d'après nos suppositions, ce cas est impossible, et la $r+1$-me intégrale appartient à la congruence $\{C\}$.

Nous obtenons donc comme résultat final*) le

Théorème 3: „Une variété V_3 qui satisfait aux conditions du théorème 1 possède une congruence irrégulière de courbes d'irrégularité $r+1=p_g-p_a$".

---

*) J'ai énoncé ce résultat dans une Note des Comptes Rendus du 30/6 24: „Sur les variétés algébriques à trois dimensions dont les genres satisfont à l'inégalité $P_g \leqq 3\,(p_g-p_a-3)$".

A. ZYGMUND.

O module ciągłości sumy szeregu sprzężonego z szeregiem Fouriera

Sur le module de continuité de la somme de la série conjuguée de la série de Fourier

Niech $f(x)$ będzie funkcją ciągłą o okresie 2π, liczby zaś a_n, b_n $(n=0, 1, 2, \ldots)$ niech będą jej spółczynnikami Fouriera:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx. \tag{1}$$

Sprzężonym z szeregiem trygonometrycznym (1) nazywamy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx - b_n \cos nx. \tag{2}$$

Oczywiście, jeżeli szereg (1) jest szeregiem Fouriera funkcji całkowalnej wraz z kwadratem (a więc w szczególności, gdy funkcja $f(x)$ jest ciągła), wówczas szereg (2) jest również szeregiem Fouriera pewnej funkcji $g(x)$, całkowalnej wraz z kwadratem:[1])

$$g(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx - b_n \cos nx$$

Po raz pierwszy własnościami funkcji $g(x)$, w zależności od własności funkcji $f(x)$, zajął się Fatou[2]). Wykazał on mianowicie, że jeżeli funkcja

---

[1]) Jest to konsekwencja znanych twierdzeń Parsevala oraz Riesza-Fischera Por. np. Hilb und Riesz. Neuere Untersuchungen über trigonometrische Reihen (Enzyklop. d. Math. Wiss. II C 10 str. 1209 i 1212).

[2]) Séries trigonométriques et séries de Taylor (Acta Mathematica XXX str. 361—3).

$f(x)$ spełnia warunek Lipschitza rzędu α $(0 < \alpha \leqslant 1)$, to funkcja $g(x)$ jest również funkcją lipszycowską rzędu $\beta = \dfrac{\alpha}{\alpha+1} < \alpha$.

Priwałow[3]) wykazał, że twierdzenie Fatou może być uógólnione, a mianowicie, że funkcje $f(x)$ i $g(x)$ są jednocześnie funkcjami lipszycowskiemi rzędu α $(0 < \alpha < 1)$; jeżeli zaś $f(x)$ jest funkcją lipszycowską rzędn 1, to $g(x)$ spełnia warunek

$$| g(x+h) - g(x) | \leqslant Ch \log \frac{1}{|h|},$$

a więc w każdym razie spełnia warunek Lipschitza każdego rzędu < 1.

Nasuwa się pytanie, czy wynik Fatou-Priwałowa nie może być uogólniony, a mianowicie, czy nie możnaby podać ogólnego wzoru na moduł ciągłości[4]) funkcji $g(x)$ w zależności od modułu ciągłości funkcji $f(x)$. Odpowiedź na to pytanie daje następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1. Jeżeli funkcja ciągła $f(x)$, o okresie 2π, posiada moduł ciągłości $\omega(\delta)$, wówczas moduł ciągłości $\omega_1(\delta)$ funkcji sprzężonej $g(x)$ spełnia warunek

$$\omega_1(\delta) \leqslant K \left[\int_0^{\delta} \frac{\omega(t)}{t}\, dt + \delta \int_{\delta}^{\pi} \frac{\omega(t)}{t^2}\, dt \right] \quad (K \text{ — stała niezależna od } \delta). \tag{3}$$

Oczywiście twierdzenie to[5]) nie jest banalnem tylko w przypadku, gdy całka $\int_0^{\pi} \frac{\omega(t)}{t}$ jest zbieżna, musimy się więc ograniczyć do tego przypadku. Ale bardzo łatwo spostrzec, że ograniczenie to leży w pewnym sensie w istocie rzeczy. Będziemy mówili, że funkcja $\mu(x)$ różniczkowalna, określona w przedziale (o, π), spełnia warunek (A), jeżeli 1^0 $\mu(x)$ nie maleje na $(0, \pi)$; 2^0 $\mu(0)=0$; 3^0 $\mu'(x)$[6]) nie rośnie na $(0, \pi)$.

