ROMUALD WITWIŃSKI
lieutenant de cavalerie

Sur la théorie des singularités des équations différentielles du premier ordre.

(O teorji osobliwości równań różniczkowych rzędu pierwszego).

Introduction.

1. L'étude des intégrales d'une équation différentielle

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0 \tag{1}$$

vérifiant des conditions initiales singulières a fait l'objet des plusieurs travaux: Briot et Bouquet, Picard, Poincaré, Bendixon, Horn, Lindelöf, Autonne, Darboux, Königsberger ont publié des résultats, par lesquels la question est presque résolue; je ne veux pas donner ici la bibliographie de cette partie importante de la théorie des équations différentielles; on la trouvera complète dans l'intéressante Thèse de H. Dulac: Recherches sur les points singuliers des équations différentielles (Journal de l'École Polytechnique, 2 e série, Cahier IX, 1904), qui a apporté des compléments considérables aux résultats des auteurs ci-dessus cités. J'attire encore l'attention sur les remarquables recherches de M. A. Rosenblatt publiées dans le t. XXVII de „Prace matematyczno-fizyczne". Malgré toutes ces recherches, il reste quelques singularités qui n'ont pas encore été étudiées d'une façon complète.

On sait que Briot et Bouquet sont arrivés à établir, dans des cas très étendus, une réduction à des formes simples qu'on étudie plus aisément; le lecteur peut se reporter à leurs travaux mémorables [Recherches sur les propriétés des fonctions définies par des équations différentielles (Journal de l'École Polytechnique, Cahier XXXVI, 1856, p. 161)] ou bien au Tome III du Traité d'Analyse de E. Picard. Parmi ces formes, auxquelles nous conduit la réduction de Briot de Bouquet, il y en a une très intéressante, a cause des circonstances particulières qu'elle présente: je veux parler de la forme

$$x^2 \frac{dy}{dx} = \alpha y + f(x, y) \quad (\alpha \neq 0), \tag{2}$$

où $f(x, y)$ désigne une fonction holomorphe des x et y dans le voisinage de $x=0$ et $y=0$ s'annulant pour $x=0$ et $y=0$. Nous supposons, bien entendu, que la fonction $f(x, y)$ ne contienne pas de terme de la forme αy. Le calcul des coefficients du développement taylorien peut se faire de proche en proche par l'équation (2), grâce à des différentiations successives; mais le développement n'est pas convergent, comme on le constate aisément sur des exemples simples. Picard (loc. cit.) donne le suivant:

$$x^2\frac{dy}{dx}=\alpha y+bx \quad (\alpha\neq 0),$$

dans lequel on aperçoit immédiatement la divergence du développement taylorien, et il s'exprime ainsi (p. 39): „La singularité $x=0$ est, en général, pour cette équation une singularité de nature essentielle; il y aurait là un important et difficile sujet de recherches". C'est à ce sujet que se rapporte le présent travail.

I. — Les résultats de Briot et Bouquet.

2. Briot et Bouquet ont examiné l'équation

$$x^2\frac{dy}{dx}=\alpha y+x\varphi(x), \tag{3}$$

où $\varphi(x)$ désigne une fonction holomorphe dans le voisinage de $x=0$, et ils ont recherché pour quelles valeurs du paramètre α l'équation différentielle admet une intégrale holomorphe dans le voisinage de $x=0$ et s'annulant pour cette valeur de x.

Ils ont résolu le problème sous la forme suivante:

I. Pour que l'équation (3) admette une intégrale holomorphe dans le voisinage de $x=0$ et s'annulant pour $x=0$, il faut et il suffit que le nombre α soit un zéro d'une fonction entière

$$H(x)=b_0+\frac{b_1}{1}x+\frac{b_2}{1.2}x^2+\frac{b_3}{1.2.3}x^3+\ldots+\frac{b_n}{1.2.3\ldots n}x^n+\ldots, \tag{4}$$

où les nombres $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ désignent les coefficients du développement taylorien de la fonction

$$\varphi(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx^n+\ldots.$$

On démontre aisément ce théorème en calculant de proche en proche les coefficients du développement taylorien à l'aide de l'équation (3), par l'emploi de la méthode des coefficients indéterminés. (Voir le Mémoire précité de Briot et Bouquet).

