du_0}{m_0} = \frac{du_1}{m_1}\,,$$

on obtient

$$F\,(m_0\,u_2 + m\,u_0\,,\; m_1\,u_2 + m\,u_1) = 0\,,$$

donc les deux intégrales $m_0\,u_2 + m\,u_0$ et $m_1\,u_2 + m\,u_1$ seraient dépendantes sur V_3, contre l'hypothèse.

Ainsi u_3, u_4, u_5, sont des combinaisons linéaires des trois intégrales $v\,(c_0^0, c_1^0)$, $v\,(c_0^1, c_1^1)$, $v\,(c_0^2, c_1^2)$. Donc ce sont des intégrales de Picard de la congruence $\{C\}$ qui possède par suite 6 intégrales linéairement indépendantes u_i, $i = 0, 1, \ldots 5$.

Dans le cas où les deux plans S^0 et S^1 déterminent un espace S_4, on envisage l'intégrale

$$v = u_4 - u_3 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}\right)_{c_0,\,c_1} \tag{20}$$

qui est une intégrale de M. Picard de la congruence $\{C\}$, u_3 et u_4 sont alors des intégrales de Picard de la congruence, qui possède par suite les 5 intégrales u_i, $i = 0, \dots 4$.

Enfin si S^0 et S^1 déterminent un S_3, on obtient les 4 intégrales indépendantes $u_i = i = 0 \dots 3$ de la congruence.

Nous pouvons donc énoncer le théorème:

Théorème 1: „Supposons que la variété V_3 ne possède pas des faisceaux irrationnels de surfaces, et que la relation (1) soit remplie. Alors si l'on a le signe de l'inégalité, alors le système $\overline{W}$ de plans possède un espace directeur S_{r-t-1}, où t est égal à 3, 4 ou 5. La variété V_3 possède une congruence $\{C\}$ de courbes d'irrégularité $\geqq t+1$.

Il en est de même, si l'on a dans (1) le signe de l'égalité, mais si le système $\overline{W}$ de plans possède deux espaces directeurs S_{r-3} infiniment voisins".

3. Envisageons maintenant un système $\overline{W}$ de plans qui possède un espace S_{r-t-1}, $t \geqq 3$ directeur et soient $u_0, \dots, u_t$ les $t+1$ intégrales de M. Picard de la congruence $\{C\}$ correspondante sur V_3. Le système $\overline{W}$ satisfait donc à $\binom{t+1}{3}$ équations de complexes linéaires

$$X_{i_0,\, i_1,\, i_2} = 0, \tag{21}$$

où i_0, i_1, i_2 sont $\leqq t$.

On a donc

$$S - \binom{t+1}{3} \geqq \binom{r+1}{3} - 3(r-2) - \binom{t+1}{3}$$

autres équations de complexes linéaires indépendants.

Soient

$$\sum_{\substack{i,j \leqq t \\ k \geqq t+1}} a_{ijk}\, X_{ijk} + \sum_{\substack{i=0 \dots r \\ j,k \geqq t+1}} a_{ijk}\, X_{ijk} = 0 \tag{96}$$

ces équations. Éliminons entre ces équations les

$$\binom{r-t}{3} + \binom{r-t}{2}(t+1)$$

derniers X. On a

$$\binom{r+1}{3} - \binom{r-t}{3} - \binom{r-t}{2}(t+1) - \binom{t+1}{3} = (r-t)\binom{t+1}{2}.$$

Nous obtenons donc un système linéaire d'au moins

$$S - \binom{t+1}{3} - \binom{r-t}{3} - \binom{r-t}{2}(t+1) \geqq (r-t)\binom{t+1}{2} - 3(r-2)$$

équations linéaires indépendantes.