[3]) Bull. de la Soc. Math. de France, 1916.

[4]) Niech $F(x)$ będzie funkcją ciągłą określoną w przedziale (a, b). Modułem ciągłości funkcji $F(x)$ w przedziale (a, b) nazywamy funkcję $\omega(\delta)$ $(o < \delta \leqslant b - a)$, określoną przez wzór: $\omega(\delta) = \max |F(x_2) - F(x_1)|$ dla wszystkich wartości (x_1, x_2) przedziału (a, b), spełniających warunek $|x_1 - x_2| \leqslant \delta$. (Por. De la Vallée Pousin. Leçons sur l'approximation etc. Paris 1919). Jeżeli $F(x)$ spełnia warunek Lipschitza rzędu α, to $\omega(\delta) < K\delta^{\alpha}$ (K — stała).

[5]) którego szczególnym przypadkiem jest, jak łatwo sprawdzić, twierdzenie Priwałowa.

[6]) T. zn. że $\mu(x)$ jest wypukła ku górze na (o, π). Najprostzemi przykładami funkcji $\mu(x)$ mogą być: x^{α} $(o < \alpha \leqslant 1)$, $\log \frac{a_1}{x}$, $\log \frac{a_1}{x}$, $\lg_2 \frac{a_2}{x}$, etc. (a_1, a_2 — stałe) $(0 < x \leqslant \pi)$. Dla dwu ostatnich wymienionych funkcyj całka $\int_0^{\pi} \frac{\mu(x)}{x}\, dx$ jest rozbieżna.

Twierdzenie II. Do każdej funkcji $\mu(x)$, spełniającej warunek (A) i takiej, że całka $\int_0^{\pi} \frac{\mu(t)}{t}\, dt$ jest rozbieżna, można zbudować funkcję $f(x)$, ciągłą o okresie 2π, której moduł ciągłości $\omega(x)$ spełnia nierówność $\omega(x) \leqslant \mu(|x|)$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$ i dla której funkcja sprzężona $g(x)$ jest nieciągła (a nawet nieograniczona)[7])

Rozpoczniemy od dowodu twierdzenia 1. Funkcja $g(x)$ sprzężona z funkcją $f(x)$ jest dana przez znany wzór[8])

$$g(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{f(x+t) - f(x)}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}}\, dt,$$

który ma zupełnie oznaczony sens przy uczynionem założeniu zbieżności całki $\int_0^{\pi} \frac{\omega(t)}{t}\, dt$.

Zbadajmy różnicę $g(x + \Delta x) - g(x)$, gdzie $\Delta x > 0$. Otrzymamy:

$$g(x+\Delta x) - g(x) = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+\Delta x+t) - f(x+\Delta x)}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}}\, dt - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x)}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}}\, dt \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left[\frac{f(x+t) - f(x+\Delta x)}{2 \operatorname{tg} \frac{t - \Delta x}{2}} - \frac{f(x+t) - f(x)}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} \right] dt$$

$$= \int_{-2\Delta x}^{+2\Delta x} + \int_{R} = A + B$$

przyczem R oznacza resztę przedziału $(-\pi, \pi)$ po usunięciu zeń przedziału $(-2\Delta x, 2\Delta x)$. Oczywiście:

[7]) Być może, że warunek 2^0 jest zbędny dla prawdziwości twierdzenia II.

