pierwiastkiem równania:

$$(n-1)\,e^{-x^2} - 2x\int_{-\infty}^{x} e^{-x^2}\,dx = 0. \tag{6}$$

Pomiędzy określonemi w ten sposób funkcjami $\alpha(n)$, $\beta(n)$, $\gamma(n)$ zachodzą następujące nierówności. Przy dowolnem prawie prawdopodobieństw a $\varphi(x)$:

$$\alpha(n) > \beta(n). \tag{8}$$

W założeniu, że $\varphi(x)$ jest funkcja Gaussa (4):

$$\alpha(n) > \delta(n) > \gamma(n). \tag{8}$$

Nierówności te uzasadniają stwierdzony przez Wł. Bortkiewicza empirycznie fakt [1]), że $\alpha(n)$ posiada wartości, jak na wartość teoretyczną największego z n błędów za wielkie. Dalej, przeglądając rachunki Wł. Bortkiewicza, łatwo stwierdzić, że $\gamma(n)$ jest choć nieznacznie, lecz stale mniejszą od liczb zdobytych na drodze empirycznej. Okoliczność ta pozwala przypuszczać, że $\delta(n)$ jest lepszą teoretyczną wartością największego z n błędów niż nią jest $\gamma(n)$, za czemby przemawiała i intuicja.

---

[1]) Przedsięwzięta przez Wł. Bortkiewicza próba dowodu nierówności (7) winna być uznaną za nieudaną (patrz ostatni z wymienionych artykułów, str. 214).

AL. RAJCHMAN.

Przyczynek do teorji spółczynników Fouriera.

(Une contribution à la théorie des coefficients de Fourier).

1. Niech $p(x)$ będzie funkcją ciągłą okresową. Dla ustalenia uwagi założymy, że okres jej równa się 2π; ilekroć tu będziemy mówili: „funkcja okresowa" bez dalszych wyjaśnień, należy rozumieć, że mamy na myśli funkcję o okresie 2π. Zakładamy więc:

$$p(x+2\pi) = p(x). \tag{1}$$

Funkcję $p(x)$ nazwiemy osobliwą, jeśli jest ortogonalna do obu funkcyj $\cos x$ i $\sin x$. Przeto $p(x)$ jest nieosobliwa, jeśli zachodzi nierówność

$$\left(\int_0^{2\pi} p(x)\cos x\,dx\right)^2 + \left(\int_0^{2\pi} p(x)\sin x\,dx\right)^2 \neq 0. \tag{2}$$

Wreszcie $p(x)$ nazwiemy unormowaną, jeśli będzie

$$\int_0^{2\pi} p(x)\,dx = 0. \tag{3}$$

Oczywiście każdą funkcję całkowalną można „unormować" przez dodanie odpowiedniej stałej.

2. Niech $f(x)$ będzie jakąkolwiek funkcją całkowalną podług Lebesgue'a, $p(x)$ zaś funkcją ciągłą, okresową, nieosobliwą i unormowaną, co krótko oznaczać będzie „funkcja c. o. n. u."; kładę

$$r_n(x) = \frac{1}{\pi}\,n\int_0^{2\pi} p(x+nt)\,f(t)\,dt. \tag{4}$$

Oczywiście $r_n(x)$ jest funkcją ciągłą i okresową; wobec tego istnieje

$$M_n = \text{maximum } |r_n(x)|, \tag{5}$$

gdy x przebiega wszystkie wartości rzeczywiste.

3. Możemy teraz wypowiedzieć twierdzenia następujące:

I. Przy danej funkcji $f(x)$ M_n jest ograniczone albo dla k a ż d e j funkcji c. o. n. u. $p(x)$ albo dla ż a d n e j.

II. Jeśli przy danej funkcji $f(x)$ M_n jest ograniczone, to granica

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) \tag{6}$$

istnieje dla wszelkiej rzeczywistej wartości x albo dla k a ż d e j funkcji c. o. n. u. $p(x)$ albo dla żadnej; w pierwszym przypadku wspomniana granica jest osiągana j e d n o s t a j n i e, przyczem wartość jej daje wzór następujący:

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{t=x}^{t=x+2\pi}\left[C\log\frac{1}{2\sin\frac{t-x}{2}} - \frac{S}{2}\,t\right]p(t)\,dt, \tag{7}$$

gdzie

$$C = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx; \qquad S = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx. \tag{8}$$

4. T o ż s a m o ś ć p o m o c n i c z a [1])

Z a ł o ż e n i e:

$$p(x) \text{ i } c(x)$$

— funkcje ciągłe (w zastosowaniu, dla którego wyprowadzamy tę tożsamość:

$p(x)$ — funkcja c. o. n. u.; $c(x) = \cos kx$ albo $c(x) = \sin kx$)

$f(x)$ — funkcja całkowalna podług L e b e s g u e'a,
n — stała rzeczywista (w zastosowaniu: n — liczba naturalna).

