lequel résultat substitué dans l'équation (21) donne:

$$(ax_1^2 - cx_2^2) + \frac{2}{\varkappa^2}(1 \pm \sqrt{1+\varkappa^2})\, x_3^2 = 0$$

ou l'équation pour Z''.

On peut donc formuler le théorème suivant:

Soit X'' une conique imaginaire générale tangent aux deux droites t_1 et t_2 dans les points T_1 et T_2 tels, que t_1, t_2 et T_1, T_2 sont ou réels ou imaginaires conjugués, et soient les points d'intersection M_1 et M_2 de la conique X avec la droite l, passant par O' — c'est par le point d'intersection des tangentes t_1 et t_2 — représentés par les involutions $[PQ, OU]$ et $[PQ, OV]$. Les lieux géométriques de la paire P, Q et des points U et V sont deux coniques Y et Z, qui touchent aussi les tangentes t_1 et t_2 dans les points T_1 et T_2.

Ces résultats se simplifient encore, si la conique imaginaire générale est un cercle avec le centre réel O. Son équation dans les coordonnées de Descartes est la suivante:

$$X''' \equiv x^2 y^2 = \frac{1}{a + i\alpha}. \tag{24}$$

Le cercle adjoint est donc:

$$A''' \equiv x^2 + y^2 = \frac{1}{a} \tag{25}$$

et les asymptotes:

$$B''' \equiv x^2 + y^2 = 0. \tag{26}$$

Les lieux géométriques développés plus haut sont les cercles:

$$Y''' \equiv x^2 + y^2 = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \alpha^2}}, \tag{27}$$

$$Z''' \equiv x^2 + y^2 = 2\,\frac{-a \pm \sqrt{a^2+\alpha^2}}{a\alpha^2}$$

On peut faire des considérations pareilles dualistiques.

Prague, Université Charles IV, Janvier 1925.

ROMUALD WITWIŃSKI.

La géométrie de direction.

(Geometrja kierunku).

I. Géométrie plane.

1. Laguerre paraît avoir le premier introduit en Géométrie plane l'étude systématique des droites dirigées ou semi-droites, des cercles dirigés ou cycles. Il a fait connaître une transformation fort intéressante, la transformation par semi-droites réciproques, qui joue, dans la Géométrie de direction, un rôle analogue à celui que joue l'inversion dans la Géométrie ordinaire.

Les recherches de Laguerre ont été publiées dans plusieurs Mémoires, parus dans les Comptes rendus de l'Académie des Sciences, dans le Bulletin de la Société mathématique de France et dans les Nouvelles Annales de Mathématiques. En voici la liste complète:

Sur la géométrie de direction (S. M., 1879, p. 80; Oeuvres, p. 592).

Sur la transformation par directions réciproques (C. R., 1881; Oeuvres, p. 604).

Transformations par semi-droites réciproques (N. A., 1882, Oeuvres, p. 608).

Sur les hypercycles (C. R., 1882; Oeuvres, p. 620).

Sur les anticaustiques par réflexion de la parabole, les rayons incidents étant parallèles (N. A., 1883; Oeuvres, p. 636).

Sur quelques propriétés des cycles (N. A., 1883; Oeuvres, p. 651).

Sur les courbes de direction de la troisième classe (N. A., 1883; Oeuvres, p. 660).

Sur l'application des intégrales elliptiques et ultra-elliptiques à la théorie des courbes unicursales (C. R., 1883, Oeuvres, p. 671).

Sur les anticaustiques par réfraction de la parabole, les rayons incidents étant perpendiculaires à l'axe (N. A., 1885; Oeuvres, p. 675).

Plusieurs de ces travaux, surtout ceux qui sont relatifs aux principes de la théorie, ne contiennent que des résultats sans démonstration; en outre, ici comme en d'autres occasions, Laguerre n'a certainement pas mis en lumière ses idées directrices, et son exposition prend de ce fait un caractère artificiel qui rend la lecture de ces Mémoires un peu difficile.

Il est assez vraisemblable que l'éminent géomètre a été conduit à plusieurs des notions qu'il a introduites dans la Géométrie de direction, et particulièrement à sa transformation par semi-droites réciproques[1]), par des considérations de Géométrie dans l'espace. Je vais, du moins, chercher à montrer comment de telles considérations conduisent de la façon la plus naturelle à cette transformation, dont Laguerre n'a pas révélé l'origine.

2. Soit (P) un plan que je supposerai horizontal, de manière à pouvoir parler des régions de l'espace qui sont l'une au-dessus, l'autre au-dessous du plan. Soit δ une semi-droite du plan (P), c'est-à-dire une droite à laquelle on attribue un sens. Par δ je puis faire passer deux plans; (D) et (D'), faisant tous deux des angles de 45[2]) avec le plan (P).