Le calcul du développement taylorien, qui satisfait formellement à l'équation différentielle (3), montre aussi que cette série diverge pour toute valeur de α n'annulant pas la fonction $H(x)$ et que le coefficient de x^n dans cette série jouit de la propriété suivante:

II. Si l'on désigne par A_n le coefficient de x^n dans la série $H(x)$, le rapport

$$\sqrt[n]{A_n}:\sqrt[n]{1.2.3\ldots(n-1)}$$

tend vers une valeur finie et différente de zéro, lorsque l'indice n croît indéfiniment, pour toute valeur de α n'annulant pas la fonction $H(x)$.

Il serait très intéressant d'étendre ces propriétés, dont jouit l'exemple simple étudié par Briot et Bouquet, au cas le plus général de l'équation (2). C'est ce que nous allons faire pour la propriété II en prouvant que le rapport

$$\sqrt[n]{A_n}:\sqrt[n]{1.2.3\ldots(n-1)} \tag{5}$$

ne tend jamais vers l'infini, et cela dans le cas le plus général de l'équation (2).

De plus, nous faisons une étude détaillée de la série qui satisfait formellement à une équation de la forme (2), et nous mettons en lumière l'origine et les raisons générales de sa divergence, d'où résulte un théorème intéressant justifiant l'assertion déjà mentionnée, d'après laquelle l'équation (2) n'admet pas, en général, d'intégrale holomorphe s'annulant pour $x=0$.

II. — Comparaison de la série avec une autre série convergente.

3. La dérivée d'ordre $n^{\text{ième}}$ du premier membre de l'équation (2) est égale pour $x=0$ à

$$n(n-1)\cdot\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)_0, \tag{6}$$

l'indice zéro désignant la valeur de la dérivée pour $x=0$.

Si, d'autre part, nous différentions n fois l'expression xy, nous remarquons que, pour $x=0$, la $n^{\text{ième}}$ dérivée xy est égale à

$$n\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)_0. \tag{7}$$

Si donc nous considérons l'équation ayant pour premier membre l'expression xy et pour second membre le second membre de l'équation différentielle donnée (2), il y a lieu à faire un rapprochement entre le série définie par l'équation différentielle (2) et la série obtenue par des différentiations successives de l'équation finie

$$xy = \alpha y + f(x, y), \tag{8}$$

que nous appellerons l'équation (E). Cette équation définit une fonction $y = g(x)$ qui est holomorphe dans le voisinage de $x = 0$ et s'annule pour $x = 0$, d'après un théorème bien connu de Weierstrass (voir Picard, Traité d'Analyse, t. II, p. 241—245, et Abhandlungen aus der Funktionenlehre, von K. Weierstrass).

Le rapprochement des deux séries, que nous nous proposons de faire, tient à la remarque suivante: Si, en effectuant ces différentiations successives de l'équation différentielle, nous omettons chaque fois le facteur $n - 1$ qui se présente dans l'expression (6) et non pas dans l'expression (7), on déduit immédiatement de la série satisfaisant à l'équation différentielle la série satisfaisant à l'équation (E), qui est bien convergente dans un cercle ayant comme centre le point $x = 0$. Je précise: apres avoir différentié un certain nombre de fois l'équation différentielle, nous remarquons qu'il se présentent comme facteurs deux nombres entiers consécutifs dans le premier membre; si donc chaque fois nous divisons ce membre par le plus petit de ces facteurs entiers, que nous supprimons ainsi, nous obtenons, au lieu de la série satisfaisant à l'équation différentielle, la série satisfaisant à l'équation (E) ou (8), qui converge dans le voisinage de $x = 0$.

Cette remarque, qui est fondamentale pour notre but, nous conduit à la conclusion que la présence de ces facteurs $1, 2, 3, \ldots, n-1$, que nous devons supprimer après chaque différentiation pour obtenir la série satisfaisant à l'équation (E), est le fait principal qui entraîne, en général, la divergence de la série de Taylor satisfaisant formellement à l'équation différentielle.

