Resumé.

Appelons „du type A" toute fonction continue, vérifiant les relations suivantes:

$$p(x+2\pi)=p(x);\quad \int_0^{2\pi} p(x)\,dx=0;$$

$$\left(\int_0^{2\pi} p(x)\cos x\,dx\right)^2+\left(\int_0^{2\pi} p(x)\sin x\,dx\right)^2\neq 0. \tag{A}$$

Soit $f(x)$ une fonction intégrable au sens de M. H. Lebesgue.
Posons

$$r^n(x)\,\frac{n}{\pi}\int_0^{2\pi} p(x+nt)\,f(t)\,dt.$$

L'objet de cette Note est la démonstration des théorèmes suivants:

Théorème I. Si pour le couple formé par une fonction donnée $f(x)$ et une fonction $p(x)$ du type A le maximum de $|r_n(x)|$ est borné, il en est de même pour tout couple formé par la même fonction $f(x)$ et une fonction quelconque du type A.

Théorème II. Si la fonction donnée $f(x)$ vérifie les conditions du théorème précédent et si de plus $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x)$ existe pour toute valeur réelle de x pour le couple formé par la fonction $f(x)$ et une fonction $p(x)$ du type A, il en est de même pour tout couple formé par la même fonction $f(x)$ est une fonction quelconque[1]) du type A. On peut démontrer de plus, que la limite $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x)$ dans ces conditions est atteinte uniformément et que sa valeur est égale à:

$$\frac{1}{\pi}\int_x^{x+2\pi}\left[C\log\frac{1}{2\sin\frac{t-x}{2}}-\frac{S}{2}\,t\right]\,p(t)\,dt,$$

C et S étant des constantes égales respectivement à

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad\text{et}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx. \tag{B}$$

[1]) En particulier on en déduit l'existence des limites (B).

F. LEJA.

Séries entières doubles et multiples.

(Szeregi potęgowe podwójne i wielokrotne).

Le domaine de la convergence absolue d'une série entière double

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_{\mu\nu}\,x^{\mu}\,y^{\nu} \tag{1}$$

est, comme on le sait, beaucoup moins simple que celui d'une série entière simple. Il a été étudié par K. Weierstrass, A. Meyer, E. Phragmén-E. Lemaire, E. Fabry et presque en même temps déterminé par G. Faber et F. Hartogs[1]).

Je vais exposer ici ce problème fondamental de la théorie des fonctions analytiques par une méthode qui semble être assez naturelle et simple et s'applique bien aux séries multiples à un nombre quelconque de variables. Un rôle important jouent dans ce problème certaines courbes réelles, que j'ai appelé courbes hyperboliques. Elles ont été introduites par G. Faber dans son étude des séries doubles, mais leur importance est beaucoup plus large et s'étend aux séries multiples, quel que soit le nombre de variables. J'ai taché à montrer que les courbes hyperboliques s'adaptent parfaitement à l'étude de la frontière du domaine de la convergence absolue de ces séries.

[1]) K. Weierstrass: Vorlesungen vom Jahre 1880/81.
A. Meyer: Stockholm Ved-Ak. Förh. Öfv. 40 (1883) № 9.
E. Phragmén: ibid. № 10.
(Ces travaux sont cités d'après W. Osgood: Topics in the thoory of several compl. variables. The Maddison Colloquium. New York 1914).
E. Lemaire: Bull des sciences math. t. 20 (1896)
E. Fabry: C. R. t. 134 (1902) p. 1190-92.
G. Faber: Math. Annalen t. 61 (1905).
F. Hartogs: Diss. München 1904 et Math. Ann. t. 62 (1906).

Les quatres paragraphes initials sont consacrés aux séries entières doubles, les deux suivants aux séries multiples à plus de deux variables.

§ 1. Considérons la série à termes non négatifs

$$\sum_{\mu, \nu=0}^{\infty} \alpha_{\mu\nu} r^{\mu} s^{\nu}, \qquad \text{où} \quad \alpha_{\mu\nu} = |a_{\mu\nu}|, \quad r = |x|, \quad s = |y| \tag{2}$$

et désignons par (E) l'ensemble de tous les points (r, s) appartenant au premier quadrant du plan de deux variables réelles r et s, pour lequels la série (2) et, par conséquent, la suite double

$$s_{mn}(r, s) = \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n}{}' \alpha_{\mu\nu} r^{\mu} s^{\nu} \tag{3}$$

est convergente[1].. Trois cas peuvent se présenter:

1⁰ Le seul point $r = s = 0$ appartient à (E).

2⁰ Il existe des points (r, s) de (E) pour lesquels $r + s > 0$, mais il n'en existe pas de tels pour lesquels $rs > 0$.

3⁰ Il en existe de tels pour lesquels $rs > 0$.

Le cas dernier seul est interessant et notre problème se reduit à la détermination de l'ensemble (E) qui définit entièrement le domaine de la convergence absolue de la série (2).

J'aurai à m'appuyer dans ce qui suit sur les trois propositions suivantes:

Théorème 1. Si la série (2) est convergente en un point (r_0, s_0), elle est aussi convergente en chaque point (r, s), pour lequel

$$0 \leqq r \leqq r_0, \qquad 0 \leqq s \leqq s_0.$$

Théorème 2. Pour que la série (2) soit convergente en un point (r, s) pour lequel $s > 0$, il faut et il suffit que toutes les séries simples

$$b_{\nu}(r) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \alpha_{\mu\nu} r^{\mu}, \qquad \nu = 0, 1, 2, \ldots \tag{4}$$

[1]) La convergence da la suite double (3) se définit comme il suit: Il existe un nombre a tel que, à chaque $\varepsilon > 0$, il existe un indice N tel qu'on ait

$$|s_{mn}(rs) - a| < \varepsilon, \qquad \text{pour } m \text{ et } n > N.$$

soient convergentes au point r et que la série simple

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} b_{\nu}(r) s^{\nu} \tag{5}$$

soit convergente au point s[1]).

Ces deux théorèmes resultent immédiatement des propriétés connues des séries à termes non négatifs.

Pour énoncer le 3-e théorème observons d'abord que, par deux points différents

$$A(r_1 s_1), \qquad B(r_2 s_2) \tag{6}$$

des coordonnées essentiellement positives, il passe une et une seule courbe réelle de la forme

$$r^{\alpha} s^{\beta} = c \tag{7}$$

qui sera dite courbe hyperbolique du plan; les constantes α, β, c s'expriment par les formules

$$\alpha = \lambda \log \frac{s_1}{s_2}, \qquad \beta = \lambda \log \frac{r_1}{r_2}, \qquad c = r^{\alpha}_1 s^{\beta}_1,$$

où λ désigne un paramètre arbitraire différent de zéro. La partie de la courbe (7), contenue entre les points (6), sera dite l'arc hyperbolique AB.

Théorème 3 Si la série (2) est convergente en deux points différents (6), elle est aussi convergente en chaque point de l'arc hyperbolique AB[2]).

Démonstration: En échangant les lettres r et s ou les indices des coordonnées (6) on peut être conduit au cas, où

$$r_1 < r_2, \qquad \beta \geqq 0.$$

Soit (r, s) un point quelconque de l'arc AB; on a

$$r_1 < r < r_2, \qquad r^{\alpha} s^{\beta} = r_i^{\alpha} s_i^{\beta}$$

et, par suite,

$$s = s_i \left(\frac{r_i}{r}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}}, \tag{8}$$

où l'indice i peut être égal á 1 ou à 2. Je dis que, μ et ν étant deux nombres réels quelconques, on a les inégalités

[1]) La convergence de la prémière des séries (4) est suffisante pour la convergence de la série double (2) au point (r, s), où $s = 0$

[2]) V. B. Almer: Arkiv för Mat. Astron. och Fysik, t. 17 (1922) № 7.

$$
\left.\begin{aligned}
r^{\mu} s^{\nu} &\leqq r_1^{\mu} s_1^{\nu}, && \text{pour } \mu - \nu \frac{\alpha}{\beta} \leqq 0, \\
r^{\mu} s^{\nu} &< r_2^{\mu} s_2^{\nu}, && \text{pour } \mu - \nu \frac{\alpha}{\beta} > 0.
\end{aligned}\right\} \tag{9}
$$

En effet, on a d'après (8)

$$
r^{\mu} s^{\nu} = r_i^{\mu} s_i^{\nu} \left(\frac{r}{r_i}\right)^{\frac{\mu\beta - \nu\alpha}{\beta}},
$$

où il suffit de poser $i = 1$ dans le cas $\mu - \nu \frac{\alpha}{\beta} \leqq 0$ et $i = 2$ dans le cas contraire pour obtenir les inégalités (9).