T e z a. Sprawdza się tożsamość następująca:

$$\int_0^{2\pi} c(x)\,dx\int_0^{2\pi} p(x+nt)\,f(t)\,dt = \int_0^{2\pi} f(t)\,dt\int_0^{2\pi} p(x+nt)\,c(x)\,dx. \tag{9}$$

U w a g a. Oczywiście wybór 0 i 2π jako granic całkowania jest nieistotny. Zrobiliśmy ten wybór ze względu na dalsze zastosowanie.

[1]) Jest to zresztą bardzo specjalny przypadek znanego wzoru na zmianę porządku całkowań.

D o w ó d. Kładę

$$\varphi_N(t) = \frac{2\pi}{N}\sum_{j=0}^{j=N-1} p\left(\frac{2\pi}{N}j + nt\right)c\left(\frac{2\pi}{N}j\right); \tag{10}$$

będzie oczywiście j e d n o s t a j n i e w z g l ę d e m t $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$

$$\lim_{N\to\infty}\varphi_N(t) = \int_0^{2\pi} p(x+nt)\,c(x)\,dx. \tag{11}$$

Podobnie, kładę

$$\psi_N = \int_0^{2\pi}\varphi_N(t)\,f(t)\,dt = \frac{2\pi}{N}\sum_{j=0}^{j=N-1} c\left(\frac{2\pi j}{N}\right)\int_0^{2\pi} p\left(\frac{2\pi j}{N} + nt\right)f(t)\,dt. \tag{12}$$

Wobec ciągłości funkcji $c(x)$ $\int_0^{2\pi} p(x+nt)\,f(t)\,dt$ będzie oczywiście:

$$\lim_{N\to\infty}\psi_N = \int_0^{2\pi} c(x)\,dx\int_0^{2\pi} p(x+nt)\,f(t)\,dt. \tag{13}$$

Wobec jednostajności przejścia do granicy we wzorze (11) możemy, pomnożywszy obie jego strony przez $f(t)$ i przecałkowawszy od 0 do 2π, przestawić znaki granicy i całki; otrzymamy wówczas związek następujący:

$$\lim_{N\to\infty}\psi_N = \lim_{N\to\infty}\int_0^{2\pi}\varphi_N(t)\,f(t)\,dt = \int_0^{2\pi} f(t)\,dt\int_0^{2\pi} p(x+nt)\,c(x)\,dx. \tag{14}$$

Zestawiając wzory (13) i (14), otrzymujemy bezpośrednio tożsamości (9) c. b. d. d.

5. S p ó ł c z y n n i k i F o u r i e r a f u n k c j i $r_n(x)$.

Kładę

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx; \quad B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx, \tag{15}$$

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} p(x)\cos nx\,dx; \quad \beta_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} p(x)\sin nx\,dx, \tag{16}$$

icm©

Twierdzenie. Przy oznaczeniach (4), (15) i (16) i dowolnem naturalnem k zachodzą równości następujące:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_k . n A_{nk} + \beta_k . n B_{nk} &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} r_n(x) \cos kx\, dx, \\ \beta_k . n A_{nk} - \alpha_k . n B_{nk} &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} r_n(x) \sin kx\, dx. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Dowód. Będzie oczywiście