Nous appellerons facteurs de divergence ces facteurs: 2 pour la dérivée troisième, 3 pour la dérivée quatrième, etc., $n-1$ pour la dérivée $y^{(n)}$.

L'étude approfondie de la manière dont les facteurs de divergence s'introduisent dans les dérivations successives de l'équation différentielle et se rattachent à la série convergente définie par l'équation (E) nous permettra d'obtenir des résultats intéressants.

4. Soit

$$\gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \ldots + \gamma_n x^n + \ldots \tag{9}$$

le série qui satisfait formellement à l'équation différentielle; remarquons que le coefficient γ_n peut s'écrire de la façon suivante:

$$\gamma_n = \Sigma\, a_1\, a_2 \ldots a_m A_{a_1 a_2 \ldots a_m}, \tag{10}$$

où les $a_1, a_2, \ldots, a_m$ désignent des facteurs de divergence et où la somme

$$c_n = \Sigma A_{a_1 a_2 \ldots a_m} \tag{11}$$

désigne le coefficient de x^n dans la série

$$c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots \tag{11'}$$

qui satisfait à l'équation (E).

Parmi les termes de la somme (10), il y en a un qui contient le produit $1.2.3\ldots(n-2)(n-1)$ des facteurs de divergence. Nous allons maintenant démontrer qu'aucun des autres termes n'aura un coefficient de divergence dépassant le produit $1.2.3\ldots(n-1)$; il suffit de démontrer que le coefficient γ_n jouit de cette propriété, s'il en est ainsi de coefficients précédents. A cet effet, remarquons que l'équation obtenue par n différentiations successives de l'équation (2) permet d'exprimer la dérivée $y^{(n)}$ en fonction des dérivées précédentes, de façon que dans chaque terme la somme des indices des dérivées ne dépasse pas n; ainsi, la dérivée $y^{(n-1)}$ qui se trouve au premier membre se multiplie par le nouveau facteur de divergence $n-1$, puisque l'autre facteur n n'est pas un facteur de divergence comme appartenant aussi à l'équation de comparaison (E), et, par conséquent, le plus grand coefficient de divergence sera égal à $1.2.3\ldots(n-1)$ dans ces termes du premier membre, puisque, par hypothèse, le plus grand coefficient de divergence dans la dérivée $y^{(n-1)}$ est égal à $1.2.3.4\ldots(n-2)$. En ce qui concerne le second membre, les termes qui y figurent prennent pour $x = 0$ et $y = 0$ la forme suivante,

$$g\,(y')_0^{l_1}\,(y'')_0^{l_2}\ldots(y^{(\nu)})_0^{l_\nu} \quad (\nu < n), \tag{12}$$

g désignant un certain nombre n'ayant pas de facteurs de divergence et la somme

$$l_1 + 2 l_2 + 3 l_3 + \nu l_\nu \leqslant n. \tag{13}$$

D'aprés notre hypothèse, le plus grand coefficient de divergence de $(y_0'')^{l_2}$ est égal à 1^{l_2}, celui de $(y_0''')^{l_3}$ est égal à $(1.2)^{l_3}, \ldots$, et, en général, le plus grand coefficient de divergence dans $(y_0^{(\nu)})^{l_\nu}$ est égal à

$$[1.2.3\ldots(\nu-1)]^{l_\nu};$$

par conséquent, le plus grand coefficient de divergence du terme (12) sera égal à

$$(1.2)^{l_3}(1.2.3)^{l_4}\ldots[1.2.3\ldots(\nu-1)]^{l_\nu} \tag{14}$$

et ce produit est évidemment inférieur ou égal au produit $1.2.3\ldots(n-2)$ $(n-1)$, parce que le nombre des facteurs du produit (14), qui sont différents de l'unité, est égal à