[8]) Por. np. Hilb und Riesz loc. cit. str. 1199.

$$\pi|A| \leqslant \left|\int_{\Delta x}^{2\Delta x} \frac{f(x+t)-f(x+\Delta x)}{2\,\mathrm{tg}\,\frac{t-\Delta x}{2}}\,dt\right| + \left|\int_{-2\Delta x}^{\Delta x} \frac{f(x+t)-f(x+\Delta x)}{2\,\mathrm{tg}\,\frac{t-\Delta x}{2}}\,dt\right|$$

$$+\left|\int_{-2\Delta x}^{2\Delta x}\frac{f(x+t)-f(x)}{2\,\mathrm{tg}\,\frac{t}{2}}\,dt\right| \leqslant \int_0^{\Delta x}\frac{\omega(t)}{t}\,dt + \int_\varepsilon^{3\Delta x}\frac{\omega(t)}{t}\,dt + 2\int_0^{2\Delta x}\frac{\omega(t)}{t}\,dt$$

$$\leqslant \int_0^{\Delta x}\frac{\omega(t)}{t}\,dt+3\int_0^{\Delta x}\frac{\omega(t)}{t}\,dt+4\int_0^{\Delta x}\frac{\omega(t)}{t}\,dt \overset{9)}{=} 8\int_0^{\Delta x}\frac{\omega(t)}{t}\,dt$$

Obecnie ocenimy $|B|$:

$$\pi|B|\leqslant\left|\int_R f(x+t)-f(x+\Delta x)\right|\cdot\left|\frac{1}{2\,\mathrm{tg}\,\frac{t-\Delta x}{2}}-\frac{1}{2\,\mathrm{tg}\,\frac t2}\right|dt$$

$$+\left|\int_R\frac{f(x)-f(x+\Delta x)}{2\,\mathrm{tg}\,\frac t2}\,dt\right|$$

Łatwo widzieć, że ostatni wyraz po prawej stronie znika wskutek nieparzystości funkcji $\mathrm{tg}\,\frac{t}{2}$, zatem

$$\pi|B|\leqslant\left|\frac{\Delta x}{4}\int_R\frac{\omega(|t-\Delta x|)}{\left|\sin\frac{t-\Delta x}{2}\sin\frac t2\right|}\,dt=\int_{2\Delta x}^{\pi}+\int_{-\pi}^{-2\Delta x}=B'+B''\right.$$

Lecz

$$B'\leqslant\frac{\pi^2\Delta x}{4}\int_{2\Delta x}^{\pi}\frac{\omega(t-\Delta x)}{(t-\Delta x)\,t}\leqslant\frac{\pi^2}{4}\Delta x\int_{\Delta x}^{\pi}\frac{\omega(t)}{t^2}\,dt.$$

[9]) Opieramy się na twierdzeniu, że $\omega(Kt) \leq Ka(t)$ dla K całkowitych. Dla k dowolnych i dodatnich $\omega(Kt) = (k+1)\,\omega(t)$. Porów. De la Vallée Poussin l. c.

zaś

$$B''\leqslant\frac{\pi^2}{4}\Delta x\int_{-\pi}^{-2\Delta x}\frac{\omega(|t-\Delta x|)}{|(t-\Delta x)\,t|}\,dt=\frac{\pi^2}{4}\Delta x\int_{2\Delta x}^{\pi}\frac{\omega(t+\Delta x)}{t+\Delta x)\,t}\,dt\leqslant\frac{\pi^2}{4}\Delta x\int_{2\Delta x}^{\pi}\frac{\omega(2t)}{t^2}\,dt$$

$$\leqslant\frac{\pi^2}{2}\Delta x\int_{2\Delta x}^{\pi}\frac{\omega(t)}{t^2}\,dt\leqslant\frac{\pi^2}{2}\Delta x\int_{\Delta t}^{\pi}\frac{\omega(t)}{t^2}\,dt,$$

skąd:

$$\pi|B|\leqslant B'+B''\leqslant\frac34\pi^2\int_{\Delta x}^{\pi}\frac{\omega(t)}{t}.$$

A więc twierdzenie I możemy uważać za udowodnione, przyczem za C można przyjąć wartość: $\mathrm{Max}\left(\frac{3}{4}\pi, \frac{8}{\pi}\right)=\frac{8}{\pi}$.

Łatwo spostrzec, że gdy funkcja $f(x)$ (o okresie 2π), całkowalna w sensie Lebesgue'a, posiada w przedziale zamkniętym (a, b) moduł ciągłości $\omega(\delta)$, to funkcja $g(x)$ sprzężona z $f(x)$ posiada w przedziale $(a+\varepsilon, b-\varepsilon)$ moduł ciągłości $\omega_1(\delta)$, dany przez wzór (3), tylko że obecnie stała C będzie zależna od ε: $C = C(\varepsilon)$. Dowód w niczem się nie różni od od poprzedniego dowodu.