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} p(x+nt) \cos kx dx &= \frac{1}{\pi}\int_{nt}^{2\pi+nt} p(z) \cos k(z-nt)\, dz \\ &= \alpha_k \cos knt + \beta_k \sin knt, \\ \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} p(x+nt) \sin kx dx &= \frac{1}{\pi}\int_{nt}^{2\pi+nt} p(z) \sin k(z-nt)\, dt \\ &= \beta_k \cos knt - \alpha_k \sin knt. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Związki powyższe, pomnożone przez $f(t)$, po przecałkowaniu dają bezpośrednio:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} f(t)\, dt \int_0^{2\pi} p(x+nt) \cos kx dx &= \alpha_k A_{kn} + \beta_k B_{kn}, \\ \frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} f(t)\, dt \int_0^{2\pi} p(x+nt) \cos kx dx &= \beta_k A_{kn} - \alpha_k B_{kn}. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Wystarczy teraz zastosować tożsamość (9) § 4-go do lewych stron związków powyższych (przy $c(x) = \cos kx$, wzgl. $= \sin kx$) i skorzystać z definicji (4) § 2-go, aby otrzymać równości (17) c. b. d. d.

6. Nierówności pomocnicze.

Twierdzenie. Wielkości A_n, B_n, α_1, β_1 § 5-go oraz M_n § 2-go czynią zadość nierównościom następującym:

$$|n A_n| \leqq \frac{2 M_n}{\sqrt{\alpha_1^2+\beta_1^2}}; \quad |n B_n| \leqq \frac{2 M_n}{\sqrt{\alpha_1^2+\beta_1^2}} \tag{20}$$

Dowód. W równaniach (17) § 5-go kładę $k=1$.

Rozwiązując tak otrzymany układ dwuch równań linjowych z dwiema niewiadomemi ze względu na niewiadome nA_n i nB_n, otrzymuję wzory następujące:

$$\left.\begin{aligned} nA_n &= \frac{1}{\pi(\alpha_1^2+\beta_1^2)}\int_0^{2\pi} r_n(x)(\alpha_1 \cos x + \beta_1 \sin x)\, dx; \\ nB_n &= \frac{1}{\pi(\alpha_1^2+\beta_1^2)}\int_0^{2\pi} r_n(x)(\beta_1 \cos x - \alpha_1 \sin x)\, dx, \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Ze wzorów (21) oraz oczywistych nierówności:

$$|r_n(x)| \leqq M_n;$$

$$|\alpha_1 \cos x + \beta_1 \sin x| \leqq \sqrt{\alpha_1^2+\beta_1^2};$$

$$|\beta_1 \cos x - \alpha_1 \sin x| \leqq \sqrt{\alpha_1^2+\beta_1^2},$$

wynikają bezpośrednio nierówności (20) c. b. d. d.

7. Twierdzenie pomocnicze

Jeśli spółczynniki Fouriera funkcji $f(x)$ spełniają nierówności

$$|A_n| \leqq \frac{T}{n}; \qquad |B_n| \leqq \frac{T}{n} \tag{22}$$

gdzie T jest stałe, to, dla wszelkiego x i wszelkiego naturalnego n, sprawdza się nierówność następująca:

$$|r_n(x)|^2 \leqq \frac{2}{3}\pi T^2 \int_0^{2\pi} p^2(x)\, dx. \tag{23}$$

Dowód.

Kładę:

$$u_k^{(n)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} r_n(x) \cos kx\, dx; \quad v_k^{(n)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} r_n(x) \sin kx\, dx. \tag{24}$$

Jeśli w pierwszej z równości (17) § 5-go podstawimy $k=0$ i uwzględnimy założenie (3) § 1-go, przekonamy się, że będzie:

$$u_k^{(n)} = 0. \tag{25}$$

Założenie (22) daje bezpośrednio nierówności następujące:

icm©

$$|n A_{nk}| \leq \frac{T}{k}; \quad |n B_{nk}| \leq \frac{T}{k}. \tag{26}$$

Z nierówności powyższych i ze wzorów (17) § 5-go wynika bezpośrednio prawdziwość nierówności następujących:

$$|u_k^{(n)}| \leq \frac{T}{k}(|\alpha_k| + |\beta_k|); \quad |v_k^{(n)}| \leq \frac{T}{k}(|\alpha_k| + |\beta_k|). \tag{27}$$

Skorzystamy teraz z arytmetycznej nierówności Schwarza. Na zasadzie tej nierówności będzie dla wszelkiego naturalnego N.

$$\sum_{k=1}^{k=N} \frac{|\alpha_k| + |\beta_k|}{k} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{k=N} \frac{1}{k^2} \cdot \sum_{k=1}^{k=N} (|\alpha_k| + |\beta_k|)^2}. \tag{28}$$