$$l_3+2l_4+3l_5+\ldots+(\nu-2)l_\nu \leqslant n-2.$$

En effet, cette somme est égale à

$$l_1+2l_2+3l_3+\ldots+\nu l_\nu-l_1-2(l_2+l_3+\ldots+l_\nu); \tag{15}$$

si les exposants $l_2, l_3, \ldots, l_\nu$ sont tous nuls, le terme en question ne contient aucun facteur de divergence; dans le cas contraire, le nombre $l_1+2(l_2+l_3+\ldots+l_\nu)$ est au moins égal à 2 et, par conséquent, le nombre (15) est au plus égal à

$$l_1+2l_2+3l_3+\ldots+\nu l_\nu-2 \leqslant n-2,$$

parce que le nombre $l_1+2l_2+3l_3+\ldots+\nu l_\nu$ est au plus égal à n.

Il résulte immédiatement de là que, pour déduire le produit $1.2.3\ldots(n-1)$ du produit (14), il faut remplacer certains facteurs de divergence par d'autres plus grands.

III. — Rapidité de la divergence.

5. Ayant démontré dans le paragraphe précédent que les coefficients de divergence $a_1, a_2, \ldots, a_m$, qui figurent dans l'expression (10) de γ_n, sont inférieurs ou égaux au produit $1.2.3\ldots(n-1)$, nous pouvons maintenant établir une limite supérieure du coefficient γ_n de la série (9). Nous avons, en effet

$$|\gamma_n| < 1.2.3\ldots(n-1)\sum |A_{a_1 a_2,\ldots,a_m}|, \tag{16}$$

le symbole $|A_{a_1 a_2,\ldots,a_m}|$ désignant le module de $A_{a_1 a_2,\ldots,a_m}$. Cela posé, écrivons l'équation différentielle donnée sous la forme

$$x^2y'-f(x,y)=\alpha y,$$

et remplaçons tous le coefficients des termes du premier membre par leurs modules; nous obtenons ainsi l'équation différentielle

$$x^2y'+F(x,y)=\alpha y, \tag{17}$$

la fonction $F(x,y)$ ayant comme coefficients les modules des coefficients de la fonction $f(x,y)$. Les coefficients $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \ldots$ de notre série ne dépassent pas évidemment les coefficients correspondants de la série de Taylor définie par l'équation (17), et les coefficients $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n \ldots$ de la série (11′) ne dépassent pas, pour la même raison, ceux de la série taylorienne définie par l'équation

$$xy+F(x,y)=\alpha y. \tag{18}$$

La fonction $F(x,y)$ joue ici le rôle d'une fonction majorante. Si, en effet, nous considérons la quantité c_n comme fonction des coefficients de la série qui définit $f(x,y)$, la substitution ci-dessus indiquée est équivalente au remplacement des termes de cette expression de c_n par leurs moduls. Soit

$$\omega(x)=\delta_1 x+\delta_2 x^2+\ldots+\delta_n x^n+\ldots \tag{19}$$

le série de Taylor définie par l'équation (18); elle définit, d'après le théorème fondamental de Weierstrass, une fonction holomorphe dans le voisinage de $x=0$, et, par conséquent, la limite de $\sqrt[n]{\delta_n}$ pour $n=\infty$ est un nombre fini; il en est donc de même de la limite de $\sqrt[n]{c_n}$, grâce à la relation

$$c_n \leqslant \delta_n.$$

Cela étant, notre inégalité (16) devient

$$|\gamma_n| < 1.2.3\ldots(n-1)\,\delta_n, \tag{20}$$

le nombre δ_n étant, bien entendu, réel et positif.

L'inégalité (20) peut s'écrire aussi de la façon suivante,

$$\sqrt[n]{|\gamma_n|} < \sqrt[n]{n!}\,\sqrt[n]{\delta_n}$$

ou bien

$$\sqrt[n]{|\gamma_n|} : \sqrt[n]{n!} < \sqrt[n]{\delta_n},$$

ce qui démontre que le rapport $\sqrt[n]{|\gamma_n|} : \sqrt[n]{n!}$ tend vers une limite finie, lorsque n croît indéfiniment, parce qu'il en est ainsi de la quantité $\sqrt[n]{\delta_n}$, d'après l'holomorphie de la fonction $\omega(x)$ dans le voisinage de $x=0$.

