$$\left(\frac{\xi_i}{a_i}\right)^{\alpha_k} = \left(\frac{\xi_k}{a_k}\right)^{\alpha_i} \qquad i, k = 1, 2, \ldots, n, \tag{3}$$

gdzie

$$\alpha_i = \log \frac{a_i}{b_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Jeśli wszystkie α_i są różne od zera, równaniom (3) można nadać postać:

$$\left(\frac{\xi_1}{a_1}\right)^{\frac{1}{\alpha_1}} = \left(\frac{\xi_2}{a_2}\right)^{\frac{1}{\alpha_2}} =, \ldots, = \left(\frac{\xi_n}{a_n}\right)^{\frac{1}{\alpha_n}}.$$

Niech AB oznacza łuk krzywej hyperbolicznej zawarty między punktami A i B.

Badanie obszaru absolutnej zbieżności szeregu potęgowego (1) można oprzeć na twierdzeniu następującem:

Jeśli szereg (2) jest zbieżny w punktach A i B, jest on zbieżny na całym łuku AB.

Cztery pierwsze paragrafy są poświęcone zastosowanie tej metody do szeregów potęgowych podwójnych, następne zaś do szeregów potęgowych o większej liczbie zmiennych.

Q. VETTER.

Deux remarques sur les coniques imaginaires générales.

Dwie uwagi o stożkowych urojonych ogólnych.

I.

On peut exprimer la conique imaginaire générale X par l'équation suivante[1]):

$$X \equiv Ax_1^2 + 2Bx_1x_2 + Cx_2^2 - x_3^2 = 0. \tag{1}$$

où $A = a + i\alpha$, $B = b + i\beta$, $C = c + i\gamma$ et où le côté o $(x_3 = 0)$ du triangle fondamental du système des coordonnées et son sommet opposé O $(x_1 = 0, x_2 = 0)$ sont la polaire réelle et le pôle conjugué réel de la conique X.

Cette conique a un seul triangle polaire réel ou semiréel, qui est commun à la conique imaginaire conjuguée

$$X^* \equiv A^* x_1^2 + 2B^* x_1 x_2 + C^* x_2^2 - x_3^2 = 0, \tag{2}$$

où $\quad A^* = a - i\alpha,\ B^* = b - i\beta,\ C^* = c - i\gamma.$[2])

J'ai apellé ce triangle „triangle polaire caractéristique".

Les coniques imaginaires générales conjuguées se coupent dans 4 points réels ou imaginaires conjugués et touchent 4 tangentes réelles ou imaginaires conjuguées[3]). Ces points et ces tangentes forment un quadrangle inscrit et un quadrilatère circonscrit à ces coniques, que nous allons appeler

---

[1]) Q. Vetter: „Le coniche e le quadriche imaginarie generali". Giorn. di mat. LXI (1923) p. 149—156. Malheureusement, étant en voyage, je ne pouvais pas corriger les épreuves de cet article, et pour cela beaucoup de fautes d'impression se sont glisseés surtout dans les formules.

[2]) Q. Vetter: „Harmonická čtveřina a obecná imaginární kuželosečka", Progr. č. reálky v Lipniku, 1909.

J. L. S. Hatton: „The theory of imaginarity in geometry", Cambridge, (1920) p. 124 ss.

[3]) Ibidem.

„quadrangle et quadrilatère fondamentaux“. Les points d'intersection sont donnés par les équations suivantes:

$$\boldsymbol{A} \equiv a x_1^2 + 2 b x_1 x_2 + c x_2^2 - x_3^2 = 0, \tag{3}$$

$$\boldsymbol{B} \equiv \alpha x_1^2 + 2 \beta x_1 x_2 + \gamma x_2^2 = 0. \tag{4}$$

L'equation (4) définit les côtés opposés du quadrangle fondamental, qui sont menés par le pôle O, cependant l'équation (3) définit une conique $\boldsymbol{A}$, que nous appellons „conique adjointe aux coniques imaginaires générales conjugées et au pôle O“.