On a

$$(r-t)\binom{t-1}{2} - 3(r-2) = (r-t)\left[\frac{(t-2)(t+3)}{2} + 3\right] - 3(r-2)$$

$$= (t-2)\left[\frac{(r-t)(t+3)}{2} - 3\right].$$

Posons

$$m = (t-2)\left[(r-t)\frac{t+3}{2} - 3\right]. \tag{22}$$

On a $m > 0$, si

$$(r-t)\frac{t+3}{2} - 3 > 0,$$

donc (puisque $r - t > 0$) si

$$\frac{t+3}{2} > 3,$$

donc si

$$t > 3.$$

De même $m > 0$, si $t = 3$, et $r > t+1$.

Soient

$$u_k = \varphi_k(u_0, u_1), \quad k = 0, \dots, t \tag{23}$$

les expressions des intégrales u_i en fonctions de u_0, u_1.

Choisissons u_0, u_1 comme variables indépendantes au lieu de x_0, x_1.

On a

$$X_{i_0,\, i_1,\, i_k} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_i}{\partial u_0}, & \frac{\partial\varphi_i}{\partial u_1}, & 0 \\ \frac{\partial\varphi_j}{\partial u_0}, & \frac{\partial\varphi_j}{\partial u_1}, & 0 \\ \frac{\partial u_k}{\partial u_0}, & \frac{\partial u_k}{\partial u_1}, & \frac{\partial u_k}{\partial x_2} \end{vmatrix}$$

On a donc les m équations

$$\sum_{k=t+1}^{r} \left(\sum_{\substack{i<j \\ 0}}^{t} \frac{D(\varphi_i, \varphi_j)}{D(u_0, u_1)}\, \overset{\nu}{a}_{ijk} \right) \frac{\partial u_k}{\partial x_2} = 0, \quad \nu = 1 \dots m. \tag{24}$$

donc les m intégrales

$$\sum_{\substack{i \leq j = 0 \ldots t \\ k \geqq t+1}} \frac{D(\varphi_i\, \varphi_j)}{D(u_0, u_1)} a^{\nu}_{i\,j\,k}\ u_k \tag{25}$$

indépendantes de x_2, et par suite fonctions de u_0 et u_1.

On obtient donc une nouvelle intégrale de M. Picard de la congruence $\{C\}$ à moins que toutes les expressions

$$\sum_{i, j = 0 \ldots t} \frac{D(\varphi_i, \varphi_j)}{D(u_0, u_1)} a^{\nu}_{i, j, k} \tag{26}$$

ne soient identiquement nulles.

Envisageons les équations

$$\sum_{i, j = 0 \ldots t} \frac{D(\varphi_i, \varphi_j)}{D(u_0, u_1)} a^{\nu}_{i, j, k} = 0. \qquad \begin{matrix} \nu = 1, \ldots, m \\ k = t+1, \ldots, r \end{matrix} \tag{27}$$

Nous avons les $r - t$ matrices

$$\left| \begin{matrix} a^1_{i, j, t+1} \\ \\ a^m_{i, j, t+1} \end{matrix} \right|, \ldots \left| \begin{matrix} a^1_{i, j, r} \\ \\ a^m_{i, j, r} \end{matrix} \right|, \; i, j, = 0 \ldots t \tag{28}$$

Si le rang de chacune de ces matrices était plus petit que

$$\frac{(t-1)(t-2)}{2} + 1,$$

alors m devrait au plus être égal à

$$(r - t) \frac{(t-1)(t-2)}{2},$$

autrement les m équations (24) seraient dépendantes, ce qui n' est pas vrai.

Donc si l'on a a l'inégalité

$$m > (r - t) \frac{(t-1)(t-2)}{2}, \tag{29}$$

alors une des matrices (18) au moins est de rang $\geqq \frac{(t-1)(t-2)}{2} + 1$.

Par suite au moins un des systèmes de m équations (27) qui correspondent aux valeurs $t+1, \ldots r$ de k se compose de $\geqq \frac{(t-1)(t-2)}{2} + 1$ équations indépendantes.