Il en resulte que, quels que soient μ et ν, on a

$$
r^{\mu} s^{\nu} \leqq r_1^{\mu} s_1^{\nu} + r_2^{\mu} s_2^{\nu},
$$

d'où, en se servant du symbole (3), on obtient l'inégalité

$$
s_{mn}(r\, s) \leqq s_{mn}(r_1\, s_1) + s_{mn}(r_2\, s_2),
$$

qui montre que la suite monotone $s_{mn}(r, s)$ est bornée et, par conséquent, convergente. Le théorème est donc démontré.

§ 2. Revenons à l'ensemble (E) défini plus haut et supposons qu'il contienne des points (r, s) pour lesquels $rs > 0$. Désignons par

$$
R
$$

la limite supérieure des nombres non négatifs r pour lesquels 1° toutes les séries (4) soient convergentes et 2° la série entière (5) ait un rayon de convergence positif. R représentera un nombre positif ou le symbole ∞ et les deux conditions précédentes seront satisfaites par tous le nombres r appartenant à l'intervalle

$$
(0, R),
$$

comme cela résulte des théorèmes 1 et 2.

Désignons encore par $\varphi(r)$ le rayon de convergence de la série (5) pour une valeur de r, quelconque mais fixe, prise de l'intervalle $(0, R)$ et considérons l'équation

$$
s = \varphi(r), \qquad 0 \leqq r < R. \tag{10}
$$

Elle définit une certaine courbe passant par le premier quadrant du plan des variables r et s, le mot „courbe" ayant ici une signification un peu plus large qu'ordinairement, car pour certaines valeurs de r, $\varphi(r)$ peut représenter ∞.

Pour simplifier le langage, je dirai que le point (r, s) est situé au dessous de la courbe (10), si les cordonnées (r, s) de ce point satisfont aux inégalités

$$
0 \leqq r < R, \qquad 0 \leqq s < \varphi(r);
$$

dans le cas

$$
0 \leqq r < R, \qquad s > \varphi(r)
$$

on dira que le point (r, s) est situé au dessus de la courbe (10).

Cela posé, nous pouvons maintenant nous rendre compte de la distribution des points de l'ensemble (E) dans le premier quadrant du plan des variables r et s.

Il suit du théorème 2 que les points situés au dessous de la courbe (10) appartiennent tous à l'ensemble (E). Tous les autres points de (E), s'il en existe de tels, doivent être situés ou bien sur la courbe (10) elle-même, ou bien sur la droite $r = R$, lorsque R est fini, ou enfin sur la partie $r > R$ de l'axe $s = 0$ et ils sont necéssairement des points-frontières de (E), car tous les points situés au dessus de la courbe (10) et tous ceux qui sont situés au dessus de la partie $r > R$ de l'axe $s = 0$ n'appartiennent pas à l'ensemble (E)[1].

On voit quel rôle important joue dans notre problème la courbe (10), appelée courbe des rayons de convergence associés[2]. Son étude

[1]) Lorsque R est fini, les points de (E) situés sur la droite $r = R$ et pareillement tous ceux qui sont situés sur la partie $r > R$ de l'axe $s = 0$, s'il existe de tels points de (E), remplissent un segment dont une les extrémités se trouve au point $r = R$, $s = 0$ et qui peut se reduire à ce point seulement; cela résulte immédiatement du théorème 1. La distribution des points de (E) situés sur la courbe (10) sera examiné dans ma note qni sera insérée dans les „Annales de la société polonaise de mathématique".

[2]) On appelle rayons de convergence associés de la série (1) chaque couple des nombres positifs $(r_0\, s_0)$, si la série (2) est convergente en chaque point (r, s) pour lequel

$$
0 \leqq r < r_0, \qquad 0 \leqq s < s_0,
$$

et divergente pour

$$
r > r_0, \qquad s > s_0.
$$

La courbe (10) est manifestement le lieu géometrique des points dont les cordonnées forment des couples des rayons de convergence associés. On doit à M. Lemaire la proposition suivante:

Pour que les nombres positifs $(r_0 s_0)$ forment un couple des rayons de convergence associés, il faut et il suffit qu'on ait

$$
\limsup_{\mu+\nu \to \infty} \sqrt[\mu+\nu]{\alpha_{\mu\nu}\, r_0^{\mu}\, s_0^{\nu}} = 1. \tag{a}
$$

En effet, lorsque la série (2) est convergente en chaque point $\left(\frac{r_0}{1+\varepsilon}, \frac{s_0}{1+\varepsilon}\right)$, où $\varepsilon > 0$, il doit exister un nombre $N(\varepsilon)$ tel qu'on ait peut être appuyée sur le lemme suivant qui exprime une propriété fondamentale de cette courbe.

Pour abréger le langage, je dirai qu'un point (r, s) est situé ua dessous de l'arc hyperbolique AB, dont les extremités

$$A(r_1, s_1), \quad B(r_2, s_2) \tag{11}$$

ont toutes leurs coordonnées positives, s'il existe un point (r', s') de cet arc tel que l'on ait

$$0 \leqq r < r', \quad 0 \leqq s < s'.$$

Lemme 1. Si les points (11) sont situés, soit sur la courbe (10), soit au dessous d'elle, chaque point situé au dessous de l'arc hyperbolique AB est situé en même temps au dessous de la courbe (10).

Démonstration: Dans les cas, où les points (11) sont situés tous les deux au dessous de la courbe (10), ils appartiennent à l'ensemble (E) et la proposition est une conséquence des théorèmes 1 et 3.

Dans les cas contraire, soit $r_1 \leqq r_2$. Lorsque $s_1 \leqq s_2$, la proposition résulte immédiatement du théorème 1. Supposons que $s_1 > s_2$ et que le lemme soit faux; il existera un point $(r_0\, \sigma_0)$ pour lequel $\sigma_0 > \varphi(r_0)$ et tel que

$$r_0^\alpha \sigma_0^\beta < r_i^\alpha s_i^\beta, \qquad \text{où } \alpha = \log \frac{s_1}{s_2}, \qquad \beta = \log \frac{r_2}{r_1}, \qquad i = 1, \tag{12}$$

Soient σ_1 et σ_2 deux nombres positifs tels qu'on ait

$$r_i^\alpha \sigma_i^\beta = r_0^\alpha \sigma_0^\beta, \qquad i = 1, 2. \tag{12'}$$

On a d'après (12) et (12'), $\sigma_i < s_i$, donc les points

---

$$\alpha_{\mu\nu}\left(\frac{r_0}{1+\varepsilon}\right)^\mu \cdot \left(\frac{s_0}{1+\varepsilon}\right)^\nu < 1, \qquad \text{pour } \mu+\nu > N,$$

d'où

$$\sqrt[\mu+\nu]{\alpha_{\mu\nu}\, r_0^\mu\, s_0^\nu} < 1+\varepsilon, \qquad \text{pour } \mu+\nu > N.$$

D'autre part, lorsque la série (2) est divergente en chaque point $[r_0(1+\varepsilon), s_0(1+\varepsilon)]$, l'inégalité

$$\alpha_{\mu\nu}\, r_0^\mu\, s_0^\nu (1+\varepsilon)^{\mu+\nu} > (1-\varepsilon^2)^{\mu+\nu}$$

et, par suite, l'inégalité

$$\sqrt[\mu+\nu]{\alpha_{\mu\nu}\, r_0^\mu\, s_0^\nu} > 1-\varepsilon$$

doit être satisfaite par une infinité de couples (μ, ν), quel que soit $\varepsilon > 0$. Il en résulte l'égalité (a); donc la condition (a) est nécessaire. La suffisance se démontre pareillement.

$$(r_1\, \sigma_1), \qquad (r_2\, \sigma_2) \tag{13}$$

sont situés au dessous de la courbe (10) et, par suite, ils appartiennent à l'ensemble (E); mais, l'arc hyperbolique joignant les points (13) passe un vertu de (12)', par le point $(r_0\, \sigma_0)$ situé au dessus de la courbe (10) et, par suite, n'appartenant pas à (E), ce qui est incompatible avec la théorème 3. Le lemme est donc démontré.