Imaginons maintenant un observateur, debout sur le plan (P) et se déplaçant suivant δ, dans le sens de cette semi-droite. L'un des deux plans (D) et (D') fait avec le plan (P) un dièdre aigu situé à la gauche de l'observateur dont il s'agit. Je ferai correspondre ce plan à la semi-droite δ.

Je ferai donc ainsi correspondre, à toute semi-droite du plan (P), un plan faisant un angle de 45^0 avec le premier, et parfaitement déterminé.

Réciproquement, il est évident qu'à tout plan (D) faisant un angle de 45^0 avec le plan (P) correspond une semi-droite parfaitement déterminée δ, portée par la trace du plan (D) sur le plan (P).

Je dirai que le plan (P) est représentatif de la semi-droite δ.

Considérons maintenant un cycle Γ du plan (P), c'est-à-dire un cercle auquel on attache un sens. Par Γ passent deux cônes de révolution (G) et (G'), ayant tous deux un angle au sommet de 90^0. L'un de ces cônes a son sommet au-dessus du plan (P), l'autre a son sommet au-dessous de ce plan. Je ferai correspondre à Γ le premier de ces cônes, si Γ est

[1]) Ou plutôt à ses transformations, car il y en a deux très distinctes, comme on le verra plus loin.

[2]) Cet angle de 45^0 n'est introduit que pour fixer les idées; je pourrais le remplacer par un angle quelconque *non droit*.

sinistrorsum, c'est-à-dire si le sens de Γ est contraire à celui des aiguilles d'une montre, et le second de ces cônes, dans le cas contraire. Réciproquement, à tout cône de révolution (G), ayant un angle au sommet de 90^0 et son axe vertical, correspond un cycle parfaitement déterminé, porté par la trace du cône sur la plan (P). Ce cycle est sinistrorsum, si (G) a son sommet au-dessus du plan (P), et dextrorsum dans le cas contraire.

Je dirai que (G) est le cône représentatif du cycle Γ.

Cela posé, soient δ une semi-droite et Γ un cycle du plan (P). On dit que δ touche Γ, si la droite qui porte δ touche le cercle qui porte Γ, et si, en outre, les éléments en contact du cercle et de la droite ont le même sens. On voit très aisément que la condition nécessaire et suffisante pour que δ touche Γ est que le plan (D), représentatif de δ, soit tangent au cône (G), représentatif de Γ.

Remarquons enfin que tous les plans (D) sont tangents à un même cercle C situé dans le plan de l'infini, ayant pour équations en coordonnées rectangulaires homogènes (on suppose Ox et Oy dans le plan P)

$$t=0,\ x^2+y^2-z^2=0.$$

Tous les cônes (G) sont les cônes du second ordre qui contiennent ce cecrle C. On peut donc ainsi résumer les considérations qui précèdent:

A toute semi-droite du plan (P) correspond d'une manière univoque un plan qui touche C; à tout cycle du plan (P) correspond, d'une manière univoque, un cône du second ordre contenant C. Une semi-droite et un cycle sont tangents entre eux si le plan et le cône correspondants sont tangents entre eux.

3. Il est maintenant avantageux (mais non essentiel) d'avoir recours à une transformation par polaires réciproques, ayant pour base la sphère dont l'équation est

$$x^2+y^2+z^2=1,$$

dans le système de coordonnées précédement défini. Le cercle C a pour transformé le cône (C) dont l'équation est

$$x^2+y^2-z^2=0.$$

Tout plan (D) a pour pôle un point d du cône (C); tout cône (G) a pour transformé une conique G tracée sur le cône (C).

Par suite:

Les semi-droites et les cycles de plan (P) correspondent d'une façon univoque aux points du cône (C) et aux coniques tracées sur ce cône. Je dirai qu'un point du cône est représentatif d'une semi-droite et qu'une conique tracée sur le cône est représentative d'un cycle.

La Géométrie de direction dans le plan (P) se trouve ainsi ramenée à l'étude des figures tracées sur le cône (C).

On se rend compte immédiatement des propositions suivantes:

Une semi-droite et son opposée, c'est-à-dire la seconde semi-droite portée par la même droite, ont en général des points représentatifs distincts, symétriques par rapport au plan (P). Il n'y a d'exception que pour les semi-droites isotropes: une telle semi-droite et son opposée ont le même point représentatif, situé sur l'une des génératrices isotropes du cône (C).

En particulier, la droite de l'infini du plan (P) n'a qu'un point représentatif, qui est le sommet du cône (C).

Si une semi-droite δ enveloppe un cycle Γ, son point représentatif d décrit la conique G, représentative du cycle Γ.

Il y a d'ailleurs correspondance homographique entre le point d, mobile sur G, et la semi-droite δ, tangente mobile de Γ.

Dans le cas où le cycle Γ a son rayon nul, c'est-à-dire si la semi-droite δ passe par un point fixe, la conique G est située dans un plan vertical.

Si plusieurs semi-droites sont parallèles, leurs points représentatifs sont situés sur une même génératrice du cône (C).