Przechodząc do granicy dla $N \longrightarrow \infty$, widzimy, że szereg,

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{|\alpha_k| + |\beta_k|}{k} \text{ jest zbieżny.} \tag{29}$$

Wobec nierówności (27) wynika stąd bezwzględna i jednostajna zbieżność szeregu Fourier'a funkcji $r_n(x)$, przyczem będzie

$$|r_n(x)| = \left|\sum_{k=1}^{k=\infty} u_k^{(n)} \cos kx + v_k^{(n)} \sin kx\right| \leq T\sqrt{2} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{|\alpha_k| + |\beta_k|}{k} \tag{30}$$

Aby otrzymać stąd nierówność (23), wystarczy pamiętać nierówność (28) i uwzględnić, że:[1])

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}; \quad \sum_{k=1}^{k=\infty} (|\alpha_k| + |\beta_k|)^2 \leq 2 \sum_{n=1}^{k=\infty} \alpha_k^2 + \beta_k^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} p^2(x)\, dx,$$

8. Twierdzenie I (por. § 3).

Oznaczenia: $p(x)$ — dowolna funkcja c. o. n. u.

$\bar{p}(x)$ — pewna specjalna funkcja c. o. n. u.

$\bar{r}_n(x)$, $\bar{M}_n$, $\bar{\alpha}_n$, $\bar{\beta}_n$ — wielkości powstałe odpowiednio z $r_n(x)$, M_n, α_n, β_n, gdy we wzorach: (4), (5) i (16) wykonamy podstawienie $p(x) = \bar{p}(x)$.

Założenie. $\bar{M}_n$ jest ograniczone.

Teza. M_n jest ograniczone.

[1]) Znany wzór Parsevala; por. np. Lebesgue, „Lecons sur les séries trigon"

Dowód. Z założenia $\bar{p}(x)$ jest funkcją c. o. n. u., przeto $\bar{\alpha}_1^2 + \bar{\beta}_1^2 \neq 0$; $\bar{M}_n$ jest ograniczone — istnieje wiec kres górny wyrazenia $\frac{2\bar{M}_n}{\sqrt{\bar{\alpha}_1^2 + \bar{\beta}_1^2}}$, nazwijmy go $\bar{H}$; wobec nierówności (20) § 6-go będzie:

$$A_n \leq \frac{\bar{H}}{n}; \quad B_n \leq \frac{\bar{H}}{n}. \tag{31}$$

Zastosujemy teraz twierdzenie pomocnicze § 7-go. Na zasadzie nierówności (23) możemy napisać nierówność następującą:

$$M_n = \text{maximum}\, |r_n(x)| \leq \sqrt{\frac{2\pi}{3}}\, H \sqrt{\int_0^{2\pi} p^2(x)\, dx}. \tag{32}$$

Ponieważ prawa strona nierówności powyższej nie zależy od n, więc M_n jest ograniczone c. b. d. d.

9. Twierdzenie pomocnicze.

Jeśli istnieją granice (zachowujemy oznaczenia (15) § 5-go)

$$C = \lim_{n \to \infty} n A_n; \qquad S = \lim_{n \to \infty} n B_n, \tag{33}$$

to granica $\lim_{n \to \infty} r_n(x)$ istnieje i jest osiągana jednostajnie dla wszelkiej rzeczywistej wartości x, przyczem wartość jej daje wzór następujący:

$$\lim_{n \to \infty} r_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{t=x}^{t=x+2\pi} \left[C \log \frac{1}{2 \sin \frac{t-x}{2}} - \frac{S}{2} t \right] p(t)\, dt. \tag{34}$$

Dowód. Kładę

$$a_n = n A_n - C; \quad b_n = n B_n - S \tag{35}$$

Przyjmując oznaczenia (24) § 7-go, możemy nadać wzorom (17) § 5-go postać następującą:

$$u_k^{(n)} = \frac{C\alpha_k + S\beta_k}{k} + \frac{\alpha_k a_{nk} + \beta_k b_{nk}}{k} \tag{36}$$

$$v_k^{(n)} = \frac{-S\alpha_k + C\beta_k}{k} + \frac{-\alpha_k b_{nk} + \beta_k a_{nk}}{k} \tag{37}$$