§ 3. Nous déduirons de ce lemme les propiétés suivantes de la courbe des rayons de convergence associés:

1° Lorsque $\varphi(r) = \infty$ en un point quelconque de l'intervalle ouvert[1] $(0, R)$, on à $\varphi(r) = \infty$ en chaque point de cet intervalle.

2° Le cas $\varphi(r) = \infty$ étant écarté, $\varphi(r)$ est une fonction monotone jamais croissante et partout continue dans $(0, R)$[2].

3° Lorsque $\varphi(r_1) = \varphi(r_2)$, où r_1 et r_2 sont deux nombres quelconques de l'intervalle $(0, R)$ pour lesquels $r_1 < r_2$, $\varphi(r)$ est constante dans l'intervalle $(0, r_2)$.

4° Lorsque trois points quelconques $A(r_1\, s_1)$, $B(r_2\, s_2)$, $C(r_3\, s_3)$ de la courbe (10) sont situés sur une même courbe hyperbolique et lorsque $r_1 < r_2 < r_3$, l'arc hyperbolique AC tout entier fait partie de la courbe (10).

5° En chaque point de l'intervalle $(0, R)$ $\varphi(r)$ admet une dérivée gauche $\varphi'(r-0)$ et une dérivée droite $\varphi'(r+0)$ qui satisfont à l'inégalité

$$\varphi'(r-0) \geqq \varphi'(r+0)$$

et ne sont jamais positives.

6° La courbe hyperbolique passant par un point quelconque $(r_0\, s_0)$ de la courbe (10) et tangente à la droite $s - s_0 = \lambda(r - r_0)$, où λ est quelconque mais satisfait aux inégalités

$$\varphi'(r_0 - 0) \geqq \lambda \geqq \varphi'(r_0 + 0),$$

ne passe par aucun des points situés au dessous de la courbe (10)[3].

Démonstration: 1° Supposons qu'il existe des nombres r de l'intervalle $(0, R)$ pour lesquels $\varphi(r) = \infty$ et qu'il en existe de tels pour les-

---

[1]) La condition $\varphi(r) = \infty$ pour $r = 0$ n'est pas du tout suffisante, comme le montre l'exemple $x \sum_{u=0}^{\infty} y^u$. Je désignerai toujours par $(0, R)$ l'intervalle ouvert.

[2]) Aux points extrèmes $r = 0$ et $r = R$ de l'intervalle $(0, R)$, $\varphi(r)$ peut être discontinu.

[3]) En d'autres termes, la courbe (10) est enveloppée par des courbes hyperboliques qui parcourent le domaine fermé situé au dessus de cette courbe.

quels $\varphi(r)$ soit fini. Soit r_0 la limite supérieure des nombres de la première catégorie et r_1 et r_2 deux nombres de l'intervalle $(0, R)$ tels que l'on ait

$$r_1 < r_0 < r_2.$$

On a $\varphi(r_1) = \infty$, $\varphi(r_2) = s_2$, où s_2 est fini, donc, s_1 étant un nombre positif quelconque, l'arc de le courbe hyperbolique

$$r^\alpha s^\beta = r_2^\alpha s_2^\beta, \quad \text{où } \alpha = \log \frac{s_1}{s_2}, \quad \beta = \log \frac{r_2}{r_1}$$

joignant les points $(r_1 s_1)$ et $(r_2 s_2)$ ne peut pas passer, d'après notre lemme, par aucun point situé au dessus de la courbe (10).

Or, cela est imposible, car lorsque r' satisfait aux inégalités $r_0 < r' < r_2$, $\varphi(r') = s'$ est fini et ne surpasse pas s_2 et, par suite, le point $(r' s')$ ne peut pas satisfaire à l'inégalité

$$r'^\alpha s'^\beta \geqq r_2^\alpha s_2^\beta$$

quel que soit $s_1 > 0$, car $\alpha \to \infty$, lorsque $s_1 \to \infty$.

2° La monotonie de $\varphi(r)$ résulte de ce que les coëfficients $b_r(r)$ de la série (5) ne décroissent jamais, lorsque r croît.

Supposons que $\varphi(r)$ ne soit pas continu en un point r_0 pour lequel $0 < r_0 < R$ et remarquons que, en vertu de la monotonie de $\varphi(r)$ et de l'hypothèse, les limites

$$\lim_{r \to r_0,\, r < r_0} \varphi(r) = \varphi(r_0 - 0), \qquad \lim_{r \to r_0,\, r > r_0} \varphi(r) = \varphi(r_0 + 0)$$

existent et que la première surpasse la seconde.

Soit s_0 un nombre quelconque pour lequel

$$\varphi(r_0 - 0) > s_0 > \varphi(r_0 + 0)$$

et soit

$$r^\alpha s^\beta = c \tag{14}$$

la courbe hyperbolique passant les deux points $(r_0 s_0)$ et $(r_1 s_1)$, où $s_1 = \varphi(r_1)$ et r_1 est quelconque mais satisfait aux inégalités $r_0 < r_1 < R$.

Or, les points $(r s)$ de la courbe (14) suffisament voisins de (r_0, s_0) sont situés 1° au dessous de la courbe (10), lorsque $r < r_0$ et 2° au dessus de la même courbe, lorsque $r > r_0$, ce qui est incompatible avec le lemme 1.

3° Cette propriété peut être démontrée d'une manière tout à fait analogue à celle de la continuité.

4° Supposons que la proposition 4° soit fausse; il existera donc un point $P(r_0 \sigma_0)$ de l'arc AC qui sera situé, un vertu du lemme 1, au dessous de la courbe (10) et, par suite on aura $\sigma_0 < \varphi(r_0)$. Soit s_0 un nombre satisfaisant aux inégalités $\sigma_0 < s_0 < \varphi(r_0)$; le point $P'(r_0 s_0)$ sera situé au dessous de la courbe (10) et au dessus de l'arc AC.

Or, lorsque r_0 appartient à l'tntervalle $(r_1 r_2)$ le point B sera situé au dessous de l'arc hyperbolique $P'C$ et, lorsque r_0 appartient à l'intervalle $(r_2 r_3)$, la point B sera situé au dessous de l'arc $P'A$, ce qui est incompatible avec le lemme 1. Le propriété 4° est donc démontrée.

5° Soit r_0 un nombre quelconque appartenant à l'intervalle $(0, R)$. Lorsque $\varphi(r) = \varphi(r_0)$ pour une valeur de $r > r_0$, $\varphi(r)$ constant, d'après 3°, dans le voisinage de r_0 et la proposition 5° est évidente. Si ce cas ne se présente pas considérons l'identité

$$\frac{\varphi(r) - \varphi(r_0)}{r - r_0} = \frac{\dfrac{\log r - \log r_0}{r - r_0}}{\dfrac{\log s - \log s_0}{s - s_0}} \cdot \frac{\log s - \log s_0}{\log r - \log r_0} \tag{15}$$

où l'on a posé, comme ordinairement, $s = \varphi(r)$, $s_0 = \varphi(r_0)$.

Lorsque r tend vers r_0, s tend en même temps vers s_0, en vertu de la continuité de $\varphi(r)$ et le premier facteur du second membre de l'identité (15) tend évidemment vers $\frac{s_0}{r_0}$. Il suffit de prouver que la fonction

$$\frac{\log s - \log s_0}{\log r - \log r_0} = \psi(r) \tag{16}$$

a une limite, lorsque r tend vers r_0, r étant constamment $> r_0$ ou constamment $< r_0$. Or, ce fait resulte du lemme 1.