Le faisceau constitué par des semi-droites parallèles et la ponctuelle constituée par leurs points représentatifs se correspondent homographiquement.

On voit enfin que, étant définie une transformation ponctuelle quelconque du cône (C) en lui-même, on peut en déduire une transformation qui établit une correspondance entre les semi-droites du plan (P).

Parmi les transformations de cette nature, les plus intéressantes sont les transformations par semi-droites réciproques. Pour y arriver, il est nécessaire d'étudier tout d'abord les transformations homographiques involutives du cône (C) en lui-même.

4. Transformations homographiques involutives du cône (C) en lui même. — Une transformation homographique générale de l'espace dépend de 15 paramètres. Si l'on cherche à déterminer cette

transformation de telle manière qu'elle change le cône (C) en lui-même, on l'assujettit à 8 conditions. Il existe donc ∞^7 transformations homographiques jouissant de la propriété énoncée. Une telle transformation change les points et les coniques du cône (C) en éléments de même nom. Considérons maintenant ces points et ces coniques comme représentatifs des semi-droites et des cycles du plan (P). On voit ainsi que l'on peut définir, dans le plan (P), ∞^7 transformations qui changent les semi-droites en semi-droites et les cycles en cycles.

Je réserve, pour une autre occasion, l'étude de ces transformations générales. Je me contenterai d'étudier ici celles d'entre elles qui présentent un caractère involutif.

Pour les définir, je rappelle qu'il existe dans l'espace deux espèces de transformations homographiques involutives:

1° L'homologie involutive, définie par un point (sommet de l'homologie) et un plan (plan de base de l'homologie); deux points correspondants sont en ligne droite avec le sommet; de plus, les deux points divisent harmoniquement le segment limité par la trace sur le plan de base de la droite qui les joint et par le sommet.

L'hoomologie involutive a une infinité de points doubles: ce sont le sommet et tous les points du plan de base.

2° L'homographie axiale involutive, définie par deux droites qui ne se rencontrent pas (axes de l'homographie); deux points correspondants sont tels que la droite qui les joint rencontre les deux axes; de plus, les deux points divisent harmoniquement le segment limité par les deux points de rencontre de la droite qui les joint et des axes.

L'homographie axiale involutive a une infinité de points doubles: ce sont les points des deux axes.

Examinons à présent dans quels cas l'une de ces homographies peut transformer un cône du second ordre en lui-même.

1° Cas de l'homologie involutive. — Le sommet du cône devant se correspondre à lui-même doit être au point double de l'homologie. Il y a deux cas à distinguer:

(*a*) Le sommet du cône est au sommet de l'homologie; il est bien clair alors que, quelles que soient les autres conditions qui définissent la transformation, le cône est transformé en lui même;

(*b*) Le sommet du cône est dans le plan de base de l'homologie; alors, le sommet S de l'homologie est en dehors du cône, et il est visible que le plan de base doit être le plan polaire du point S par rapport au cone. Réciproquement, toute homologie involutive ayant pour sommet un point quelconque de l'espace et pour plan de base le plan polaire de ce point par rapport au cône transforme le cône en lui-même.

2° (c) Cas de l'homographie axiale involutive. — Le sommet du cône doit être sur l'un des axes, et les deux axes sont évidemment des droites conjuguées par rapport au cône. Réciproquement, toute homographie axiale involutive, dont les axes sont conjugués par rapport au cône, transforme le cône en lui-même.

Il y a donc trois espèces bien distinctes de transformations homographiques involutives qui transforment un cône en lui-même. Les deux premières, (a) et (b), dépendent de trois paramètres; la troisième, (c), dépend de quatre paramètres.

Dans les transformations (a) et (b), il existe une infinité de points doubles, le sommet du cône et tous les points de la ligne commune au cône et au plan de base de l'homologie. Cette ligne est une conique dans la transformation (a), un système de deux génératrices dans la transformation (b).

Dans la transformation (c), il n'y a que trois points doubles, qui sont les points où le cône est rencontré par les axes de l'homographie, deux de ces points étant confondus au sommet du cône.

5. Transformations par semi-droites réciproques. — Examinons successivement les transformations par semi-droites du plan (P), qui sont figurées par les transformations (a), (b), (c) définies précédemment.

Nous désignerons ces nouvelles transformations respectivement par (α), (β) et (γ).

Transformation (α).—Il existe sur le cône (C), dans la transformation (a), une conique G qui se correspond à elle-même. Donc, dans la transformation (α), il existe un cycle Γ qui se correspond à lui-même.