Le faisceau ponctuel des coniques circonscrites au quadrangle fondamental est donné par l'équation suivante:

$$\boldsymbol{A} + \mu \boldsymbol{B} = 0. \tag{5}$$

Si $= 0$, l'équation (5) définit la conique $\boldsymbol{A}$, si $= \infty$, elle définit les droites $\boldsymbol{B}$, si $= \pm i$, elle définit les coniques $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{X}^*$. Ces courbes forment donc un quaterne harmonique. On peut formuler ce résultat dans le théorème suivant:

Les tangentes des coniques imaiginaires générales conjuguées dans un de leur points d'intersection sont divises harmoniquement par la droite, qui joint ce point avec un autre point d'intersection, et par la tangente de la conique adjointe aux coniques données imaginaires générales conjuguées et au sommet du triangle polaire, par lequel passe cette droite de jonction.

II.

La droite $l \equiv x_1 = \lambda x_2$ passe par le pôle O et coupe la conique $\boldsymbol{X}$ dans les points M_1 et M_2 et la conique conjuguée $\boldsymbol{X}^*$ dans les points M_1^*, et M_2^*. Les coordonnées de ces points sont suivantes.

$$x_1 = \frac{x_3}{\sqrt{a + 2 b \lambda + c \lambda^2 + i(\alpha + 2 \beta \lambda + \gamma \lambda^2)}}, \quad x_2 = \lambda x_1,$$

$$x_1^* = \frac{\pm x_3^*}{\sqrt{a + 2 b \lambda + c \lambda^2 - i(\alpha + 2 \beta \lambda + \gamma \lambda^2)}}, \quad x_2^* = \lambda x_1^*.$$

Designons par L le point d'intersection de la droite l avec la polaire réelle o des coniques $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{X}^*$. Les points O et L forment la paire commune. des points harmoniques aux paires M_1, M_2 et M_1^*, M_2^*. Soit P, Q la paire commune des points harmoniques aux paires M_1, M_1^* et M_2, M_2^*. Les points P et Q sont donc réels et leurs coordonnées sont suivantes:

$$y_1 = \frac{\pm y_3}{\sqrt[4]{(a + 2 b \lambda + c \lambda^2)^2 + (\alpha + 2 \beta \lambda + \lambda^2)^2}}, \quad y_2 = \lambda y_1.$$

Les points R et R^* qui divisent harmoniquement ou la paire M_1, M_2^* ou la paire M_2, M_1^* ont les coordonnées suivantes:

$$y_1 = \frac{\pm i y_3}{\sqrt[4]{(a + 2 b \lambda + c \lambda^2)^2 + (\alpha + 2 \beta \lambda + \lambda^2)^2}}, \quad y_2 = \lambda y_1.$$

Le lieu géométrique des points P et Q et ainsi des points R et R^* est donc une courbe du 4ième ordre donnée par l'équation suivante

$$\boldsymbol{Y} \equiv (a^2 + \alpha^2)\, y_1^4 + 4\,(ab + \alpha\beta)\, y_1^3 y_2 + 2\,(ac + \alpha\gamma + 2 b^2 + 2\beta^2)\, y_1^2 y_2^2 + 4\,(bc + \beta\gamma)\, y_1 y_2^3 + (c^2 + \gamma^2)\, y_2^4 - y_3^4 = 0. \tag{6}$$

Soient U, V les points réels qui divisent avec O harmoniquement les paires M_1, M_1^* et M_2, M_2^* et soient W, W^* les points qui divisent avec O harmoniquement les paires M_1, M_2^* et M_2, M_1^*. Leurs coordonnées sont les suivantes:

$$z_1 = \frac{\pm 2 z_3}{\sqrt{2(a + 2 b \lambda + c \lambda^2) + 2 \sqrt{(a + 2 b \lambda + c \lambda^2)^2 + (\alpha + 2 \beta \lambda + \gamma \lambda^2)^2}}}, \quad z_2 = \lambda z_1$$

et

$$z = \frac{\pm 2 i z}{\sqrt{2(a + 2 b \lambda + c \lambda^2) + 2 \sqrt{(a + 2 b \lambda + c \lambda^2)^2 + (\alpha + 2 \beta \lambda + \gamma \lambda^2)^2}}}, \quad z_2 = \lambda z_1.$$