En effet, soit r_1, r_2 et r_3 trois nombres de l'intervalle $(0, R)$ tels que l'on ait

$$r_3 < r_0 < r_2 < r_1.$$

On aura

$$\frac{\log s_3 - \log s_0}{\log r_3 - \log r_0} \geqq \frac{\log s_2 - \log s_0}{\log r_2 - \log s_0} \geqq \frac{\log s_1 - \log s_0}{\log r_1 - \log r_0}, \tag{17}$$

car le point $(r_2 s_2)$ de la courbe (10) est situé, d'après le lemme, au dessus de la courbe hyperbolique

$$r^\alpha s^\beta = r_0^\alpha s_0^\beta, \quad \text{où } \alpha = \log \frac{s_0}{s_1}, \quad \beta = \log \frac{r_1}{r_0},$$

joignant les points $(r_0 s_0)$ et $(r_1 s_1)$ ou sur cette courbe elle-même, donc on aura

$$r_2^\alpha s_2^\beta \geqq r_0^\alpha s_0^\beta,$$

d'où il résulte la dernière des inégalités (17); de même, le point $(r_0\, s_0)$ est situé au dessus de la courbe

$$r^\mu s^\nu = r_3{}^\mu s_3{}^\nu, \qquad \text{où } \mu = \log \frac{s_3}{s_2}, \qquad \nu = \log \frac{r_2}{r_3}$$

joignant les points $(r_2\, s_2)$ et $(r_3\, s_3)$, donc on aura

$$r_0{}^\mu s_0{}^\nu \geqq r_3{}^\mu s_3{}^\nu,$$

d'où il résulte la première des inégalités (17).

Or, ces inégalités montrent que, lorsque r tend vers r_0 en décroissant, $\psi(r)$ croit sans surpasser le premier membre des inégalités (17). Il existe donc la limite $\psi(r_0+0)$ ne surpassant pas la limite $\psi(r_0-0)$ dont l'existence se démontre d'une manière tout à fait analogue. Il s'ensuit l'existence des limites

$$\varphi'(r_0-0) = \frac{s_0}{r_0}\psi'(r_0-0), \qquad \varphi'(r_0+0) = \frac{s_0}{r_0}\psi'(r_0+0), \tag{18}$$

qui ne sont jamais positives, car la fraction (16) est négative où nulle.

6° Les notations de l'énoncé étant conservées, l'équation

$$r^\alpha s^\beta = r_0{}^\alpha s_0{}^\beta, \qquad \text{où } \alpha = -\lambda r_0, \qquad \beta = s_0 \tag{19}$$

représentera la courbe hyperbolique y définie.

Supposons que la proposition ne soit pas vraie; il existera un point $(r'\, \sigma')$ de la courbe (19) tel que l'on ait

$$\sigma' < s' = \varphi(r').$$

Cela conduit à l'inégalité

$$r'^\alpha s'^\beta > r'^\alpha \sigma'^\beta = r_0{}^\alpha s_0{}^\beta, \qquad \text{où } \alpha = -\lambda r_0, \qquad \beta = s_0,$$

équivalente à l'inégalité

$$\log s' - \log s_0 > \frac{r_0}{s_0}\lambda(\log r' - \log r_0),$$

d'où on obtient

$$\frac{\log s' - \log s_0}{\log r' - \log r_0} > \frac{r_0}{s_0}\lambda, \qquad \text{lorsque } r' > r_0.$$

Or, le premier membre de cette inégalité tend vers $\psi'(r_0+0)$ et ne décroît jamais, d'après (17) lorsque r' décroît et tend vers r_0, donc on obtient, d'après (18),

$$\varphi'(r_0+0) > \lambda$$

ce qui est incompatible avec l'hypothèse. Le cas $r' < r_0$ se démontre de la même façon.

En définitive, toutes les propositions sont démontrées.

§ 4. Les propriétés de la courbe (10) qui viennent d'être examinées sont manifestement nécessaires pour que cette courbe puisse être courbe des rayons de convergence associés d'une série entière double. M. M. G. Faber et F. Hartogs[1]) ont montré que ces propriétés sont aussi suffisantes. Voici, comment peut-on justifier cette assertion en suivant la marche de M. Hartogs:

Soit $\psi(r)$ une fonction réelle et positive, définie dans l'intervalle ouvert $(0, R)$ et jouissant de deux propriétés suivantes: 1° Elle ne croît jamais avec r. 2° La courbe

$$s = \psi(r), \qquad 0 < r < R \tag{20}$$

jouit de la propriété énoncée dans le lemme 1.[2]).

Je vais construire une série entière double absolument convergente au dessous de la courbe (20) et absolument divergente au dessus d'elle et au dessus de la partie $r > R$ de l'axe $s = 0$, lorsque R est fini[3]).

Remarquont d'abord que la fonction $\psi(r)$ jouit de toutes les propriétés 1°—6° démontrées pour la fonction $\varphi(r)$ dans le § 3, car cette démonstration ne reposait que sur la monotonie de $\varphi(r)$ et sur le lemme 1. Soit

---

[1]) Voir leurs travaux cités au début.

[2]) La propriété 2° est remplacée chez M. Hartogs par la suivante: $(r_1\, s_1)$, $(r_2\, s_2)$, $(r_3\, s_3)$ étant trois points de la courbe (20), pour lesquels $r_1 < r_2 < r_3$, on a toujours

$$\begin{vmatrix} 1 & \log r_1 & \log s_1 \\ 1 & \log r_2 & \log s_2 \\ 1 & \log r_3 & \log s_3 \end{vmatrix} \leqq 0.$$

Cette inégalité est une conséquence du lemme 1 et inversement

[3]) Je suppose $\psi(r)$ fini dans l'intervalle $(0, R)$. Lorsque $\psi(r)$ y est partout infini, les séries doubles

$$y \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n, \qquad \text{où } \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = R; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{R}\right)^{n^2} \left(\frac{y}{\sigma}\right)^n$$

résolvent notre problème, car elles convergent pour $|x| < R$ et divergent pour $|x| < R$, quel que soit y. Sur la droite $|x| = R$, la première de ces séries peut converger partout ou diverger partout, tandis que la seconde converge sur la partie $|y| < \sigma$ et diverge sur la partie $|y| > \sigma$ de cette droite.

$$r_1, r_2, r_3, \ldots$$

une suite quelconque des nombres appartenant à l'intervalle $(0, R)$ et partout dense dans cet intervalle. Par chaque point $(r_i s_i)$, où $s_i = \psi(r_i)$, de la courbe (20) il passe, d'après 5⁰ du § 4. au moins une courbe hyperbolique qui ne passe par aucun des points situés au dessous de la courbe (20). Soit

$$r^{\alpha_i} s^{\beta_i} = c_i, \qquad \alpha_i \geqq 0, \quad \beta_i > 0 \tag{21}$$

une de telles courbes appartenant au point $(r_i s_i)$ et soient $\alpha_i^{(n)}$ et $\beta_i^{(n)}$ deux nombres entiers non négatifs satisfaisant aux inégalités

$$n\alpha_i \leqq \alpha_i^{(n)} < n\alpha_i + 1, \qquad n\beta_i \leqq \beta_i^{(n)} < n\beta_i + 1.$$

La série entière

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{x^{\alpha_i^{(n)}} y^{\beta_i^{(n)}}}{c_i^n}, \qquad i = 1, 2, \ldots \tag{22}$$

sera absolument convergente au dessous [1]) de la courbe (21) et absolument divergente au dessus d'elle, comme le montre la règle de Cauchy.

Cela posé, désignons par $P_i(xy)$ la série (22) après avoir rejeté tous ses termes en nombre fini [2]) pour lesqaels $\alpha_i^{(n)} + \beta_i^{(n)} < i$ et considérons la série

$$P_0(xy) + a_1 P_1(xy) + a_2 P_2(xy) + \ldots \tag{23}$$

où les a_i sont de nombres positifs quelconques, mais tels que la série $\sum_i^{\infty} a_i$ soit convergente et l'expression

$$P_0(xy),$$

désigne le nombre 0, dans le cas $R = \infty$ et une série entière double quelconque mais absolument convergente pour $|x| < R$, et absolument divergente pour $|x| > R$, quel que soit y, dans le cas $R < \infty$ [3]).

Je dis que la série entière double

$$P(xy) = \sum_{\mu,\nu} a_{\mu\nu} x^\mu y^\nu, \tag{24}$$

[1]) Par definition, le point $(r\,s)$ est situé au dessous de l'hyperbole (21), lorsque $r^{\alpha_i} s^{\beta_i} < c_i$.