Soient m, m' deux points du cône (C) conjugués dans la transformation (a). Ils sont sur une même génératrice du cône, et, si l'on appelle O le sommet du cône, p le point où mm' rencontre la conique G, les points m et m' divisent harmoniquement le segment Op. En appliquant les remarques faites à la fin du n° 3, on voit immédiatement que:

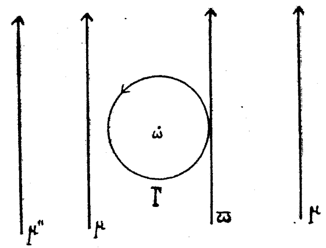
Si l'on appelle μ et μ' deux semi-droites se correspondant dans la transformation (α), ces semi-droites sont parallèles et, de plus, la semi-droite $\overline{\varpi}$ parallèle à μ et μ' et équidistante de ces deux semi-droites touche le cycle Γ.

La transformation (α) est ainsi définie sans ambiguïté par le cycle Γ:

Construisons (fig. 1) la semi droite μ'', parallèle à μ', et telle que le point ω, centre de Γ, soit équidistant de μ et de μ''. On voit tout de suite

que la droite μ'' est à gauche ou à droite de μ, suivant que le cycle Γ est sinistrorsum ou dextrorsum, et que la distance de μ à μ'' est égale ou double du rayon du cycle Γ.

On peut donc passer de μ à μ' en construisant μ'', parallèle à μ, de même sens et d'un côté déterminé de cette semi-droite, puis en con-



Rys. 1.

struisant μ', symétrique, en position, de μ'' par rapport à ω et de même sens.

Autrement dit, la transformation (α) n'est qu'une combinaison de deux transformations bien connues: la transformation parallèle ou dilatation et la symétrie par rapport à un point.

Transformation (β). — Dans la transformation (b), deux points conjugués m et m' sont en ligne droite avec un point fixe s de l'espace. Soient μ et μ' les semi-droites du plan (P) correspondant à m et m'; (M) et (M') leurs plans représentatifs. Ces plans, qui sont les plans polaires des points m et m' par rapport à la sphère

$$x^2+y^2+z^2=1,$$

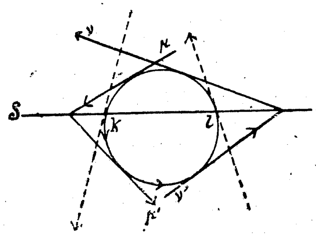
se coupent suivant une droite qui appartient au plan (S), plan polaire du point s par rapport à la même sphère. Donc les semi-droites μ et μ', qui sont les traces des plans (M) et (M') sur le plan (P'), se coupent sur la droite S, trace du plan (S) sur le plan (P). Ainsi:

Deux semi-droites μ et μ', se correspondant dans la transformation (β), se coupent sur une droite fixe S.

Soient, en second lieu, deux couples de points du cône (C) (m, m'), (n, n'), conjugués dans la transformation (b). Les points m, m', n, n' étant dans un même plan sur une même conique du cône (C). Par suite:

Quatre semi-droites μ, μ', ν, ν', conjuguées deux à deux dans la transformation (β), sont tangentes à un même cycle.

Il suffit dès lors, pour définir la transformation (β), de se donner la droite S et un couple de semi-droites conjuguées, μ et μ′, se coupant sur la droite S. Pour construire la semi-droite conjuguée d'une semi-droite quelconque ν, on



Rys. 2

construira le cycle qui touche μ, μ′ et ν et, par le point où ν coupe S, on mènera la seconde droite ν′ qui touche ce cycle (fig. 2).

On vérifie bien que la transformation (β) dépend de trois paramètres: il faut, en effet, pour la définir se donner la droite S (deux paramètres) et la semi-droite conjuguée d'une droite donnée (un seul paramètre, puisque cette conjuguée est assujettie à passer par un point connu).

On vérifie facilement aussi qu'il existe dans la transformation (β) une infinité de droites doubles, parallèles à l'une ou l'autre de deux directions fixes: on les obtient de la manière suivante:

Soient k et l les points de rencontre de S et d'un cycle quelconque qui touche μ et μ′: les tangentes à ce cycle aux points k et l sont des semi-droites de directions bien déterminées:

Toute semi-droite parallèle à l'une ou l'autre de ces tangentes se confond avec sa conjuguée dans la transformation (β).

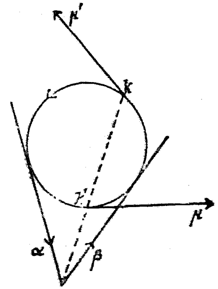
Ce fait concorde bien avec celui qu'il existe, dans la transformation (b) définie sur le cône (C), une infinité de points doubles répartis sur deux génératrices.

Transformation (γ). — Soient m, m' deux points du cône (C), conjugués dans la transformation (c). La droite mm' rencontre, comme on l'a vu, deux droites A et B, conjuguées par rapport au cône. L'une d'elles, A, passe par le sommet du cône; l'autre le rencontre en deux points a et b qui sont des points doubles de la transformation. Il en résulte que les points a, b, m, m' sont sur une même conique du cône (C), et que, sur cette conique, les points m et m' sont conjugués harmoniques par rapport aux points a et b.