Le lieu géométrique de ces points est de même une courbe du 4ième ordre, c'est:

$$\boldsymbol{Z} \equiv (\alpha z_1^2 + 2 \beta z_1 z_2 + \gamma z_2^2)^2 + 4\,(a z_1^2 + 2 b z_1 z_2 + c z_2^2)\, z_3^2 - 4 z_3^4 = 0. \tag{7}$$

On peut, par substitution et dérivation, facilement démontrer que les deux courbes $\boldsymbol{Y}$ et $\boldsymbol{Z}$ passent par les points d'intersection des coniques $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{X}^*$, où elles touchent la conique adjointe $\boldsymbol{A}$.

Les paires O, L; P, Q et R, R^* se divisent harmoniquement[4]) et, par conséquent, les paires P, Q et R, R^* sont les couples de l'involution avec les points doubles O et L, dans laquelle le faisceau ponctuel des coniques (5) coupe la droite l. Deux coniques Γ et Δ de ce faisceau passent par les points P, Q et R, R^*.

---

4) R. Sturm: „Die Lehre von den geometrichen Verwandschaften“. Leipzig, (1908) T. I, p. 106.

Les paramètres correspondants dans l'équation (5) aux coniques Γ et Δ sont définis par la relation:

$$\mu = -\frac{a + 2b\lambda + c\lambda^2 \mp \sqrt{(a + 2b\lambda + c\lambda^2)^2 + (\alpha + 2\beta\lambda + \gamma\lambda^2)^2}}{\alpha + 2\beta\lambda + \lambda^2},$$

à laquelle on peut donner la forme suivante:

$$\mu^2 + 2\,\frac{a + 2b\lambda + c\lambda^2}{\alpha + 2\beta\lambda + \gamma\lambda^2}\,\mu - 1 = 0. \tag{8}$$

Si l'on met le coefficient du membre linéaire égal à un nouveau paramètre 2ν, la paire des paramètres μ et la paire correspondante des paramètres λ sont données par les équations suivantes:

$$\left.\begin{array}{c} \mu^2 - 1 + 2\nu\mu = 0. \\ a + 2b\lambda + c\lambda^2 - \nu(\alpha + 2\beta\lambda + \gamma\lambda^2) = 0, \end{array}\right\} \tag{9}$$

qui expriment deux involutions projectives I_y' et I_y''. Leurs constituantes sont les couples $\mu = \pm 1$, $\mu = 0, \infty$ et $\lambda = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{c}$, $\lambda = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}}{\gamma}$.

La couple involutive des coniques Γ et Λ coupe la couple correspondante de l'involution radiale outre les points P, Q, R et R^* de la droite l encore dans les points P_1, Q_1, R_1, R_1^* par lesquels passe la droite l_1. Tous ces points appartiennent à la courbe $\boldsymbol{Y}$.

Quand $\nu = \infty$, nous voyons, que la conique adjointe $\boldsymbol{A}$ et la conique dégénerée $\boldsymbol{B}$ de l'involution I_y' des coniques (5) correspondent à la couple des droites

$$\alpha + 2\beta\lambda + \gamma\lambda^2 = 0$$

dans l'involution radiale I_y''.

Les coniques $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{X}^*$ sont les éléments doubles de l'involution I_y'.

On peut développer une relation analogue aussi pour la courbe $\boldsymbol{Z}$.