[2]) Cela n'a aucune influence sur la convergence de cette série.

[3]) V. la remarque 3 p. 11.

obtenue par la réunion des termes semblables contenus dans les termes $P_i(xy)$ de la série (23) satisfait aux conditions de notre problème [1]).

En effet, observons que les séries (23) et (24) sont en même temps convergentes et en même temps divergentes, pour des valeurs non négatives de x et de y, car tous les coëfficients de ces séries sont non négatifs.

Or, la série (23) est convergente en chaque point $x = r$, $y = s$ situé au dessous de la courbe (20), car, un tel point étant situé au dessous de toutes les courbes hyperboliques (21), toutes les séries $P_i(r\,s)$ sont convergentes et leurs sommes satisfont aux inégalités

$$P_i(r\,s) < A \cdot \sum \frac{1}{n^2}, \qquad \text{pour chaque } i > 0,$$

où A désigne le plus grand des nombres $1, r, s, rs$ [2]); il en suit l'inégalité

$$\sum_{i=1}^{\infty} P_i(r\,s) < A\left(\sum \frac{1}{n^2}\right)\left(\sum a_i\right)$$

et, par suite, la convergence de la série (23) au point consideré.

D'autre part, lorsque (r, s) et situé, soit au dessus de la partie $r > R$ de l'axe $s = 0$, soit au dessus de la courbe (20), la série (23) est divergente pour $x = r$, $y = s$, car dans le cas premier la série $P_0(r\,s)$ est divergente et dans le second cas le point (r, s) est situé au moins au dessus d'une des courbes (21) et, par suite, au moins une des séries $P_i(r\,s)$ est divergente. La proposition est donc démontrée.

Remarquons que, si l'on pose $\lim_{r \to 0} \psi(r) = S$, la série (24) et certainement convergente aux points $0 \leqq s < S$ de l'axe $r = 0$, ce qui résulte du théorème 1; d'autre part elle est convergente aux points $0 \leqq r < R$ de l'axe $s = 0$. Ces deux segments peuvent être allongés arbitrairement, lorsque R et S ne se reduisent pas d'avance à ∞, c'est-à-dire qu'on peut remplacer la série (24) par une telle qui satisfasse aux conditions imposées plus haut et qui soit absolument convergente aux points $0 \leqq s < S_0$ de l'axe $r = 0$

[1]) Les coëfficients $a_{\mu\nu}$ sont des nombres non négatifs bien déterminés, car les termes semblables à $x^\mu y^\nu$ ne se trouvent que dans les séries $P_0, P_1, \ldots, P_{\mu+\nu}$ et les nombres a_i ainsi que les coëfficients des séries (22) sont tous positifs.

[2]) Car on a

$$\sum \frac{1}{n^2} \frac{x^{\alpha_i^{(n)}} y^{\beta_i^{(n)}}}{c_i^n} = \sum \frac{1}{n^2} x^{\alpha_i^{(n)} - n\alpha} y^{\beta_i^{(n)} - n\beta_i} \left(\frac{x^{\alpha_i} y^{\beta_i}}{c_i}\right)^n$$

et les exposants $\alpha_i^{(n)} - n\alpha_i$, $\beta_i^{(n)} - n\beta_i$ sont contenus entre 0 et 1.

et aux points $0 \leqq r < R_0$ de l'axe $s = 0$ quel que soit $S_0 \geqq S$ et $R_0 \geqq R$. Par exemple, la série

$$x\, P(xy) + \sum_{0}^{\infty} b_n\, y^n, \qquad \text{où } b_n > 0 \text{ et } \lim\sup \sqrt[n]{b_n} = S_0 > S,$$

converge aux points $0 \leqq s < S_0$ l'axe $r = 0$ et l'ensemble de ses points de convergence situés en dehors de cet axe sera identique à celui de la série (24).

Pour allonger le segment $(0, R)$, il suffit de changer convenablement les termes de la série $P_0\,(x, 0)$, car toutes les autres séries $P_i\,(xy)$ sont identiquement nulles pour $y = 0$, comme cela résulte de la construction des séries (22).

Remarquons encore que, lorsque R n'est pas infini et lorsque la limite $\psi\,(R + 0) = \sigma$ n'est pas nulle, le segment $(0, \sigma)$ de la droite $r = R$ limite le domaine de la convergence absolue de la série (24). La convergence de cette série aux points de ce segment ne dépend que la convergence de la série $P_0\,(xy)$, car toute les autres séries $P_i\,(xy)$ y sont convergentes. On pourrait choisir $P_0\,(xy)$ de telle façon, que la série (24) soit absolument convergente aux points $0 \leqq s < \sigma_0$ de la droite $r = R$ et absolument divergente aux points $s > \sigma_0$, quel que soit le nombre non négatif $\sigma_0 \leqq \sigma$ [1].

§ 5. La méthode de laquelle nous nous sommes servis dans l'étude qui vient d'être faite peut être appliquée aux séries muitiples à un nombre quelconque de variables. Je me bornerai au cas d'une série à trois variables

$$\sum_{\mu, \nu, \rho = 0}^{\infty} a_{\mu\nu\rho}\, x^{\mu}\, y^{\nu}\, z^{\rho}, \tag{1}$$

le cas général ne présentant pas de difficultés nouvelles.

Désignons par

$\alpha_{\mu\nu\rho},\ r,\ s,\ t$ le modules de $a_{\mu\nu\rho},\ x,\ y,\ z$

et considérons la série

$$\sum_{\mu, \nu, \rho = 0}^{\infty} \alpha_{\mu\nu\rho}\, r^{\mu}\, s^{\nu}\, t^{\rho}. \tag{2}$$

L'ensemble (E) des points de convergence (r, s, t) de cette série, les coordonnées de ces points étant supposées non négatives, détermine entièrement le domaine de la convergence absolue de la sériè (1). On démontre sans difficulté les deux théorèmes suivants:

[1]) V. la remarque 3 p. 11.

Théorème 4. Si la série (1) est convergente au point $(r_0\, s_0\, t_0)$, elle est aussi convergente eu chaque point $(r\, s\, t)$ pour lequel $0 \leqq r \leqq r_0$, $0 \leqq s \leqq s_0$, $0 \leqq t \leqq t_0$.

Théoréme 5. Pour que la série (2) soit convergente au point $(r\, s\, t)$, pour lequel $t > 0$, il faut et il suffit que toutes les séries doubles

$$b_\rho\,(r\, s) = \sum_{\mu, \nu = 0}^{\infty} \alpha_{\mu\nu\rho}\, r^{\mu}\, s^{\nu}, \qquad \rho = 0, 1, 2, \ldots \tag{3}$$

soient convergentes au point (r, s) et que la série simple

$$\sum_{\rho=0}^{\infty} b_\rho\,(r\, s)\,.\, t^{\rho} \tag{4}$$

soit convergente au point t.

Le théorème 3 du § 2 sera remplacé par le suivant: Soient

$$A\,(r_1\, s_1\, t_1), \quad B\,(r_2\, s_2\, t_2) \tag{5}$$

des points, quelconques mais différents à coordonnées positives.

Les trois équations

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{r}{r_1}\right)^{\beta} &= \left(\frac{s}{s_1}\right)^{\alpha} \\ \left(\frac{s}{s_1}\right)^{\gamma} &= \left(\frac{t}{t_1}\right)^{\beta} \\ \left(\frac{t}{t_1}\right)^{\alpha} &= \left(\frac{r}{r_1}\right)^{\gamma} \end{aligned}\right\} \text{ où } \alpha = \log \frac{r_1}{r_2}, \quad \beta = \log \frac{s_1}{s_2}, \quad \gamma = \log \frac{r_1}{r_2} \tag{6}$$

représentent une courbe passant par le points (5) qui sera dite courbe hyperbolique de l'espace à trois dimensions [1]). La partie de cette courbe contenue entre les points (5) sera dite l'arc hyperbolique AB.

[1]) Si tous les nombres α, β, γ sont différents de zéro, les equations (6) peuvent être écrites sous la forme plus symétrique

$$\left(\frac{r}{r_1}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \left(\frac{s}{s_1}\right)^{\frac{1}{\beta}} = \left(\frac{t}{t_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

On en voit quel sera le système d'équations d'une courbe hyperbolique de l'espace à n dimensions.