On conclut immédiatement de là que:

Dans la transformation (γ) il existe deux semi-droites doubles α et β. Si μ et μ′ sont deux semi-droites conjuguées quelconques, les semi-droites α, β, μ, μ′ sont tangentes à un même cycle, et de plus les tangentes μ et μ′ sont conjuguées harmoniques par rapport aux tangentes α et β.

La transformation est ainsi définie par ses deux semi-droites doubles α et β (quatre paramètres). Pour construire la semi-droite μ′, conjuguée d'une semi-droite donnée μ, on opérera de la manière suivante: on construira (fig. 3) le cycle qui touche α, β et d et l'on joindra le point de contact de μ au point de



Rys. 3.

rencontre de α et de β. Cette droite rencontre le cycle en un second point; en menant en ce point la tangente au cycle, on obtient la semi-droite cherchée μ′.

La transformation définie par Laguerre dans le premier des Mémoires énumérés au début de ce travail est la transformation (γ). Vers la fin du Mémoire, on lit la Note suivante (p. 601 des Oeuvres):

Depuis que cette Note a été communiquée à la Société, j'ai reconnu qu'il était utile de modifier légèrement la définition précédente de la transformation par directions réciproques*); je développerai ce point dans une prochaine Communication.

En effet, dans tous ses travaux ultérieurs, Laguerre a utilisé exclusivement la transformation (β); mais, chose assez singulière, sans plus jamais parler des différences qui la séparent de la transformation (γ), considérée en premier, et qui sont plus que des „modifications légères". [Je rappelle que la transformation (γ) dépend de quatre paramètres, et la transformation (β) de trois seulement; que la transformation (γ) n'a que deux semi-droites doubles et la transformation (β) une infinité].

*) Laguerre n'a adopté que plus tard l'expression de semi-droite; il disait alors: direction.

Laguerre n'a pas signalé la transformation (α).

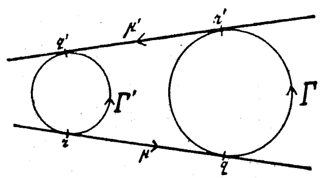
6. Il n'entre pas dans le plan de ce travail de pousser à fond l'étude des transformations par semi-droites réciproques: ce serait, la plupart du temps, répéter inutilement ce qu'a déjà dit Laguerre. J'examinerai seulement le problème suivant, que Laguerre a passé sous silence, malgré son importance qui me paraît fondamentale:

Une semi-droite μ varie en restant tangente à une courbe donnée; la semi-droite μ', conjuguée de μ dans l'une des transformations (α), (β), (γ), enveloppe une courbe qui est la transformée de la première. Comment construire le point de contact q' de μ' avec son enveloppe, connaissant le point analogue q, relatif à la semi-droite μ ?

Il est clair tout d'abord que, la transformation envisagée étant de contact, le point q' ne depend que du point q, et nullement de la nature de l'enveloppe de la droite μ.

Nous pouvons donc imaginer (fig. 4) que l'enveloppe de μ est le cycle bien déterminé Γ, qui touche μ' et μ, cette dernière semi-droite au point q. Le transformé Γ' de Γ touchera aussi μ et μ', cette dernière droite au point cherché q'. Appelons r le point où le cycle Γ' touche la semi-droite μ.

La transformation considérée étant involutive, si l'on fait varier le point q, ce point et le point r vont engendrer une involution sur la semi-droite μ.



Rys. 4.

Remarquons en outre que, si le cycle Γ s'éloigne à l'infini, il en est de même du cycle Γ': donc le point q et le point r engendrent sur la semi-droite μ une involution dont un point double est rejeté à l'infini.

Or il existe sur une droite deux espèces d'involution de cette nature: l'involution identique, qui fait se correspondre un point à lui-même, et la symétrie, dans laquelle deux points conjugués sont symétriques par rapport à un point fixe de la droite. C'est l'une ou l'autre de ces involutions qui entre en jeu, suivant que l'on a affaire à la transformation (α), (β) ou (γ). Je laisse de côté la transformation (α), pour les raisons données plus haut.

Disons seulement que l'involution à laquelle elle donne lieu est une symétrie; on le voit immédiatement.

Dans le cas de la transformation (β), tout cycle tangent à μ et μ' se transforme en lui-même. On a donc ici une involution identique.

Dans le cas de la transformation (γ), un cycle tangent à μ et μ' ne se transforme en lui-même que s'il est aussi tangent aux droites doubles α et α'. On trouve donc une symétrie dont le centre est le point k de la figure 3.