Pour les quaternes harmoniques $[OLM_1M_2]$, $[OLM_1^*M_2^*]$, $[OUM_1M_1^*]$, $[OVM_2M_2^*]$, $[OWM_1M_2^*]$ et $[OW^*M_2M_1^*]$ sont valables les équations suivantes:

$$\begin{aligned} OL\,.\,(OM_1 + OM_2) &= 2\,OM_1\,.\,OM_2, \\ OL\,.\,(OM_1^* + OM_2^*) &= 2\,OM_1^*\,.\,OM_2^*, \\ OU\,.\,(OM_1 + OM_1^*) &= 2\,OM_1\,.\,OM_1^*, \\ OV\,.\,(OM_2 + OM_2^*) &= 2\,OM_2\,.\,OM_2^*, \\ OW\,.\,(OM_1 + OM_2^*) &= 2\,OM_1\,.\,OM_2^*, \\ OW\,.\,(OM_2 + OM_1^*) &= 2\,OM_2\,.\,OM_1^*. \end{aligned}$$

Des 4 premières équations, après des substations convenables, nous recevons la relation suivante:

$$OL\,.\,(OU + OV) = 2\,OU\,.\,OV,$$

qui démontre que le quaterne $[OLUV]$ est harmonique.

Des deux premières et des deux dernières équations nous recevons une relation pareille:

$$OL\,.\,(OW + OW^*) = 2\,OW\,.\,OW^*$$

et, par conséquent, la paire W, W^* divise aussi harmoniquement la paire O, L.

Par la raison analogue à celle de cidessus deux coniques $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{H}$ du faisceau ponctuel (5) passent par les paires des points U, V et W, W^*.

Les paramètres de ces coniques sont donnés par l'équation suivante:

$$\mu^2 + \frac{a + 2b\lambda + c\lambda^2}{\alpha + 2\beta\lambda + \gamma\lambda^2}\,\mu - \frac{1}{4} = 0.$$

Si l'on met le coefficient du membre linéaire égal à ν, on recoit pour les paramètres μ et λ les équations suivantes:

$$\left.\begin{array}{c} 4\mu^2 - 1 + 4\nu\mu = 0, \\ a + 2b\lambda + c\lambda^2 - \nu(\alpha + 2\beta\lambda + \gamma\lambda^2) = 0, \end{array}\right\} \tag{10}$$

qui expriment deux involutions projectives I_z' et I_z'', dont les constituantes sont les couples $\mu = \pm\dfrac{1}{2}$, $\mu = 0, \infty$ et $\lambda = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{c}$, $\lambda = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}}{\gamma}$.

La couple involutive des coniques $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{H}$ coupe la couple correspondante de l'involution radiale outre les points U, V, W et W^* de la droite l encore dans les points U_1, V_1, W_1 et W_1^* de la droite l'. Parce que les équations (9) et (10) pour les involutions I_y'' et I_z'' sont identiques, est aussi $l' \equiv l_1$

Quand $\nu = \infty$, la conique adjointe $\boldsymbol{A}$ et la dégénerée $\boldsymbol{B}$ du faisceau ponctuel involutif I_z' correspondent aux droites

$$\alpha + 2\beta\lambda + \gamma\lambda^2 = 0$$

du faisceau radial I_z'', c'est la même paire de droites comme dans l'involution I_y''.

On peut résumer ces résultats dans le théorème suivant:

La droite l passant par le sommet réel O du triangle polaire caractéristique de deux coniques imaginaires conjuguées $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{X}^*$, coupe $\boldsymbol{X}$ dans les *points* M_1 *et* M_2^* *et* X^* *dans* M_1^* *et* M_2^*; *les points imaginaires conjugués* M_1 *et* M_1^* *soient représentés par l'involution* $[PQOU]$ *et les points imaginaires* M_2 *et* M_2^* *par l'involution* $[PQOV]$. *Le lieu géométrique des points* P *et* Q *est une courbe du* $4^{\text{ième}}$ *ordre* Y *et le lieu géométrique des points* U *et* V *est une courbe du* $4^{\text{ième}}$ *ordre* Z. *Ces deux courbes passent par les points d'intersection des coniques* X *et* X^*, *où elles touchent la conique* A *adjointe aux coniques* X *et* X^* *et au pôle* O. *La courbe* Y *est aussi le lieu géométrique des points imaginaires conjugués* R *et* R^*, *divisant harmoniquement les paires* M_1, M_2^* *et* M_2, M_1^*, *et la courbe* Z *est le lieu géométrique des points imaginaires conjugués* W *et* W^*, *formant les quaternes harmoniques* $[OWM_1M_2^*]$ *et* $[OW^*M_2M_1^*]$. *Par les paires* P, Q; R, R^*; U, V *et* W, W^* *passent les coniques* Γ, Δ E *et* H, *qui passent aussi par les points d'intersection des coniques* X *et* X^*. *Ces coniques-là coupent les courbes* Y *et* Z *encore dans les paires des points analogues* P_1, Q_1; R_1, R_1^*; U_1, V_1 *et* W_1, W_1^*, *qui sont tous à une droite* l_1 *passante par le sommet* O.

