J. SPŁAWA-NEYMAN.

Sur les valeurs théoriques de la plus grande de n erreurs.

(Note présentée à la Séance du 21—XII—1923 de la Société Math. de Pologne à Varsovie).

1. La question des valeurs théoriques de la plus grande de n erreurs soumises à la loi de Gauss est d'un grand intérêt pratique. M. L. v. Bortkiewicz lui a consacré plusieurs publications [1]), où il introduit trois fonctions, que nous allons désigner par

$$\alpha(n), \quad \beta(n), \quad \gamma(n).$$

Les valeurs de cettes fonctions pour différentes significations de n sont d'accord avec les observations.

Je me propose de démontrer quelques inégalités, qui subsistent entre les valeurs de cettes fonctions pour le même n. Définissons les fonctions de M. L. v. Bortkiewicz.

2. Soit $\varphi(x)$ la loi de distribution des probabilités des erreurs, qui peut être aussi celle de Gauss:

$$\varphi(x) = \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}. \tag{1}$$

Considérons n erreurs soumises à cette loi. Désignons par x_1 un tel nombre, que l'éspérance mathématique de la quantité des erreurs surpassant x_1 soit égale à un. Il est évident que x_1 est la racine de l'équation:

[1]) 1. „Variationsbreite und mittlerer Fehler" Sitzungsberichte d. Berlin. Mathem. Gesellschaft 26. X. 1921.
2. „Variationsbreite beim Gaussschen Fehlergesetz" Nordisk Statistisk Tidskrift T. I, H. I.
3. „Variationsbreite beim Gaussschen Fehlergesetz" ibidem T. 1, H. 2.

$$n \int_{x_1}^{+\infty} \varphi(x)\, dx = 1. \tag{2}$$

Si la fonction $\varphi(x)$ est paire, c'est-à-dire si $\varphi(-x) = \varphi(x)$, l'équation (2) peut être aussi écrite:

$$2 \int_0^{x_1} \varphi(x)\, dx = \frac{n-2}{n}. \tag{2a}$$

La fonction $\alpha(n)$ est par définition l'éspérance mathématique de l'erreur surpassant le nombre x_1, c'est à dire:

$$\alpha(n) = n \int_{x_1}^{+\infty} \varphi(x)\, x\, dx. \tag{3}$$

Si la loi $\varphi(x)$ est celle de Gauss, l'équation (3) se transforme en

$$\alpha(n) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \int_{x_1}^{+\infty} e^{-x^2} x\, dx = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-x_1^2}. \tag{4}$$

La fonction $\beta(n)$ est par définition l'éspérance mathématique de la plus grande de n erreurs. M. L. v. Bortkiewicz parvient à l'expression de $\beta(n)$ en se basant sur des assez longues considérations. Nous l'écrirons en partant de la loi des probabilités de la plus grande de n erreurs, à savoir:

$$u(x) = n\varphi(x) \left(\int_{-\infty}^{x} \varphi(x)\, dx \right)^{n-1} = n F^{n-1}(x)\, \varphi(x). \tag{5}$$

Or

$$\beta(n) = n \int_{-\infty}^{+\infty} F^{n-1}(x)\, \varphi(x)\, x\, dx. \tag{6}$$

La fonction $\gamma(n)$ est la valeur la plus probable de la plus grande (suivant sa valeur absolue) de $m = \frac{n}{2}$ erreurs. La loi des probabilités de cette erreur, que nous n'écrirons qu'en supposant que la fonction $\varphi(x)$ est celle de Gauss, est évidemment:

$$v(x) = 2m\varphi(x) \left(2 \int_0^x \varphi(x)\, dx \right)^{m-1} = \frac{2^m m e^{-x^2}}{\pi^{\frac{m}{2}}} \left(\int_0^x e^{-x^2} dx \right)^{m-1}. \tag{7}$$

Si l'on considére la derivée:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{2^m m}{\pi^{\frac{m}{2}}} \left[-2x e^{-x^2} \left(\int_0^x e^{-x^2} dx \right)^{m-1} + (m-1)\, e^{-2x^2} \left(\int_0^x e^{-x^2} dx \right)^{m-2} \right] \tag{8}$$

on constate sans peine, que le signe de $\frac{dv}{dx}$ est celui de la fonction

$$w(x) = (m-1)\, e^{-x^2} - 2x \int_0^x e^{-x^2} dx \tag{9}$$

que nous allons considérer pour les valeurs positives de x.