Observons que les projections de la courbe (6) sur les trois plans des coordonnées sont des courbes hyperboliques planes joignant les projections des points (5) sur ces plans.

Théoréme 6. Si la série (2) est convergente aux points (5), elle est aussi convergente en chaque point de l'arc hyperbolique AB.

Démonstration: On peut supposer, sans nuire à la généralité, qu'on ait

$$r_1 < r_2.$$

Soit (r, s, t) un point quelconque de l'arc consideré; on aura

$$s = s_i \left(\frac{r}{r_i}\right)^{\frac{\beta}{\alpha}}, \qquad t = t_i \left(\frac{r}{r_i}\right)^{\frac{\gamma}{\alpha}}, \qquad i = 1, 2,$$

donc, μ, ν, ρ étant trois nombres quelconques, on aura

$$r^\mu s^\nu t^\rho = r_i^\mu s_i^\nu t_i^\rho \left(\frac{r}{r_i}\right)^{\frac{\mu\alpha+\nu\beta+\rho\gamma}{\alpha}}$$

ce qui conduit à l'inégalité $r^\mu s^\nu t^\rho \leqq r_1^\mu s_1^\nu t_1^\rho$ dans le cas

$$\frac{\mu\alpha+\nu\rho+\rho\gamma}{\alpha} \leqq 0$$

et à l'inégalité $r^\mu s^\nu t^\rho \leqq r_2^\mu s_2^\nu t_2^\rho$ dans le cas contraire. Il en resulte que

$$r^\mu s^\nu t^\rho \leqq r_1^\mu s_1^\nu t_1^\rho + r_2^\mu s_2^\nu t_2^\rho,$$

que s que soient μ, ν, ρ, donc les sommes partielles de la série (2) sont bornées et, par suite, la série (2) est convergente au point considéré.

Supposons que l'ensemble (E) des points de convergence de la série (2) contienne des points (r, s, t) pour lesquels $rst > 0$. Je vais définir une certaine surface limitant le domaine des points intérieurs de l'ensemble (E).

Pour ce but désignons par (D) le domaine des points (r, s) du plan des variables non négatives r et s pour lesquels:

1º Toutes les séries doubles (3) sont en même temps convergentes,

2º La série simple (4) a un rayon de convergence positif; ce rayon sera désigné par $\varphi(rs)$.

L'équation

$$t = \varphi(r, s), \qquad \text{où } (r, s) \text{ appartient à } (D) \tag{7}$$

représente une surface [1]) qui sera dite surface des rayons de convergence associés et jouit des propriétés analogues à celles de la courbe (10) du § 3. Chaque point (rst) situé au dessous de cette surface, c'est-à dire un tel pour lequel (rs) appartient à (D) et $t < \varphi(rs)$, fait partie de l'ensemble (E); tous les autres points de (E), s'il en existe de tels, doivent être situés, ou bien sur la surface (7) elle-même, ou bien sur la partie du plan de coordonnées non négatives r et s ne contenant pas de points de (D) et ils sont nécessairement des points-frontière de (E).

[1]) Le mot „surface" a ici une signification plus large qu'ordinairement, car, $\varphi(rs)$ étant une limite, on peut avoir $\varphi(rs) = \infty$.

§ 6. Pour simplifier le langage, je dirai qu'un point des coordonnées non négatives (r, s, t) est situé au dessous de l'arc hyperbolique joignant les points

$$A(r_1 s_1 t_1), \qquad B(r_2 s_2 t_2),$$

s'il existe un point $(r' s' t')$ de l'arc AB tel qu'on ait

$$r < r', \quad s < s', \quad t < t'.$$

Cela posé, la propriété fondamentale de la surface (7) est caractérisée par le lemme suivant:

Lemme 2. Si les points (8) sont situés, soit sur la surface (7), soit au dessous d'elle chaque point situé au dessous de l'arc hyperbolique AB est en même temps situé au dessous de la surface (7).

En effet, dans le cas, où les points (8) sont situés tous les deux au dessous de la surface (7), ils appartiennent à l'ensemble (E) et la proposition résulte des théorèmes 1 et 3. Dan les cas contraire, la démonstration de ce lemme peut être affectuée à l'aide de la remarque suivante: Si les points A et B' sont suffisamment voisins des points A et B respectivement, l'arc hyperbolique $A'B'$ est suffisament voisin de l'arc hyperbolique AB; d'autre part, si le point A est situé sur la surface (7), il existe un point A' aussi voisin de A qu'on le veut et appartenant à l'ensemble (E).

Ce lemme peut servir la base dans une étude plus détailée de la surface de rayons de convergence associés.

Considérons trois points différents

$$A(r_1 s_1 t_1), \quad B(r_2 s_2 t_2), \quad C(r_3 s_3 t_3) \tag{9}$$

des coordonnées essentiellement positives et supposons que la matrice

$$\begin{vmatrix} \log\frac{r_2}{r_1} & \log\frac{s_2}{s_1} & \log\frac{t_2}{t_1} \\ \log\frac{r_3}{r_1} & \log\frac{s_3}{s_1} & \log\frac{t_3}{t_1} \end{vmatrix}$$

soit du rang deux. Dans cette hypothèse, les points (9) ne sont pas situés sur une même courbe hyperbolique et ils déterminent une surface de la forme

$$r^\alpha s^\beta t^\gamma = c \tag{10}$$

passant par eux, qui sera dite surface hyperbolique. Les constantes α, β, γ s'expriment par les formules

$$\alpha = \begin{vmatrix} \log \frac{s_2}{s_1} & \log \frac{t_2}{t_1} \\ \log \frac{s_3}{s_1} & \log \frac{t_3}{t_1} \end{vmatrix}, \quad \beta = \begin{vmatrix} \log \frac{t_2}{t_1} & \log \frac{r_2}{r_1} \\ \log \frac{t_3}{t_1} & \log \frac{r_3}{r_1} \end{vmatrix}, \quad \gamma = \begin{vmatrix} \log \frac{r_2}{r_1} & \log \frac{s_2}{s_1} \\ \log \frac{r_3}{r_1} & \log \frac{s_3}{s_1} \end{vmatrix},$$

$$c = r_i^\alpha s_i^\beta t_i^\gamma$$

où i peut être égal à 1, 2 ou 3.

Une surface hyperbolique jouit de la propriété qu'elle contient tous les points d'une courbe hyperbolique ayant deux points communs avec cette surface. Il s'ensuit que les trois arcs hyperboliques AB, BC, CA sont situés entièrement sur la surface (10) et qu'ils déterminent sur cette surface un triangle curviligne qui sera dite triangle hyperbolique ABC.

Observons que, si les points A, B, C appartiennent à l'ensemble (E), tous les points intérieurs et les points-frontière du triangle hyperbolique ABC y appartiennent aussi, comme cela resulte du théorème 6.

Cela posé, je vais montrer les suivantes propriétés de la surface det rayons de convergence associès (7), analogues à celles de la courbe des rayons de convergence associés:

1° Lorsque $\varphi(rs) = \infty$ en un point quelconque appartenant à l'intérieur de (D) on a $\varphi(rs) = \infty$ en chaque point intérieur à ce domaine[1]).

2° Le cas $\varphi(rs) = \infty$ étant écarté, $\varphi(rs)$ est une fonction monotone jamais crossante, lorsque r ou s croît, et partout continue à l'intérieur du domaine (D).

3° Lorsque $P(r_1 s_1)$, $Q(r_2 s_2)$, $R(r_3 s_3)$ sont trois points différents situés à l'interieur de (D) pour lesquels

$$\varphi(r_1 s_1) = \varphi(r_2 s_2) = \varphi(r_3 s_3)$$

et lorsque le point R est situé au dessous de l'arc hyperbolique plan PQ, la fonction $\varphi(rs)$ et constante dans la partie du domaine (D) située au dessous de l'arc PQ[2]).

[1]) La fonction $\varphi(rs)$ peut être infinie en un point-frontière de (D) sans qu'elle soit infinie à l'intérieur de (D).