Kładę:

$$g(x) = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\alpha_k}{k} \cos kx + \frac{\beta_k}{k} \sin kx, \tag{38}$$

$$h(x) = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\beta_k}{k} \cos kx - \frac{\alpha_k}{k} \sin kx, \tag{39}$$

$$j_n(x) = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\alpha_k a_{nk} + \beta_k b_{nk}}{k} \cos kx + \frac{-\alpha_k b_{nk} + \beta_k a_{nk}}{k} \sin kx. \tag{40}$$

Wobec stwierdzonej w § 7-ym zbieżności szeregu (29), szeregi (38), (39) i (40), określające $g(x)$, $h(x)$ oraz $j_n(x)$, są zbieżne bezwzględnie i jednostajnie; wobec związków (36) i (37) będzie oczywiście:

$$r_n(x) = Cg(x) + Sh(x) + j_n(x). \tag{41}$$

Nazwijmy ε_n największą z pośród wielkości:

$$|a_m|, \quad |b_m|, \text{ przy } m \geqq n.$$

Ponieważ na zasadzie założenia (35) a_m i b_m dążą do zera równocześnie z $\frac{1}{m}$, przeto ε_n istnieje i będzie

$$\lim_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0. \tag{42}$$

Wobec wspomnianej już (stwierdzonej w § 7-ym) zbieżności szeregu (29) będzie oczywiście dla wszelkiego rzeczywistego x:

$$|j_n(x)| \leqq \varepsilon_n \sqrt{2} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{|\alpha_k| + |\beta_k|}{k}; \tag{43}$$

będzie więc, i to jednostajnie względem x,

$$\lim_{n \to \infty} j_n(x) = 0, \tag{44}$$

czyli (również jednostajnie)

$$\lim_{n \to \infty} r_n(x) = Cg(x) + Sh(x). \tag{45}$$

Wykazaliśmy więc istnienie granicy $\lim\limits_{n \to \infty} r_n(x)$. Aby obliczyć jej wartość, powołamy się na następujące elementarne wzory:

$$\frac{\cos kx}{k} = \frac{1}{\pi} \int_{t=x}^{t=x+2\pi} \log \frac{1}{2 \sin \frac{t-x}{2}} \cos kt\, dt;$$

$$\frac{\sin kx}{k} = \frac{1}{\pi} \int_{t=x}^{t=x+2\pi} \log \frac{1}{2 \sin \frac{t-x}{2}} \sin kt\, dt, \tag{46}$$

$$-\frac{\sin kx}{k} = \frac{1}{\pi} \int_{t=x}^{t=x+2\pi} -\frac{t}{2} \cos kt\, dt; \qquad \frac{\cos kx}{k} = \frac{1}{\pi} \int_{t=x}^{t=x+2\pi} -\frac{t}{2} \sin kt\, dt. \tag{47}$$

Jeżeli przypomnimy sobie określenie (16) § 5-go oraz założenie (3) § 1-go, podług którego $\alpha_0 = 0$, to zestawienie wzorów (38) i (46), względnie (39) i (47) da nam bezpośrednio tożsamości następujące:

$$g(x) = \frac{1}{\pi} \int_{t=x}^{t=x+2\pi} \log \frac{1}{2 \sin \frac{t-x}{2}} p(t)\, dt; \tag{48}$$

$$h(x) = \frac{1}{\pi} \int_{t=x}^{t=x+2\pi} -\frac{t}{2} p(t)\, pt, \tag{40}$$

skąd, wobec związku (45) bezpośrednio wynika wzor (34) c. b. d. d.

10. **Twierdzenie II** (por. § 3).

Oznaczenia: Te same, co w § 8.

Założenia: $\overline{M}_n$ jest ograniczone, a nadto $\lim\limits_{n \to \infty} \overline{r_n(x)}$ istnieje dla wszystkich rzeczywistych wartości x.

Teza: $\lim\limits_{n \to \infty} r_n(x)$ istnieje dla wszystkich rzeczywistych wartości x i to jednostajne względem x, poczem wartość tej granicy jest dana przez wzór (34) § 9 go.