On voit, que si x croit de zéro vers l'infini, la fonction $w(x)$ décroit constamment de $m-1$ vers $-\infty$. Nous en concluons que la fonction $v(x)$ possède une maximée unique pour $x = \gamma(n)$, qui est la racine de la fonction (9).

La définition de $\gamma(n)$ suppose que n est un nombre pair. Nous conservons tout de même cette définition formelle pour tout n entier et > 1.

Outre les trois fonctions de M. L. v. Bortkiewicz nous allons considérer encore une $\delta(n)$, que nous définirons comme la plus probable valeur de la plus grande de n erreurs. Elle est égale à la racine de la dérivée de la fonction (5).

3. **Inegalité I.** [1]) Pour toute valeur de n nous avons:

$$\alpha(n) > \beta(n). \tag{10}$$

Nous la démontrerons en ne faisant aucune hypothèse sur la loi $\varphi(x)$, outre celle de l'intégrabilité etc. Considérons la différance:

$$\Delta(n) = \alpha(n) - \beta(n) = n \left(\int_{x_1}^{+\infty} \varphi(x)\, x\, dx - \int_{-\infty}^{+\infty} F_{(x)}^{n-1} \varphi(x)\, x\, dx \right)$$

$$= n \left[\int_{x_1}^{+\infty} \left(1 - F_{(x)}^{n-1} \right) \varphi(x)\, x\, dx - \int_{-\infty}^{x_1} F_{(x)}^{n-1} \varphi(x)\, x\, dx \right]. \tag{11}$$

On a:

$$\left(1 - F_{(x)}^{n-1}\right) \varphi(x) \geqslant 0, \quad F_{(x)}^{n-1} \varphi(x) \geqslant 0. \tag{12}$$

Or

$$\Delta(n) > n x_1 \left[\int_{x_1}^{+\infty} \left(1 - F_{(x)}^{n-1} \right) \varphi(x)\, dx - \int_{-\infty}^{x_1} F_{(x)}^{n-1} \varphi(x)\, dx \right]$$

[1]) La démonstration de (10) donnée par M. Bortkiewicz (le dernier de mém. cités p. 214) est dépourvue de rigueur.

$$= n x_1 \left(\int_{x_1}^{+\infty} \varphi(x)\, dx - \int_{-\infty}^{+\infty} F_{(x)}^{n-1} \varphi(x)\, dx \right) = 0 \tag{13}$$

à cause de (2) et parceque

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_{(x)}^{n-1} \varphi(x)\, dx = \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d F^n}{d x}\, dx = \frac{1}{n} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dx \right)^n = \frac{1}{n}. \tag{14}$$

Donc:

$$\alpha(n) > \beta(n). \tag{15}$$

C. Q. F. D.

4. **Inegalité II.** Si la fonction $\varphi(n)$ est celle de Gauss, pour toute valeur de n nous avons:

$$\alpha(n) > \delta(n). \tag{16}$$

Pour établir cette inégalité considérons la dérivée de la fonction $u(x)$:

$$\frac{du}{dx} = \frac{n}{\sqrt{\pi^n}} \left[(n-1)\, e^{-2x^2} \left(\int_{-\infty}^{x} e^{-x^2}\, dx \right)^{n-2} - 2x\, e^{-x^2} \left(\int_{-\infty}^{x} e^{-x^2}\, dx \right)^{n-1} \right] \tag{17}$$

Nous voyons que le signe de cette dérivée est identique avec celui de la différence

$$w_1(x) = (n-1)\, e^{-x^2} - 2x \int_{+\infty}^{x} e^{-x^2}\, dx \tag{18}$$

qui est positive pour le valeurs négatives de x et qui décroit vers $-\infty$ quand x croit vers l'infini. Nous en voyons que $w_1(x)$ possède une racine unique, qui est la valeur de $\delta(n)$. Pour démontrer l'inégalité (16) il suffit d'établir que

$$w_1(\alpha_n) < 0. \tag{19}$$

Nous avons:

$$w_1(\alpha_n) = (n-1)\, e^{-\alpha^2} - 2\alpha \int_{-\infty}^{\alpha} e^{-x^2}\, dx. \tag{20}$$

D'autre part:

$$\alpha(n) = \frac{1}{n} \int_{x_1}^{\infty} \varphi(x)\, x\, dx > x_1 \tag{21}$$

Or

$$w_1(\alpha) < (n-1)\, e^{-x_1^2} - 2\alpha \int_{-\infty}^{x_1} e^{-x^2}\, dx. \tag{22}$$

Des égalités (2) et (4) il suit

$$e^{-x_1^2} = 2\alpha(n) \frac{\sqrt{\pi}}{n}; \qquad \int_{-\infty}^{x_1} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}\, \frac{n-1}{n}. \tag{23}$$