[2]) Cette proposition reste vraie dans le cas, où l'arc PQ se reduit à un point unique $P \equiv Q$ pourvu que r_3 soit $< r_1$ et $s_3 < s_1$. Dans ce cas le domaine situé au dessous du point P est, par définition, composé des points (rs) pour lesquels $0 \leqq r < r_1$ et $0 \leqq s < s_1$.

4° Lorsque trois points A, B, C, quelconques mais différents entre eux, sont situés sur la surface (7) et en même temps sur une seule courbe hyperbolique, le point B étant situé entre A et C, tout les points de l'arc hyperbolique AC sont situés sur la surface (7).

De même, lorsque quatre points A, B, C, D de la surface (7)[1]) sont situés sur une seule surface hyperbolique, les points A, B, C n'étant pas situés sur une même courbe hyperbolique, et lorsque le point D appartient à l'intérieur du triangle hyperbolique ABC, tout les points de ce triangle sont situés sur la surface (7).

5° En chaque point (r, s) intérieur au domaine (D) $\varphi(r, s)$ admet les dérivées partielles gauches $\varphi'(r-0, s)$, $\varphi'(r, s-0)$ et les dérivées partielles droites $\varphi'(r+0, s)$, $\varphi'(r, s+0)$ qui satisfont aux inégalités

$$\varphi'(r-0, s) \geqq \varphi'(r+0, s), \quad \varphi'(r, s-0) \geqq \varphi'(r, s+0)$$

et ne sont jamais positives.

6° Par chaque point $r_0 s_0 t_0$ de la surface (7) n'appartenant pas à la frontière de cette surface, il passe au moins une surface hyperbolique

$$r^\alpha s^\beta t^\gamma = r_0^\alpha s_0^\beta t_0^\gamma, \qquad \text{où } \alpha \geqq 0,\ \beta \geqq 0,\ \gamma \geqq 0$$

telle, qu'aucun point de cette surface ne se trouve au dessous de la surface (7)[2]).

Démonstration: Les propositions 1° et 2° peuvent être établies de la même façon que celles du § 3.

Pour établir la proposition 3° observons d'abord que, en vertu de la monotonie de la fonction $\varphi(rs)$, on doit avoir

$$\varphi(rs) = \varphi(r_1 s_1)$$

en chaque point (r, s) situé au dessous de l'arc plan PQ et tel que $r \geqq r_3$, $s \geqq s_3$. Supposons qu'on ait

$$\varphi(r_0 s_0) > \varphi(r_1 s_1)$$

en un point $(r_0 s_0)$ tel que $r_0 \leqq r_3$, $s_0 \leqq s_3$ et posons $t_0 = \varphi(r_0 s_0)$, $t_1 = \varphi(r_1 s_1)$. Les points $M(r_0 s_0 t_0)$, $N(r_1 s_1 t_1)$ étant situés sur la surface (7), aucun

[1]) Je suppose qu'ils ne sont pas des points-frontière de cette surface.

[2]) Eu d'autres termes, la surface des rayons de convergence associés est enveloppée par des surfaces hyperboliques passant par le domaiue situé au dessus de cette surface.

point de l'arc hyperbolique MN ne peut être situé, d'après le lemme 2, au dessus de la surface (7). Mais, étant $t_0 > t_1$, on aura $t > t_1$ pour tous les points $(r\,s\,t)$ de cet arc différents de N, tandis que $\varphi(r\,s) \leqq t_1$ lorsque $(r\,s)$ est suffisament voisin de $(r_1\,s_1)$. On est donc conduit à une contradiction ce qui prouve la proposition 3°.

4° La partie première de cette proposition peut être démontrée de la même façon que la proposition 4° du § 3.

Pour démontrer la partie seconde, conservons les notations de l'énoncé et désignons par A' le point commun aux deux courbes hyperboliques dont l'une passe par A et D et l'autre par B et C. Or, A' ne peut pas être situé d'après le lemme 2, au dessus de la surface (7), car il est un point de l'arc hyperbolique BC; d'autre part, au démontre aisément qu'il ne peut pas être situé au dessous de la surface (7) [1]), donc A' est situé sur la surface (7) et, par conséquent, d'après ta partie prémière de cette proposition, les deux arcs hyperboliques AA' et BC' sont situés entièrement sur la surface (7). Le raisonnement analogue prouve que les arcs hyperboliques AB et AC sont situés entièrement sur la surface (7).

Soit maintenant P un point quelconque du triangle hyperbolique ABC situé à l'intérieur de ce triangle et soient P' et P'' les points en lesquels la courbe hyperbolique passant P et C recontre les arcs AB et AA'. L'arc CP' est situé, d'après la partie première de cette proposition, sur la surface (7), car tous les trois points C, P'' et P' y sont situés, donc le point P appartenant à cet arc est situé sur la même surface. La proposition est donc démontrée.

5° Cette proposition resulte immédiatement de la proposition 5° du § 3 à'aide de la remarque suivante: Lorsque $(r_0\,s_0)$ est un point quelconque appartenant à l'intérieur du domaine (D), l'équation

$$t = \varphi(r\,s_0)$$

représente la courbe des rayons de convergence associés de la série double

$$\sum_{\mu,\rho}\Big(\sum_{\nu}\alpha_{\mu\nu\rho}\,s_0^{\nu}\Big)\,r^{\mu}\,t^{\rho}$$

et pareillement l'équation

$$t = \varphi(r_0\,s)$$

représente la courbe des rayons de convergence associés de la série double

[1]) En effet, si A' était situé au dessous de la surface (7), il existerait dans le voisinage de A' un point P situé au dessous de la surface (7) et tel que le point D serait situé au dessous de l'arc hyperbolique AP; mais cela est impossible en vertu du lemme 2.

$$\sum_{\nu,\rho}\Big(\sum_{\mu}\alpha_{\mu\nu\rho}\,r_0^{\mu}\Big)\,s^{\nu}\,t^{\rho}.$$

6° Pour démontrer cette dernière proposition obsérvons d'abord que, $(r_0\,s_0\,t_0)$ étant un point quelconque de la surface (7) n'appartenant pas à la frontière de cette surface, la série (2) du § 5 est convergente en chaque point $(r\,s\,t)$ pour lequel

$$0 \leqq r < r_0, \quad 0 \leqq s < s_0, \quad 0 \leqq t < t_0$$

et divergente lorsque

$$r > r_0, \quad s > s_0, \quad t > t_0.$$

Il en resulte que [1])

$$\limsup_{\mu+\nu+\rho\to\infty} \sqrt[\mu+\nu+\rho]{\alpha_{\mu\nu\rho}\,r_0^{\mu}\,s_0^{\nu}\,t_0^{\rho}} = 1. \tag{11}$$

Désignons par

$$\mu_n, \quad \nu_n, \quad \rho_n \tag{12}$$

trois suites des nombres naturels tels qu'on ait

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[\mu_n+\nu_n+\rho_n]{\alpha_{\mu_n\nu_n\rho_n}\,r_0^{\mu_n}\,s_0^{\nu_n}\,t_0^{\rho_n}} = 1 \tag{11'}$$

et posons

$$A_n = \frac{\mu_n}{\mu_n+\nu_n+\rho_n}, \quad B_n = \frac{\nu_n}{\mu_n+\nu_n+\rho_n}, \quad C_n = \frac{\rho_n}{\mu_n+\nu_n+\rho_n},$$

Les suites A_n, B_n, C_n étant bornées, elles admettent des points-limite. Soit α un point-limite de A_n et soit A'_n une suite partielle de A_n ayant α pour sa limite. Désignons par B'_n et C'_n les suites partielles de B_n et C_n correspondantes à la suite A'_n, s'est à-dire composées des termes ayant des mêmes indices que ceux de la suite partielle A'_n. Soit β un point-limite de la suite B'_n et B''_n une suite partielle de B'_n ayant β pour sa limite. A''_n et C''_n désignerons les suites partielles de A'_n et C'_n correspondantes à B''_n. Soit enfin γ un point-limite de C''_n et c_n une suite partielle de C''_n ayant γ pour sa limite; a_n et b_n désignerons des suites partielles de A''_n et B''_n correspondantes à c_n.