De la relation entre les points q et r, on passe immédiatement à la relation entre les points q et q'. On parvient ainsi aux constructions suivantes, que l'on peut énoncer d'une façon précise, en remarquant qu'un segment d'origine et d'extrémité données, porté par une semi-droite donnée, est bien défini en grandeur et en signe:

Dans le cas de la transformation (β), si l'on désigne par l le point de rencontre des semi-droites μ et μ', on a la relation

$$lq' = -\, lq.$$

Dans le cas de la transformation (γ), si l'on désigne par k et k' les points de contact respectifs des semi-droites μ et μ avec le cycle qui les touche ainsi que les semi-droites doubles de la transformation, on a

$$k'q' = kq.$$

On déduit immédiatement de là le théoreme fondamental suivant, donné par Laguerre:

Soient C et C_1 deux courbes, μ une semi-droite qui les touche respectivement aux points q et q_1, C', C'_1, μ', q', q'_1 les éléments qui leur correspondent respectivement dans une transformation (β) ou (γ).

On a, dans le cas de la transformation (β),

$$q'q'_1 = -\, q\, q_1,$$

et, dans le cas de la transformation (γ),

$$q'q'_1 = qq_1.$$

Autrement dit, la distance tangentielle de deux courbes est, en grandeur et en signe, un invariant pour la transformation (γ); la valeur absolue de cette distance tangentielle est un invariant pour la transformation (β).

7. Hypercycles. — Plusieurs des travaux que Laguerre a publiés sur la Géométrie de direction sont relatifs à des courbes qu'il a nommées hypercycles.

J'appellerai hypercycle général la courbe enveloppe des semi-droites du plan (P) qui ont pour points représentatifs les points d'une biquadratique gauche tracée sur le cône (C).

Autrement dit, un hypercycle général est la trace, sur le plan (P), de la développable circonscrite au cercle C et à une quadrique quelconque. On voit que l'hypercycle général est une courbe de quatrième classe, de genre *un*, dépendant de huit parametres.

Dans le cas où la biquadratique représentantive de l'hypercycle général passe par le sommet du cône, l'hypercycle devient unicursal. *Ce sont les hypercycles de cette nature que Laguerre a exclusivement considérés.*

Il est clair que les propriétés des biquadratiques permettent d'énoncer de nombreux théorèmes relatifs aux hypercycles généraux. Je me contenterai, pour ne pas allonger ce travail outre mesure, de donner à ce sujet quelques indications rapides.

Je désignerai par Υ l'hypercycle (en supprimant, pour plus de brièveté, le mot *général*) et par U sa biquadratique représentative.

On peut exprimer les coordonnées d'un point de U en fonctions elliptiques d'un paramètre, de telle manière que les arguments de quatre points de U situés dans un même plan aient une somme nulle. Par suite:

On peut faire correspondre aux semi-droites tangentes à Υ des arguments elliptiques, tels que, si quatre tangentes ont des arguments dont la somme est nulle, ces quatre semi-droites sont tangentes à un même cycle.

Considérons maintenant les involutions de points sur la biquadrtique U. On sait qu'il y en a de deux espèces. Dans une involution de la première espèce, deux points conjugués ont des arguments de somme constante et d'ailleurs quelconque; dans une involution de la deuxième espèce, deux points conjugués ont des arguments dont la différence est l'une des trois demi-périodes ω_1, ω_2, ω_3.

Les involutions de la première espèce ne semblent conduire à un resultat intéressant que dans le cas où la somme constante des arguments est 0, ω_1, ω_2 ou ω_3. Les points conjugués de U sont alors alignés sur le sommet de l'un des quatre cônes qui contiennent cette courbe, y compris le cône (C). On en conclut que:

L'hypercycle Υ se correspond à lui-même dans une transformation (α) et dans trois transformations (β).

Le premier de ces résultats peut encore s'énoncer ainsi:

La semi-droite parallèle à deux tangentes parallèles de l'hypercycle et équidistante de ces deux tangentes enveloppe un cycle.

Théorème dont la démonstration directe est d'ailleurs immédiate.

Dans une involution de la deuxième espèce, deux points conjugués m et m' de U ont pour arguments respectifs u et $u+\omega_1$, par exemple. La droite

qui les joint rencontre, comme l'on sait, la droite qui joint le sommet du cône (C) au sommet de l'un des autres cônes passant par U, et aussi la droite qui joint les sommets des deux autres cônes. Ces deux droites sont d'ailleurs conjuguées par rapport au cône (C). Par suite:

L'hypercycle Υ se correspond à lui-même dans trois transformations (γ).

Plus généralement, l'une quelconque des transformations (a), (b), (c) transforme U en une courbe de même nature. Donc:

Toute transformation (α), (β) ou (γ) change un hypercycle en un autre hypercycle.

Le premier de ces résultats peut encore s'énoncer ainsi:

Toute courbe parallèle à un hypercycle est un hypercycle.

Terminons ce paragraphe en montrant que l'on peut choisir la transformation (β) *) de manière à transformer Υ en une *conique*.

Il va sans dire que la transformation ne peut être birationnelle: il faut entendre que les semi-droites tangentes à Υ sont transformées, deux à deux, en les semi-droites opposées portées par une même tangente à une conique.