Cette analyse se résume dans l'énoncé suivant:

Théorème I. — *Dans le cas où la quantité $\sqrt[n]{\gamma_n}$ croit avec n, elle ne croît jamais plus vite que $\sqrt[n]{n!}$, et nous avons ainsi une limite supérieure de la vitesse de la divergence de la série qui satisfait formellement à l'équation différentielle donnée: le rapport $\sqrt[n]{\gamma_n} : \sqrt[n]{n!}$ ne tend jamais vers l'infini, losque n croît indéfiniment.*

La limite supérieure que ce théorème assigne, pour la rapidité de la divergence de la série considérée dans ce travail, est atteinte dans les cas particuliers cités par Picard, ainsi que par Briot et Bouquet (voir ci-dessus, nos 1 et 2).

10. — Un cas particulier.

6. Considérons l'équation

$$x^2 y' + F(x, y) = \alpha y, \tag{21}$$

où $F(x, y)$ désigne une fonction holomorphe dans le voisinage des valeurs $x=0$ et $y=0$, et ayant comme coefficients des nombres réels et positifs; $F(x, y)$ ne contient pas, bien entendu, de terme linéaire en y de la forme αy. Dans ce cas, les nombres $A_{a_1 a_2 \ldots a_m}$ de la formule (10) sont tous positifs et nous pouvons écrire

$$\gamma_n = 1.2.3\ldots(n-1)\sum \frac{a_1 a_2 \ldots a_m}{1.2.3\ldots(n-1)} A_{a_1 a_2 \ldots a_m},$$

les rapports $\dfrac{a_1 a_2 \ldots a_m}{1.2.3\ldots(n-1)}$ étant au plus égaux à l'unité et au moins égaux à $\dfrac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}$. Nous avons en effet démontré (n^0 4) que les produits $a_1 a_2 \ldots a_m$ ne dépassent pas $1.2.3\ldots(n-1)$. Cela posé, nous pouvons indiquer des termes de la somme ci-dessus qui ne tendent pas vers zéro avec $\dfrac{1}{n}$. Si, en effet, nous posons

$$F(x, y) = x B(x) + B_1(x) y + B_2(x) y^2 + \ldots,$$
$$B(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \ldots,$$

dans l'expression de la dérivée $y^{(n)}$ obtenue par différentiations successives de l'équation (21) et correspondant aux valeurs initiales $x=0$ et $y=0$ figurera le terme

$$\frac{p_0}{\alpha^n}(1.2.3\ldots n)[1.2.3\ldots(n-1)].$$

Ce terme figurera sous la forme

$$\frac{p_0}{\alpha^n}[1.2.3\ldots(n-1)],$$

dans l'expression de γ_n, et, si nous posons

$$\gamma_n = \frac{1.2.3\ldots(n-1)}{\alpha^n} q_n,$$

l'expression de q_n contiendra le terme p_0 qui est constant. Il suit de là que

la quantité q_n ne saurait tendre vers zéro, et, par conséquent, la quantité $\sqrt[n]{\gamma_n}$ tend vers l'infini avec n. Nous concluons donc que l'équation différentielle (21) n'admet pas d'intégrale holomorphe.

Ce résultat est d'autant plus intéressant que nous trouvons chez plusieurs auteurs l'assertion que les équations différentielles, considérées dans ce travail n'admettent pas, en général, d'intégrale holomorphe.

Cette assertion n'est jusqu'ici appuyée que sur des exemples très particuliers (voir Traité d'Analyse de Picard, t. III, p. 85—39, et la Thèse déjà citée de Dulac). Notre méthode met en lumière la cause de la divergence du développement taylorien, déduit de l'équation différentielle; d'ailleurs, le cas étudié ci-dessus, et dans lequel l'absence de l'intégrale holomorphe est démontrée, présente le caractère le plus général, au point de vue fonctionnel et différentiel, des équations différentielles considérées dans ce travail. En effet, la restriction employée pour arriver à ce résultat ne touche pas au fond du caractère fonctionnel et différentiel des équations les plus générales que nous considérons ici. Si, par exemple, nous nous bornons au domaine réel, la restriction indiquée ne concerne que le signe des coefficients des fonctions $B(x)$, $B_1(x)$, $B_2(x), \ldots$ de l'équation (2) écrite sous la forme

$$x^2 y' = \alpha y + x B(x) + x B_1(x) y + B_2(x) y^2 + \ldots \quad (\alpha \neq 0).$$