Si nous substituons ces formules dans la seconde partie de (22) nous aurons:

$$w_1(\alpha) < 0. \tag{24}$$

Donc:

$$\alpha(n) > \delta(n). \tag{25}$$

C. Q. F. D.

5. **Inégalité III.** Si la fonction $\varphi(x)$ est celle de Gauss, pour toute valeur de n nous avons

$$\delta(n) > \gamma(n). \tag{26}$$

Pour démontrer cette inégalité il suffit d'établir que

$$w(\delta) = (m-1)\, e^{-\delta^2} - 2\delta \int_{0}^{\delta} e^{-x^2}\, dx < 0. \tag{27}$$

De la définition de $\delta(n)$ nous avons que

$$(n-1)\, e^{-\delta^2} - 2\delta \int_{-\infty}^{\delta} e^{-x^2}\, dx = 0. \tag{28}$$

En éliminant $e^{-\delta^2}$ dans (27) nous aurons:

$$w(\delta) = 2\delta \left[\frac{m-1}{n-1} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} + \int_{0}^{\delta} e^{-x^2}\, dx \right) - \int_{0}^{\delta} e^{-x^2}\, dx \right]. \tag{29}$$

Tenant compte de (2a) nous pourrons écrire:

$$(m-1) \frac{\sqrt{\pi}}{2} = m \int_{0}^{x_1} e^{-x^2}\, dx. \tag{30}$$

et l'expression (29) se transforme en

$$w(\delta) = \frac{n}{n-1}\, \delta \int_{\delta}^{x_1} e^{-x^2}\, dx. \tag{31}$$

Nous démontrerons l'inégalité (26) en établissant que

$$x_1 < \delta(n), \tag{32}$$

ce qui sera une conséquence de l'inégalité

$$w_1(x_1) > 0. \tag{33}$$

Démontrons donc l'inégalité (33). Nous avons:

$$w(x_1) = (n-1)\, e^{-x_1^2} - 2x_1 \int_{-\infty}^{x_1} e^{-x^2}\, dx \tag{34}$$

or, tenant compte de (23):

$$w(x_1) = \frac{2(n-1)\sqrt{\pi}}{n} \left(\alpha(n) - x_1\right) > 0 \tag{35}$$

vu l'inégalité (21). Il en resultent les inégalités (32) et (26).

C. Q. F. D.

SOMMAIRE.

6. a) La valeur théorique de la plus grande de n erreurs $\alpha(n)$ surpasse l'éspérance mathématique de cette erreur quelle que soi la loi des probabilités $\varphi(x)$:

$$\alpha(n) > \beta(n).$$

b) Si cette loi est celle de Gauss, $\alpha(n)$ surpasse aussi les valeurs les plus probables $\delta(n)$ et $\gamma(n)$:

$$\alpha(n) > \delta(n) > \gamma(n).$$

Si nous adoptons avec M. L. v. Bortkiewicz, le principe que la valeur théorique de l'amplitude de variation des n erreurs soumises à la loi de Gauss est égale au double de celle de la plus grande des erreurs, nous verrons que les resultats obtenus semblent être en harmonie avec l'observation empirique de M. L. v. Bortkiewicz que $\alpha\, n)$ est une valeur théorique de la plus grande des n erreurs un peut trop grande.

c) Si nous considérons les resultats des calculs de M. L. v. Bortkiewicz (voir le deuxième des memoirs cités), nous constatons que les valeurs théoriques de l'amplitude correspondantes aux valeurs de $\gamma(n)$ sont un peu, mais constamment moindres que celles données par la statistique. Vu les inégalités (25) et (26) on peut supposer, que $\delta(n)$ est une meilleure valeur théorique de la plus grande de n erreurs, que ne l'est $\gamma(n)$.

Streszczenie.

Celem niniejszej noty jest udowodnienie pewnych nierówności zachodzących pomiędzy t. zw. „teoretycznemi wartościami" największego z n błędów ulegających pewnemu prawu $\varphi(x)$. Definicje trzech rozpatrywanych przez Wł. Bortkiewicza (loc. cit.) teoretycznych wartości są następujące.