Si le triangle polaire caractéristique est réel, on peut transformer l'équation (1) à cette forme plus simple[1]):

$$X' \equiv Ax_1^2 + Cx_2^2 - x_3^2 = 0 \tag{11}$$

et, par conséquent, les équations (6) et (7) prennent la forme suivante:

$$Y' \equiv (a^2 + \alpha^2)\, y_1^4 + 2\,(ac + \alpha\gamma)\, y_1^2 y_2^2 + (c^2 + \gamma^2)\, y_2^4 - y_3^4 = 0, \tag{12}$$

$$Z' \equiv (\alpha z_1^2 + \gamma z_2^2)^2 + 4\,(az_1^2 + cz_2^2)\, z_3^2 - 4 z_3^4 = 0. \tag{13}$$

L'importance pratique des courbes Y et Z se présente dans le cas special où

$$a\gamma - c\alpha = 0 \tag{14}$$

ou

$$\alpha = a\varkappa \text{ et } \gamma = c\varkappa. \tag{15}$$

L'équation (11) est alors:

$$X'' \equiv a\,(1 + \varkappa)\, x_1^2 + c\,(1 + \varkappa)\, x_2^2 - x_3^2 = 0. \tag{16}$$

L'équation (3) de la conique adjointe prend la forme suivante:

$$A'' \equiv ax_1^2 + cx_2^2 - x_3^2 = 0, \tag{17}$$

tandis que les côtés opposés du quadrangle inscrit fondamental ont l'équation suivante:

$$B'' \equiv ax_1^2 + cx_2^2 = 0. \tag{18}$$

Toutes les coniques X'', X''^* et A'' se touchent donc dans deux points de la polaire réel o. Dans ce cas es équations (12) et (13) prennent la forme suivante:

$$Y'' \equiv a^2\,(1 + \varkappa^2)\, y_1^4 + 2ac\,(1 + \varkappa^2)\, y_1^2 y_2^2 + c^2\,(1 + \varkappa^2)\, y_2^4 - y_3^4 = 0,$$

$$Z'' \equiv \varkappa^2\,(az_1^2 + cz_2^2)^2 + 4\,(az_1^2 + cz_2^2)\, z_3^2 - 4 z_3^4 = 0,$$

c'est

$$Y'' \equiv a\sqrt{1 + \varkappa^2}\, y_1^2 + c\sqrt{1 + \varkappa^2}\, y_2^2 - y_3^2 = 0, \tag{19}$$

$$Z'' \equiv \varkappa^2\,(az_1^2 + cz_2^2) + 2\,(1 + \sqrt{1 + \varkappa^2})\, z_3^2 = 0 \tag{20}$$

Toutes ces coniques — X'', X''^*, A'', B'', Y'' et Z'' — sont les coniques du faisceau punctuel

$$ax_1^2 + cx_2^2 - \frac{1}{1 + \mu\varkappa}\, x_3^2 = 0, \tag{21}$$

où μ est un paramètre variable.

Les équations (9) pour les coniques Γ et Δ prennent la forme suivante:

$$\left.\begin{aligned} \mu^2 - 1 + 2\nu\mu &= 0, \\ (a + \lambda^2 c)\,.\,(1 - \nu\varkappa) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Parce que le premier facteur ne peut s'annuler, il doit être

$$\nu = \frac{1}{\varkappa} = \text{ou } \mu = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \varkappa^2}}{\varkappa}.$$

Si nous substituons ce résultat dans l'équation (21), nous recevons:

$$ax_1^2 + cx_2^2 - \frac{1}{\sqrt{1 + \varkappa^2}}\, x_3^2 = 0,$$

c'est l'équation (19) pour Y''.