Donc puisque

$$\binom{t+1}{2} - 2(t-1) = \frac{(t-1)(t-2)}{2} + 1,$$

il y aurait deux intégrales de M. Picard

$$\sum_{i=0}^{t} \lambda_i u_i, \qquad \sum_{i=0}^{t} \mu_i u_i$$

dépendantes.

Si l'on suppose que la variété V_3 ne possède pas des faisceaux irrationnels de surfaces on obtient une nouvelle $t+2$-me intégrale de M. Picard de la congruence si l'on a l'inégalité (29), donc l'inégalité

$$\left[(r-t) \frac{t+3}{2} - 3 \right] (t-2) > (r-t) \frac{(t-1)(t-2)}{2},$$

donc

$$(t-2) \left[(r-t) \frac{t+3}{2} - 3 - (r-t) \frac{t-1}{2} \right] > 0,$$

et

$$2(r-t) > 3,$$

$$r \geqq t+2. \tag{30}$$

Nous avons donc le

Théorème 2: „Si l'inégalité (30) est remplie, et si deux combinaisons linéaires des intégrales u_i, $i = 0, \ldots, t$ sont indépendantes, alors la congruence $\{C\}$ possède une nouvelle intégrale u linéairement indépendante des intégrales u_i, $i = 0, \ldots t$".

4. Le procédé indiqué peut être poursuivi jusqu à $t = r - 2$, et il donne r intégrales de M. Picard de la congruence $\{C\}$.

Supposons maitenant que la congruence possède exactement r intégrales. D'après un théorème célèbre de Picard-Poincaré, puisqu'il y a r integrales de V_3 dont les périodes sont réductibles à $2r$ périodes indépendantes il y a une autre intégrale u de V_3 dont les périodes sont réductibles à 2 périodes. On sait que V_3 possède alors un faisceau elliptique de surfaces. Donc d'après nos suppositions, ce cas est impossible, et la $r+1$-me intégrale appartient à la congruence $\{C\}$.

Nous obtenons donc comme résultat final*) le

Théorème 3: „Une variété V_3 qui satisfait aux conditions du théorème 1 possède une congruence irrégulière de courbes d'irrégularité $r+1 = p_g - p_a$".

---

*) J'ai énoncé ce résultat dans une Note des Comptes Rendus du 30/6 24: „Sur les variétés algébriques à trois dimensions dont les genres satisfont à l'inégalité $P_g \leqq 3\,(p_g - p_a - 3)$".

A. ZYGMUND.

O module ciągłości sumy szeregu sprzężonego z szeregiem Fouriera

Sur le module de continuité de la somme de la série conjuguée de la série de Fourier

---

Niech $f(x)$ będzie funkcją ciągłą o okresie 2π, liczby zaś a_n, b_n ($n=0$ 1, 2, ...) niech będą jej spółczynnikami Fouriera:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx. \tag{1}$$

Sprzężonym z szeregiem trygonometrycznym (1) nazywamy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx - b_n \cos nx. \tag{2}$$

Oczywiście, jeżeli szereg (1) jest szeregiem Fouriera funkcji całkowalnej wraz z kwadratem (a więc w szczególności, gdy funkcja $f(x)$ jest ciągła), wówczas szereg (2) jest również szeregiem Fouriera pewnej funkcji $g(x)$, całkowalnej wraz z kwadratem:[1])

$$g(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx - b_n \cos nx$$

Po raz pierwszy własnościami funkcji $g(x)$, w zależności od własności funkcji $f(x)$, zajął się Fatou[2]). Wykazał on mianowicie, że jeżeli funkcja

---

[1]) Jest to konsekwencja znanych twierdzeń Parsevala oraz Riesza-Fischera Por. np. Hilb und Riesz. Neuere Untersuchungen über trigonometrische Reihen (Enzyklop. d. Math. Wiss. II C 10 str. 1209 i 1212).

[2]) Séries trigonométriques et séries de Taylor (Acta Mathematica XXX str. 361—3).