Il faut montrer qu'on peut choisir une homologie involutive (b), de telle manière qu'à la biquadratique U elle fasse correspondre une biquadratique U', ayant le plan (P) comme plan de symétrie. Autrement dit, soit s le sommet d'un cône autre que (C), contenant U. Il faut déterminer l'homologie involutive (b) de telle manière qu'elle transforme le point s en le point rejeté à l'infini dans la direction de la verticale.

Menons la verticale du point s; elle rencontre le cône (C) aux points i et k. Le centre de l'homologie cherchée doit évidemment se trouver en un point ω de cette droite et, si p est le point où le plan de base de l'homologie rencontre la même droite, les points i et k d'une part, s et le point à l'infini de ik de l'autre, doivent diviser harmoniquement le segment ωp (fig. 5).

Fig. 5.

Donc ω est l'un des points doubles de l'involution déterminée sur la droite ik par les couples (i,k), (s,∞), et l'on obtient le point ω en prenant sur cette droite

$$s\omega = \pm\sqrt{si.\,sk}.$$

*) La même chose pourrait se dire de la transformation (γ). On trouverait même une infinité de transformations de cette nature satisfaisant à la condition énoncée.

Ainsi, à chacun des cônes autres que (C) qui contiennent la biquadratique U correspondent deux homologies involutives, satisfaisant à la condition énoncée. On peut donc énoncer finalement le résultat suivant:

Un hypercycle est, de six manières différentes, le transformé d'une conique par une transformation (β)*).

8. Dans cette partie j'ai rattaché la géométrie de direction à la géométrie sur un cône du second ordre. En soumettant ce cône à une transformation par polaires réciproques, on rattachera la géométrie de direction à la géométrie autour d'une conique.

Les résultats prennent une forme particulièrement frappante si l'on suppose que cette conique est l'ombilicale. On peut ainsi faire dériver des similitudes de l'espace les transformations par semi-droites qui changent les cycles en cycles. En particulier, les transformations (α), (β), (γ) se rattachent aux transformations involutives de l'espace qui n'altèrent pas la grandeur des figures, et qui sont: la symétrie par rapport à un point, la symétrie par rapport à un plan, la symétrie par rapport à une droite.

Je reviendrai dans la deuxième partie sur ce sujet et sur les transformations analogues de l'espace qui se rattachent aux similitudes de l'espace à quatre dimensions. Je montrerai en particulier qu'il existe dans l'espace quatre transformations par semi-plans réciproques, dérivant des quatre transformations involutives de l'espace à quatre dimensions, qui n'altèrent pas la grandeur des figures (symétrie par rapport à un point, un plan, une droite, un espace). Laguerre n'a fait connaître que la dernière de ces transformations. **)

II. La géométrie dans l'espace.

1. J'ai montré dans la première partie comment la géométrie de direction dans le plan se rattache naturellement à la géométrie de l'espace. En particulier, les transformations par semi-droites réciproques de Laguerre dérivent des transformations homographiques involutives, qui changent en lui même un cône du second ordre, ou bien, en modifiant légèrement le point de vue, des transformations involutives de l'espace qui n'altèrent pas les longueurs d'une figure (ces opérations sont la symétrie par rapport à un point, par rapport à une droite ou par rapport à un plan).

On peut de même rattacher les transformations par semi-plans réciproques de l'espace, auxquelles Laguerre a consacré une courte Note*), à certaines transformations de l'espace à quatre dimensions. Je me propose, dans la présente partie, de développer cette indication que j'ai donnée à la fin de la première partie de mon travail.

2. Je rappellerai d'abord quelques définitions et propositions relatives à la géométrie de direction.

Une surface (qui n'est pas à un seul côté) partage l'espace en deux régions, et l'on peut donner arbitrairement à l'une de ces régions le nom de région positive, à l'autre le nom de région négative**); on désignera sous le nom de semi-surface une surface ainsi définie.

Par exemple un plan porte deux semi-plans que l'on peut appeler opposés et que l'on doit regarder comme deux semi-surfaces distinctes. De même une sphère porte deux semi-sphères opposées.

Pour que deux semi-surfaces se touchent en un point, il faut non seulement qu'elles aient même plan tangent en ce point, mais que les régions positives par rapport aux deux semi-surfaces soient les mêmes dans le voisinage de ce point. De là résultent immédiatement les propositions suivantes:

On ne peut mener à une semi-sphère qu'un semi-plan parallèle à un semi-plan donné; il existe une semi-sphère et une seule touchant quatre semi-plans donnés; il existe un semi-cône de révolution et un seul touchant trois semi-plans donnés; il existe une semi-sphère et une seule inscrite à un semi-cône de révolution donné et tangente à un semi-plan donné.