Dowód twierdzenia II. Określmy funkcję $f(x)$ przez warunki $1^\circ\ f(x)=\mu(x)$; $\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$; $2^\circ\ f(\pi)=0$! $3^\circ\ f(x)$ jest linjowa w przedziale $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ i wreszcie $f(-x)=f(x)$ $(0\leqslant x\leqslant\pi)$. Łatwo spostrzec, że naskutek warunków (A) i rozbieżności całki $\int_0^\pi\frac{\mu(t)}{t}\,dt$ moduł ciągłości $\omega(\delta)$ funkcji $f(x)$ w ten sposób określonej spełnia warunek: $\omega(x)\leqslant f(x)$ $(0<x\leqslant\pi)$. Niech szereg (2) będzie szeregiem sprzężonym z szeregiem Fouriera funkcji $f(x)$. Wykażę, że dla $x=0$ będzie on sumowalny metodą pierwszej średniej arytmetycznej do $+\infty$, co będzie dowodziło, że funkcja sprzężona $g(x)$ jest nieciągła dla $x=0$, a nawet nieograniczona w pobliżu tej wartości.

Łatwy rachunek wykazuje, że suma cząstkowa S_n rzędu n szeregu (2) dla $x=0$ ma postać

$$S_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\mu(t)}{2\sin\frac{t}{2}}\left[\cos\frac{t}{2} - \cos(n+\tfrac{1}{2})\,t\right]dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mu(t)}{2\sin\frac{t}{2}}\left[\cos\frac{t}{2} - \cos(n+\tfrac{1}{2})\,t\right]dt + O(1).$$

A więc:

$$S_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mu(t)}{2\sin\frac{t}{2}}\left[1-\cos(n+\tfrac{1}{2})\,t\right]dt + \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mu(t)}{2\sin\frac{t}{2}}\left[\cos t - 1\right]dt + O(1)^{10)}$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mu(t)}{2\sin\frac{t}{2}}\left[1-\cos(n+\tfrac{1}{2})t\right]dt + O(1),$$

ale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mu(t)}{2\sin\frac{t}{2}}\left[1-\cos(n+\tfrac{1}{2})\,t\right]dt \geqslant \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mu(t)}{t}dt - \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mu(t)}{t}\cos(n+\tfrac{1}{2})\,t\;dt$$

Ponieważ na zasadzie znanych twierdzeń o spółczynnikach Fouriera ostatnia całka dąży do zera wraz z $\frac{1}{n}$, więc

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} S_n \geqslant \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mu(t)}{t}\,dt + O(1), \text{ przy każdem } \varepsilon > 0, \text{ a więc}$$

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} S_n = +\infty, \text{ t. j. } \lim_{n\to\infty} S_n = +\infty.$$

[10] Piszemy wraz z Landau'em że $\varphi(x)=O(\psi(x))$ ew. $\varphi(x)=o(\psi(x))$ w otoczeniu wartości $x=x_0$ (np. $x_0=0$, $x_0=\infty$ etc.) jeżeli wartość bezwzględna stosunku $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ jest ograniczona, ew. dąży do zera dla $x\to x_0$.

Zatem ciąg liczb S_n jest rozbieżny do $+\infty$, a więc jest również sumowalny do $+\infty$ metodą pierwszej średniej arytmetycznej, c. b. d. o.

Jako łatwy wniosek z twierdzenia I otrzymujemy następujące

Twierdzenie III. Jeżeli dla dostatecznie małych δ: $\omega(\delta) = O\left({}^{\alpha_0}\log^{\alpha_1}\frac{1}{\delta}\ldots\log_k^{\alpha_k}\frac{1}{\delta}\right)$ ($\delta>0$; $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_k$ liczby rzeczywiste, $0<\alpha_0<1$), wówczas $\omega_1(\delta)$ ma tę samą postać.