Niech $\varphi(x)$ oznacza dowolne prawo prawdopodobieństwa dla rozpatrywanych błędów. Niech dalej x_1 oznacza pierwiastek równania

$$n \int_{x_1}^{+\infty} \varphi(x)\, dx = 1 \tag{1}$$

Pierwszą rozpatrywaną przez Wł. Bortkiewicza teoretyczną wartością największego z n błędów jest funkcja

$$\alpha(n) = n \int_{x_1}^{+\infty} \varphi(x)\, x\, dx. \tag{2}$$

Drugą taką wartością jest nadzieja matematyczna największego z n błędów:

$$\beta(n) = n \int_{-\infty}^{+\infty} F_{(x)}^{n-1}\, \varphi(x)\, x\, dx, \tag{3}$$

gdzie $F_{(x)} = \int_{-\infty}^{x} \varphi(x)\, dx$. Funkcje te Wł. Bortkiewicz rozpatruje w założeniu, że

$$\varphi(x) = \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}, \tag{4}$$

które nas obowiązywać nie będzie. Trzecią funkcją Wł. Bortkiewicza, $\gamma(x)$, którą będziemy wraz z nim rozpatrywali tylko w założeniu (4), jest wartość najprawdopodobniejsza największego (biorąc bezwzględnie) z $m = \frac{n}{2}$ błędów. Funkcja ta jest pierwiastkiem równania.

$$(m-1)\, e^{-x^2} - 2x \int_{0}^{x} e^{-x^2}\, dx = 0. \tag{5}$$

Do tych trzech funkcyj dodamy jeszcze czwartą $\delta(n)$, którą zdefinjujemy jako wartość najprawdopodobniejszą największego z n błędów. Jest ona

pierwiastkiem równania:

$$(n-1)\,e^{-x^2} - 2x\int_{-\infty}^{x} e^{-x^2}\,dx = 0. \tag{6}$$

Pomiędzy określonemi w ten sposób funkcjami $\alpha(n)$, $\beta(n)$, $\gamma(n)$ zachodzą następujące nierówności. Przy dowolnem prawie prawdopodobieństw a $\varphi(x)$:

$$\alpha(n) > \beta(n). \tag{8}$$

W założeniu, że $\varphi(x)$ jest funkcja Gaussa (4):

$$\alpha(n) > \delta(n) > \gamma(n). \tag{8}$$

Nierówności te uzasadniają stwierdzony przez Wł. Bortkiewicza empirycznie fakt[1]), że $\alpha(n)$ posiada wartości, jak na wartość teoretyczną największego z n błędów za wielkie. Dalej, przeglądając rachunki Wł. Bortkiewicza, łatwo stwierdzić, że $\gamma(n)$ jest choć nieznacznie, lecz stale mniejszą od liczb zdobytych na drodze empirycznej. Okoliczność ta pozwala przypuszczać, że $\delta(n)$ jest lepszą teoretyczną wartością największego z n błędów niż nią jest $\gamma(n)$, za czemby przemawiała i intuicja.

---

[1]) Przedsięwzięta przez Wł. Bortkiewicza próba dowodu nierówności (7) winna być uznaną za nieudaną (patrz ostatni z wymienionych artykułów, str. 214).

AL. RAJCHMAN.

Przyczynek do teorji spółczynników Fouriera.

(Une contribution à la théorie des coefficients de Fourier).

1. Niech $p(x)$ będzie funkcją ciągłą okresową. Dla ustalenia uwagi założymy, że okres jej równa się 2π; ilekroć tu będziemy mówili: „funkcja okresowa" bez dalszych wyjaśnień, należy rozumieć, że mamy na myśli funkcję o okresie 2π. Zakładamy więc:

$$p(x+2\pi) = p(x). \tag{1}$$

Funkcję $p(x)$ nazwiemy osobliwą, jeśli jest ortogonalna do obu funkcyj $\cos x$ i $\sin x$. Przeto $p(x)$ jest nieosobliwa, jeśli zachodzi nierówność

$$\left(\int_0^{2\pi} p(x)\cos x\,dx\right)^2 + \left(\int_0^{2\pi} p(x)\sin x\,dx\right)^2 \neq 0. \tag{2}$$

Wreszcie $p(x)$ nazwiemy unormowaną, jeśli będzie

$$\int_0^{2\pi} p(x)\,dx = 0. \tag{3}$$

Oczywiście każdą funkcję całkowalną można „unormować" przez dodanie odpowiedniej stałej.

2. Niech $f(x)$ będzie jakąkolwiek funkcją całkowalną podług Lebesgue'a, $p(x)$ zaś funkcją ciągłą, okresową, nieosobliwą i unormowaną, co krótko oznaczać będzie „funkcja c. o. n. u."; kładę

$$r_n(x) = \frac{1}{\pi}\,n\int_0^{2\pi} p(x+nt)\,f(t)\,dt. \tag{4}$$