Dowód: Skorzystamy ze wzorów (21) § 6 go i podstawimy w nich $p(x) = \overline{p}(x)$, zatem: $r_n(x) = \overline{r}_n(x)$, $\alpha_1 = \overline{\alpha}_1$; $\beta_1 = \overline{\beta}_1$. Ponieważ z założenia ciąg funkcyj $\overline{r}_1(x)$, $\overline{r}_2(x) \ldots \overline{r}_n(x)$ jest ograniczony, przeto z istnienia granicy funkcji podcałkowej wynika istnienie granicy całki; wynika stąd bezpośrednio istnienie granic (33) § 9-go. Powołujemy się teraz na twierdzenie pomocnicze § 9 go i orzekamy istnienie granicy $\lim\limits_{n \to \infty} r_n(x)$, jej jednostajne osiąganie oraz sprawdzanie przez nią wzoru (34) § 9-go c. b. d. d.

Resumé.

Appelons „du type A" toute fonction continue, vérifiant les relations suivantes:

$$p(x+2\pi)=p(x); \quad \int_0^{2\pi} p(x)\,dx=0;$$

$$\left(\int_0^{2\pi} p(x)\cos x\,dx\right)^2+\left(\int_0^{2\pi} p(x)\sin x\,dx\right)^2 \neq 0. \tag{A}$$

Soit $f(x)$ une fonction intégrable au sens de M. H. Lebesgue.
Posons

$$r^n(x)\,\frac{n}{\pi}\int_0^{2\pi} p(x+nt)\,f(t)\,dt.$$

L'objet de cette Note est la démonstration des théorèmes suivants:

Théorème I. Si pour le couple formé par une fonction donnée $f(x)$ et une fonction $p(x)$ du type A le maximum de $|r_n(x)|$ est borné, il en est de même pour tout couple formé par la même fonction $f(x)$ et une fonction quelconque du type A.

Théorème II. Si la fonction donnée $f(x)$ vérifie les conditions du théorème précédent et si de plus $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x)$ existe pour toute valeur réelle de x pour le couple formé par la fonction $f(x)$ et une fonction $p(x)$ du type A, il en est de même pour tout couple formé par la même fonction $f(x)$ est une fonction quelconque[1]) du type A. On peut démontrer de plus, que la limite $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x)$ dans ces conditions est atteinte uniformément et que sa valeur est égale à:

$$\frac{1}{\pi}\int_x^{x+2\pi}\left[C\log\frac{1}{2\sin\frac{t-x}{2}}-\frac{S}{2}t\right]\,p(t)\,dt,$$

C et S étant des constantes égales respectivement à

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad\text{et}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx. \tag{B}$$

[1]) En particulier on en déduit l'existence des limites (B).

F. LEJA.

Séries entières doubles et multiples.

(Szeregi potęgowe podwójne i wielokrotne).

Le domaine de la convergence absolue d'une série entière double

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_{\mu\nu}\,x^\mu y^\nu \tag{1}$$

est, comme on le sait, beaucoup moins simple que celui d'une série entière simple. Il a été étudié par K. Weierstrass, A. Meyer, E. Phragmén-E. Lemaire, E. Fabry et presque en même temps déterminé par G. Faber et F. Hartogs[1]).

Je vais exposer ici ce problème fondamental de la théorie des fonctions analytiques par une méthode qui semble être assez naturelle et simple et s'applique bien aux séries multiples à un nombre quelconque de variables. Un rôle important jouent dans ce problème certaines courbes réelles, que j'ai appelé courbes hyperboliques. Elles ont été introduites par G. Faber dans son étude des séries doubles, mais leur importance est beaucoup plus large et s'étend aux séries multiples, quel que soit le nombre de variables. J'ai taché à montrer que les courbes hyperboliques s'adaptent parfaitement à l'étude de la frontière du domaine de la convergence absolue de ces séries.

[1]) K. Weierstrass: Vorlesungen vom Jahre 1880/81.
A. Meyer: Stockholm Ved-Ak. Förh. Öfv. 40 (1883) № 9.
E. Phragmén: ibid. № 10.
(Ces travaux sont cités d'après W. Osgood: Topics in the thoory of several compl. variables. The Maddison Colloquium. New York 1914).
E. Lemaire: Bull des sciences math. t. 20 (1896)
E. Fabry: C. R. t. 134 (1902) p. 1190-92.
G. Faber: Math. Annalen t. 61 (1905).
F. Hartogs: Diss. München 1904 et Math. Ann. t. 62 (1906).