Jezeli $\omega(\delta) = O\left(\log^{\alpha_1}\frac{1}{\delta}\log_2^{\alpha_2}\frac{1}{\delta}\ldots\log_k^{\alpha_k}\frac{1}{\delta}\right)$ ($\alpha_1 < -1$), to $\omega_1(\delta)$ $= O\left(\log^{\alpha_1+1}\frac{1}{\delta}\log_2^{\alpha_2}\frac{1}{\delta}\ldots\log_k^{\alpha_k}\frac{1}{\delta}\right)$, i wreszcie jeżeli $\omega(\delta)$ $= O\left(\log_2^{\alpha_1}\frac{1}{\delta}\,\delta\log_2^{\alpha_1}\frac{1}{\delta}\ldots\log_k^{\alpha_k}\frac{1}{\delta}\right)$, to $\omega_1(\delta) = O\left(\delta\log^{\alpha_1+1}\frac{1}{\delta}\log_2^{\alpha_2}\frac{1}{\delta}\ldots\log_k^{\alpha_k}\frac{1}{\delta}\right)$.

Résumé.

Dans cette note je démontre, en généralisant certains résultats de M. M. Fatou et Privaloff, le théorème suivant:

Si $\omega(\delta)$ est le module de continuité de la fonction $f(x)$ de période 2π la fonction $g(x)$ conjuguée à $f(x)$ possède le module de continuité

$$(A) \qquad \omega_1(\delta) \leqslant C\left(\int_0^{\delta} \frac{\omega(t)}{t}\,dt + \delta\int_0^{\pi} \frac{\omega(t)}{t^2}\,dt\right) \text{ (C-une constante)}$$

Si $f(x)$ est intégrable L est continue dans l'intervalle fermé (a, b), le module de continuité $\omega_1(\delta)$ de la fonction $g(x)$ sur $(a+\varepsilon, b-\varepsilon)$, $\varepsilon>0$, est donné par la même formule, où $C=C(\varepsilon)$ dépend de ε. On déduit aisément de la formule que, si pour δ ($\delta>0$) suffisamment petit $\omega(\delta) = O\left(\delta^{\alpha_0}\log^{\alpha_1}\frac{1}{\delta}\ldots\log_k^{\alpha_k}\frac{1}{\delta}\right)$ ($0<\alpha_0<1$), il est de même de $\omega_1(\delta)$. Si $\omega(\delta)$ est $O\left(\delta\log_2^{\alpha_1}\frac{1}{\delta}\log_2^{\alpha_2}\frac{1}{\delta}\ldots\log_k^{\alpha_k}\frac{1}{\delta}\right)$

resp. $O\left(\log^{\alpha_1}\frac{1}{\delta}\log_2^{\alpha_2}\frac{1}{\delta}\ldots\log_k^{\alpha_k}\frac{1}{\delta}\right)$ ($\alpha_1 < -1$), $\omega_1(\delta)$ est

$O\left(\delta\log^{\alpha_1+1}\frac{1}{\delta}\log_2^{\alpha_2}\frac{1}{\delta}\ldots\log_k^{\alpha_k}\frac{1}{\delta}\right)$ resp. $O\left(\log^{\alpha_1+1}\frac{1}{\delta}\log_2^{\alpha_2}\frac{1}{2}\ldots\log_k^{\alpha_k}\frac{1}{\delta}\right)$

Evidémment la formule (A) ne donne pas rien dans le cas de divergence de

l'intégrale $\int_0^\delta \frac{\omega(t)}{t}\,dt$. Mais on a le théorème suivant: pour toute fonction $\mu(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$ s'annulant pour $x = 0$, non décroissante, vérifiant dans $(0, \pi)$ la condition $\mu'(x_1) \geqslant \mu'(x_2)$ $(0 < x_1 < x_2 < \pi)$ et telle que l'intégrale $\int_0^\pi \frac{\mu(t)}{t}\,dt$ diverge (p. ex. on peut poser $\mu(x) = \frac{1}{\log \frac{a_1}{x}}$ ou $\mu(x) = \frac{1}{\log \frac{a_1}{x} \log_2 \frac{a_2}{x}}$ etc. où a_1, a_2 sont des constantes positives) on peut construire une fonction $f(x)$ de période 2π, dont le module de continuité $\omega_1(\delta)$ ne surpasse pas $\mu(\delta)$: $\omega_1(\delta) \leqslant \mu(\delta)$ $(0 \leqslant \delta \leqslant \pi)$ et pour laquelle la fonction conjugueé $g(x)$ n'est pas continue (même bornée) dans certains points.