Les équations (10) sont donc:

$$\left.\begin{aligned} 4\mu^2 - 1 + 4\nu\mu &= 0, \\ (a + \lambda^2 c)\,.\,(1 - \nu\varkappa) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

et, par conséquent, comme auparavant, $\nu = \dfrac{1}{\varkappa}$ ou

$$\mu = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \varkappa^2}}{2\varkappa},$$

lequel résultat substitué dans l'équation (21) donne:

$$(ax_1^2 - cx_2^2) + \frac{2}{\varkappa^2}(1 \pm \sqrt{1+\varkappa^2})\, x_3^2 = 0$$

ou l'équation pour Z''.

On peut donc formuler le théorème suivant:

Soit X'' une conique imaginaire générale tangent aux deux droites t_1 et t_2 dans les points T_1 et T_2 tels, que t_1, t_2 et T_1, T_2 sont ou réels ou imaginaires conjugués, et soient les points d'intersection M_1 et M_2 de la conique X avec la droite l, passant par O' — c'est par le point d'intersection des tangentes t_1 et t_2 — représentés par les involutions $[PQ, OU]$ et $[PQ, OV]$. Les lieux géométriques de la paire P, Q et des points U et V sont deux coniques Y et Z, qui touchent aussi les tangentes t_1 et t_2 dans les points T_1 et T_2.

Ces résultats se simplifient encore, si la conique imaginaire générale est un cercle avec le centre réel O. Son équation dans les coordonnées de Descartes est la suivante:

$$X''' \equiv x^2 y^2 = \frac{1}{a+i\alpha}. \tag{24}$$

Le cercle adjoint est donc:

$$A''' \equiv x^2 + y^2 = \frac{1}{a} \tag{25}$$

et les asymptotes:

$$B''' \equiv x^2 + y^2 = 0. \tag{26}$$

Les lieux géométriques développés plus haut sont les cercles:

$$Y''' \equiv x^2 + y^2 = \frac{1}{\sqrt{a^2+\alpha^2}}, \tag{27}$$

$$Z''' \equiv x^2 + y^2 = 2\,\frac{-a \pm \sqrt{a^2+\alpha^2}}{a\alpha^2}$$

On peut faire des considérations pareilles dualistiques.

Prague, Université Charles IV, Janvier 1925.

ROMUALD WITWIŃSKI.

La géométrie de direction.

(Geometrja kierunku).

I. Géométrie plane.

1. Laguerre paraît avoir le premier introduit en Géométrie plane l'étude systématique des droites dirigées ou semi-droites, des cercles dirigés ou cycles. Il a fait connaître une transformation fort intéressante, la transformation par semi-droites réciproques, qui joue, dans la Géométrie de direction, un rôle analogue à celui que joue l'inversion dans la Géométrie ordinaire.

Les recherches de Laguerre ont été publiées dans plusieurs Mémoires, parus dans les Comptes rendus de l'Académie des Sciences, dans le Bulletin de la Société mathématique de France et dans les Nouvelles Annales de Mathématiques. En voici la liste complète:

Sur la géométrie de direction (S. M., 1879, p. 80; Oeuvres, p. 592).

Sur la transformation par directions réciproques (C. R., 1881; Oeuvres, p. 604).

Transformations par semi-droites réciproques (N. A., 1882, Oeuvres, p. 608).

Sur les hypercycles (C. R., 1882; Oeuvres, p. 620).

Sur les anticaustiques par réflexion de la parabole, les rayons incidents étant parallèles (N. A., 1883; Oeuvres, p. 636).

Sur quelques propriétés des cycles (N. A., 1883; Oeuvres, p. 651).

Sur les courbes de direction de la troisième classe (N. A., 1883; Oeuvres, p. 660).

Sur l'application des intégrales elliptiques et ultra-elliptiques à la théorie des courbes unicursales (C. R., 1883, Oeuvres, p. 671).