Les suites a_n, b_n, c_n sont évidemment de la forme

$$a_k = \frac{m_k}{m_k+n_k+r_k}, \quad b_k = \frac{n_k}{m_k+n_k+r_k}, \quad c_k = \frac{r_k}{m_k+n_k+r_k},$$

[1]) V. la remarque 2 p. 5. L'égalite (11) se démontre d'une manière tout à fait analogue.

où m_k, n_k, r_k, $k = 1, 2, \ldots$ désignent des suites partielles des suites μ_n, ν_n, ρ_n respectivement; il est clair que

$$a_k \longrightarrow \alpha, \qquad b_k \longrightarrow \beta, \qquad c_k \longrightarrow \gamma \tag{13}$$

et que les nombres α, β, γ sont non négatifs et ne s'annulent pas tous les trois, car $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

Considérons la surface hyperbolique

$$r^\alpha s^\beta t^\gamma = r_0^\alpha s_0^\beta t_0^\gamma; \tag{14}$$

je dis qu'elle satisfait aux conditions de l'enoncé, c'est-à-dire qu'elle ne passe par aucun des points situés au dessous de la surface (7). Pour le prouver il suffit de montrer que, $(r' s' t')$ étant un point quelconque situé au dessus de la surface (14), c'est-à-dire un tel qui satisfait à la condition

$$r'^\alpha s'^\beta t'^\gamma > r_0^\alpha s_0^\beta t_0^\gamma,$$

il n'appartient pas à l'ensemble (E).

Or, on a

$$\limsup_{\mu+\nu+\rho \to \infty} \sqrt[\mu+\nu+\rho]{a_{\mu\rho\nu}\, r'^\mu s'^\nu t'^\rho} \geqq \lim_{k \to \infty} \sqrt[m_k+n_k+r_k]{a_{m_k n_k r_k}\, r_0^{m_k} s_0^{n_k} t_0^{r_k}} \left(\frac{r'}{r_0}\right)^{a_k} \left(\frac{s'}{s_0}\right)^{b_k} \left(\frac{t'}{t_0}\right)^{c_k}$$

et la dernière limite est égale, d'après (11′) et (13), à

$$\left(\frac{r'}{r_0}\right)^\alpha \left(\frac{s'}{s_0}\right)^\beta \left(\frac{t'}{t_0}\right)^\gamma;$$

mais, cette dernière expression étant plus grande d'unité, il existe un nombre positif ε tel que

$$\limsup_{\mu+\nu+\rho \to \infty} \sqrt[\mu+\nu+\rho]{a_{\mu\nu\rho}\, r'^\mu s'^\nu t'^\rho} > 1 + \varepsilon$$

et, par suite, l'inégalité

$$a_{\mu\nu\rho}\, r'^\mu s'^\nu t'^\rho > 1$$

est satisfaite par une infinité des indices (μ, ν, ρ) d'où il resulte que la série (2) est divergente au point $(r' s' t')$. La proposition est donc démontrée.

En terminant je ferai observer que les propriétés de la surface des rayons de convergence associés, qui viennent d'être spécifiées, sont caractéristiques pour cette surface, c'est-à-dire que, étant donnée une surface définie par une équation de la forme

$$t = \psi(rs), \tag{14}$$

où la fonction $\psi(rs)$ réelle et positive définie dans un domaine (D) est elle que la surface (14) jouisse des propriétés démontrées pour la surface (7), il existera une série entière à trois variables pour laquelle la surface (14) soit la surface de rayons de convergence associés.

Pour justifier cette assertion il suffit d'appliquer exactement la même méthode dont nous nous sommes servi dans le cas d'une série entière double.

Streszczenie.

Celem tej pracy jest zbadanie obszaru absolutnej zbieżności szeregów potęgowych podwójnych i wielokrotnych. Szeregi podwójne zostały zbadane przez G. Fabera i F. Hartogsa w pracach, zamieszczonych w Math Annalen t. 61 i 62. Tu podaję rozwiązanie tego zagadnienia inną nieco metodą, opartą na t. zw. krzywych hyperbolicznych, która z łatwością daje się zastosować do szeregów potęgowych o dowolnej liczbie zmiennych.

Niech będzie dany szereg potęgowy n zmiennych zespolonych $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

$$\sum_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n = 0}^{\infty} a_{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_n} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2}, \ldots, x_n^{\nu_n} \tag{1}$$

i szereg zmiennych rzeczywistych $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$.

$$\sum_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n = 0}^{\infty} |a_{\nu_1 \ldots \nu_n}| \cdot \xi_1^{\nu_1} \xi_2^{\nu_2}, \ldots, \xi_n^{\nu_n}, \tag{2}$$

gdzie

$$\xi_i = |x_i|, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

W przestrzeni zmiennych $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ zauważmy dwa dowolne, byle różne, punkty

$$A(a_1 a_2, \ldots, a_n), \quad B(b_1 b_2, \ldots, b_n),$$

których wszystkie spółrzędne są dodatnie. Przez każde takie dwa punkty przechodzi jedna określona krzywa, zwana **krzywą hyperboliczną**, o równaniach

$$\left(\frac{\xi_i}{a_i}\right)^{\alpha_k} = \left(\frac{\xi_k}{a_k}\right)^{\alpha_i} \qquad i, k = 1, 2, \ldots, n, \tag{3}$$

gdzie

$$\alpha_i = \log \frac{a_i}{b_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Jeśli wszystkie α_i są różne od zera, równaniom (3) można nadać postać:

$$\left(\frac{\xi_1}{a_1}\right)^{\frac{1}{\alpha_1}} = \left(\frac{\xi_2}{a_2}\right)^{\frac{1}{\alpha_2}} =, \ldots, = \left(\frac{\xi_n}{a_n}\right)^{\frac{1}{\alpha_n}}.$$

Niech AB oznacza łuk krzywej hyperbolicznej zawarty między punktami A i B.

Badanie obszaru absolutnej zbieżności szeregu potęgowego (1) można oprzeć na twierdzeniu następującem:

Jeśli szereg (2) jest zbieżny w punktach A i B, jest on zbieżny na całym łuku AB.

Cztery pierwsze paragrafy są poświęcone zastosowanie tej metody do szeregów potęgowych podwójnych, następne zaś do szeregów potęgowych o większej liczbie zmiennych.

48
90

Q. VETTER.

Deux remarques sur les coniques imaginaires générales.

Dwie uwagi o stożkowych urojonych ogólnych.

I.

On peut exprimer la conique imaginaire générale X par l'équation suivante[1]):

$$X \equiv Ax_1^2 + 2Bx_1x_2 + Cx_2^2 - x_3^2 = 0. \tag{1}$$

où $A = a + i\alpha$, $B = b + i\beta$, $C = c + i\gamma$ et où le côté o $(x_3 = 0)$ du triangle fondamental du système des coordonnées et son sommet opposé O $(x_1 = 0, x_2 = 0)$ sont la polaire réelle et le pôle conjugué réel de la conique X.

Cette conique a un seul triangle polaire réel ou semiréel, qui est commun à la conique imaginaire conjuguée

$$X^* \equiv A^*x_1^2 + 2B^*x_1x_2 + C^*x_2^2 - x_3^2 = 0, \tag{2}$$

où $\quad A^* = a - i\alpha,\ B^* = b - i\beta,\ C^* = c - i\gamma.$[2])

J'ai apellé ce triangle „triangle polaire caractéristique".

Les coniques imaginaires générales conjuguées se coupent dans 4 points réels ou imaginaires conjugués et touchent 4 tangentes réelles ou imaginaires conjuguées[3]). Ces points et ces tangentes forment un quadrangle inscrit et un quadrilatère circonscrit à ces coniques, que nous allons appeler

---

[1]) Q. Vetter: „Le coniche e le quadriche imaginarie generali". Giorn. di mat. LXI (1923) p. 149—156. Malheureusement, étant en voyage, je ne pouvais pas corriger les épreuves de cet article, et pour cela beaucoup de fautes d'impression se sont glisseés surtout dans les formules.

[2]) Q. Vetter: „Harmonická čtveřina a obecná imaginární kuželosečka", Progr. č. reálky v Lipniku, 1909.

J. L. S. Hatton: „The theory of imaginarity in geometry", Cambridge, (1920) p. 124 ss.

[3]) Ibidem.