Le fait fondamental qui résulte de ces recherches consiste en ce que la divergence de la série taylorienne déduite des équations différentielles considérées est due à la présence de quelques nombres entiers, appelés facteurs de divergence, qui s'introduisent dans le calcul des dérivées successives. Une étude analogue peut nous faire voire qu'il en est de même des équations plus générales

$$x^m y' = \alpha y + f(x, y),$$

m étant un entier quelconque.

Streszczenie.

W pracy niniejszej zajmuję się równaniem różniczkowem postaci

$$x^2 \frac{dy}{dx} = \alpha y + f(x, y) \quad (\alpha \neq 0), \tag{2}$$

stanowiącem uogólnienie równań, podanych przez Picard'a i Briot-

Bouquet, (§§ 1 i 2. Dla równania tego dowodzę twierdzenia, analogicznego do twierdzenia Briot i Bouquet, dotyczączego granicy stosunku (§ 2)

$$\sqrt[n]{A_n} : \sqrt[n]{1.2.3\ldots(n-1)}.$$

Badam szereg, czyniący formalnie zadość równaniu powyższemu, wykazując, iż jego rozbieżność zachodzi dzięki obecności pewnych liczb całkowitych, które nazywam czynnikami rozbieżności, i które wyłaniają się w rachunku pochodnych kolejnych. Z rozważań tych wynika interesujące twierdzenie dotyczące szybkości rozbieżności rzeczonego szeregu, które usprawiedliwia zdanie wielu matematyków, iż równanie (2) nie posiada naogół całki holormorficznej.

K. ABRAMOWICZ.

O przekształceniu funkcji automorficznej, należącej do grupy (0, 3; 2, 4, 5).

Sur la transformation d'une fonction automorphe appartenant au groupe (0, 3; 2, 4, 5).

Pierwsze badania nad przekształceniem funkcyj automorficznych znajdujemy u Frickego[1]); dotyczą one przekształcenia 3-go stopnia funkcji automorficznej, należącej do grupy, oznaczonej przez Kleina znakiem (0, 3; 2, 4, 5). Po za tym przypadkiem przekształcenia 3-go stopnia, zbadanym szczegółowo przez Frickego, i dwoma, podanemi przez niego, przypadkami specjalnemi[2]), dającemi grupy G_{60} i G_{168}, dalszych badań w zakresie przekształcenia funkcyj automorficznych nie posiadamy. Przedmiotem pracy niniejszej są pewne spostrzeżenia ogólne, dotyczące przekształcenia p-go stopnia funkcji automorficznej, należącej do grupy (0, 3; 2, 4, 5). Wynik, otrzymany przez nas, możemy sformułować w sposób następujący:

Jeżeli liczba naturalna p ma jednę z postaci:

$$20k+1,\ 20k+3,\ 20k+7,\ 20k+9$$

i jest przytem liczbą pierwszą w ciele kwadratowem $K(j)$, wyznaczonem przez pierwiastek dodatni j równania $j^2+j-1=0$, to przy przekształceniu p-go stopnia funkcji automorficznej $\varphi(z)$, należącej do grupy (0, 3; 2, 4, 5), funkcja przekształcona $\varphi(Tz)$ jest pierwiastkiem równania algebraicznego stopnia p^2+1.

§ 1.

Zauważymy uprzednio, że grupa automorficzna (0, 3; 2, 4, 5) określa się, jako zbiór wszystkich podstawień postaci:

[1]) Anhang w „Vorlesungen über die Theorie der automorphen Functionen" Bd. 2 str. 345.

[2]) Fricke: „Entwicklungen zur Transformation fünfter und siebenter Ordnung einiger spezieller automorpher Functionen" (Acta math., t. 17, str. 345).