Ce qui précède est extrait presque textuellement de la Note de Laguerre. Je ferai encore les conventions suivantes: la distance d'un point à un semi-plan sera considérée comme positive si le point est dans la région positive par rapport au semi-plan, et comme négative dans le cas contraire; le rayon d'une semi-sphère sera considérée comme positif si la région positive par rapport à cette semi-sphère en contient le centre, et comme négatif dans le cas contraire.

On voit immédiatement que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un semi-plan et une semi-sphère soient tangents est que la distance au semi-plan du centre de la semi-

*) Un passage du Mémoire Sur les courbes de la troisième classe (OEuvres p. 667) établit clairement que Laguerre rattachait l'hypercycle à la développable circonscrite à deux quadriques. Mais il ne paraît s'être attaché qu'au cas où cette développable est unicursale.

**) Dans un article inséré au Bulletin des Sciences mathématiques (janvier 1906, p. 19), Butin a déjà rattaché la transformation de Laguerre à la symétrie par rapport à un espace linéaire (ou un plan, comme s'exprime Butin) dans l'espace à quatre dimensions.

*) Comptes rendus, 1881; OEuvres, t. II, p. 604.

**) Laguerre emploie les mots de region extérieure, région intérieure; cette terminologie peut donner lieu à des confusions.

sphère soit égale en grandeur et en signe au rayon de la semi-sphère.

3. Représentation dans l'étendue*) des semi-plans et des semi-sphères. — Considérons un plan réel, représenté en coordonnées cartésiennes rectangulaires par l'équation

$$\xi x + \eta y + \zeta z + 1 = 0, \tag{1}$$

où ξ, η, ζ sont les coefficients. Le plan (1) porte deux semi-plans. Je dirai que le premier a pour coordonnées

$$\xi, \eta, \zeta, +\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2},$$

et le second

$$\xi, \eta, \zeta, -\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}.$$

Ainsi à tout système de nombres ξ, η, ζ, τ, satisfaisant à la relation

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2-\tau^2 = 0, \tag{2}$$

correspond un semi-plan (P) bien déterminé.

Étant donné un semi plan (P) de coordonnées ξ, η, ζ, τ, nous conviendrons de prendre pour région positive relative au semi-plan la région des points x, y, z, tels que l'expression

$$\frac{\xi x + \eta y + \zeta z}{\tau}$$

soit positive. En vertu de cette convention, et de celle qui a été faite plus haut relativement au signe de la distance d'un point à un semi-plan, l'expression précédente représente en grandeur et en signe la distance au semi-plan (P) du point x, y, z.

Soient maintenant λ, μ, ν les coordonnées du centre d'une semi-sphère (S), ρ son rayon (positif ou négatif). Pour que le semi-plan (P) et la semi-sphère (S) soient tangents, il faut et il suffit que l'on ait la relation

$$\frac{\lambda\xi+\mu\eta+\nu\zeta+1}{\tau} = \rho,$$

ou

$$\lambda\xi+\mu\eta+\nu\zeta-\rho\tau+1 = 0. \tag{3}$$

Les relations (2) et (3) peuvent être interprétées dans l'étendue.

(*A suivre*)

*) J'emploierai, pour parler de l'espace à quatre dimensions, le mot d'étendue, introduit par Jouffret dans son Traité élémentaire de Géométrie à quatre dimensions (Paris, Gauthier-Villars, 1904).

A. ROSENBLATT.

Sur les variétés algébriques à trois dimensions dont les genres satisfont linégalité $P_g \leqq 3(p_g - p_a - 3)$.

O rozmaitościach algebraicznych trójwymiarowych, których liczby rodzajowe czynią zadość nierówności $P_g \leqq 3(p_g - p_a - 3)$.

1. Envisageons une variété algébrique V_3 à trois dimensions et soient P_g, p_g, p_a le genre géométrique de la variété, le genre géometrique d'une surface générale de la variété et le genre arithmétique de cette surface. Nous supposons que ces genres satisfont à l'inégalité

$$P_g \leqq 3(p_g - p_a - 3). \tag{1}$$

M. Comessatti*) a montré que ces variétés possèdent ou des faisceaux irrationnels (de genre $\geqq 2$) de surfaces algébriques ou bien des congruences irrégulières (d'irrégularité $\geqq 3$) de courbes algébriques.

Envisageons le système linéaire $\sum_{i=0}^{r} \lambda_i u_i$ d'intégrales de M. Picard de première espèce de la variété V_3 $(r+1 == p_g - p_a)$ et la matrice M

$$M = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x_0} \cdots \frac{\partial u_r}{\partial x_0} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial u_0}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial u_r}{\partial x_2} \end{vmatrix} \tag{2}$$

x_i, $i = 0, 1, 2$ étant les variables indépendantes. Désignons par $X_{i,j,k}$ le mi-

*) „Sulle varietà algebriche che posseggono integrali semplici funzionalmente dipendenti". Atti della R. Accademia dei Lincei. T. 22. 1913.