

B. RIEMANN.

O hipotezach, które służą za podstawę Geometrii.

Przełożył

S. Dickstein.

Z przypisami Wł. Gosiewskiego[†], H. Webera[†] i tłumacza.

Przekład polski sławnej rozprawy Riemanna, wygłoszonej jako wykład habilitacyjny 10 czerwca 1854 r. i wydrukowanej już po śmierci Riemanna w tomie 34-m Rozpraw getyngueńskich w roku 1866, został ogłoszony w tomie IX Pamiętników Towarzystwa nauk ścisłych w Paryżu w r. 1877. Wielka doniosłość tej rozprawy znalazła nowe piękne i prawie niespodziewane potwierdzenie w Teorii grawitacji Einsteina. To skłoniło nas do przedruku niedostępnego już dzisiejszym czytelnikom polskim dawnego naszego przekładu. Z wyjątkiem drobnych poprawek przekład ten pozostawiliśmy bez zmiany. Przedmowę tłumacza wraz z życiorysem Riemanna i bibliografią ówczesną prac, związanych z rozprawą Riemanna pominęliśmy w tem nowem wydaniu. W przypisach za to umieściliśmy niektóre wyjaśnienia, nie zawarte w wydaniu pierwszym a związane z niektórymi nowszymi badaniami matematycznymi.

S. D.

Plan badania.

Geometria, jak wiadomo, przyjmuje jako coś danego zarówno pojęcie przestrzeni, jak i pierwsze pojęcia podstawowe dla konstrukcji w przestrzeni. Tych pojęć daje ona tylko definicje nominalne, przyczem istotne określenia występują w formie aksjomatów. Stosunek tych założeń pozostaje przytem w ciemności: nie widać, czy i o ile ich połączenie jest konieczne, ani a priori, czy jest możliwe.

Ciemności tej nie zdołali usunąć ani matematycy ani filozofowie, którzy się tem zajmowali, poczynawszy od Euklidesa aż do Legendre'a, że tu wymienie najslawniejszego z nowszych uczonych, którzy opracowywali Geometrię. Powód leżał w tem, że ogólne pojęcie wielkości wielokrotnie rozciągłych, w którym zawierają się wielkości przestrzenne, pozostawało zupełnie nieopracowanym. I dlatego postawiłem sobie najprzód zadanie zbudowania pojęcia wielkości wielokrotnie rozciągłej z ogólnych pojęć wielkościowych. Stąd wyniknie, że wielkość wielokrotnie rozciągła nadaje się do rozmaitych stosunków miarowych, że więc przestrzeń stanowi tylko przypadek szczególny wielkości trójkrotnie rozciągłej. Tego zaś następstwem koniecznem jest, że twierdzenia Geometrii nie dają się wyprowadzić z ogólnych pojęć wielkościowych, lecz że te własności, któremi przestrzeń różni się od innych pomysłów się dających trójkrotnie rozciągłych wielkości, mogą być powzięte tylko z doświadczenia. Powstaje stąd zadanie odśzukania najprostszych faktów, z których wyznaczyć się dają stosunki miarowe przestrzeni, — zadanie, które wedle istoty rzeczy nie jest jeszcze zupełnie oznaczone, albowiem można podać wiele układów faktów prostych, wystarczających do wyznaczenia stosunków miarowych przestrzeni; najważniejszym dla teraźniejszego celu jest układ, wzięty za podstawę przez Euklidesa. Fakty te, tak jak wszystkie fakty, nie są konieczne, a mają tylko pewność empiryczną, są hipotezami; można tedy badać ich prawdopodobieństwo, które wprawdzie wewnątrz granic spostrzeżenia jest bardzo wielkie, i wnioskować o możliwości rozciągnięcia ich poza granice spostrzeżenia, zarówno w stronę niezmierzonej wielkości, jako też w stronę niezmierzonej małości.

I. Pojęcie n -krotnie rozciągłej wielkości.

Przystępując do rozwiązania pierwszego z tych zadań, mianowicie do rozwinięcia pojęcia wielkości wielokrotnie rozciągłej, mniemam, że liczyć mogę na względność sądu, ponieważ mało jestem wyćwiczony w pracach tego rodzaju natury filozoficznej, gdzie trudności spoczywają bardziej w pojęciach niż w konstrukcji, i że nie mogłem korzystać z żadnych prac poprzednich, prócz kilku bardzo krótkich wskazań, które o tym przedmiocie dał p. tajny radca

dworu Gauss w drugiej rozprawie o resztach bikwadratowych, ogłoszonej w „Wiadomościach naukowych Getyngueńskich“ i w swojej pracy jubileuszowej, oraz z niektórych badań filozoficznych Herbarta.

1.

Pojęcia wielkościowe są możliwe tylko tam, gdzie przedtem znajduje się pojęcie ogólne, pozwalające na rozmaite sposoby wyznaczania. Wedle tego, czy pomiędzy temi sposobami wyznaczania ma miejsce przejście ciągłe od jednego do drugiego, czy też nie, tworzą one rozmaitość ciągłą albo przerywaną; pojedyncze sposoby wyznaczania nazywają się w pierwszym przypadku punktami, w drugim elementami tej rozmaitości. Pojęcia, których sposoby wyznaczania tworzą rozmaitość przerywaną, spotykają się tak często, że dla dowolnie danych przedmiotów, przynajmniej w językach wykształceńszych, daje się zawsze odnaleźć pojęcie, w którym one są zawarte (i matematycy mogli bez wahania w nauce o wielkościach przerywanych wziąć za punkt wyjścia żądanie, aby przedmioty dane uważane były za jednogatunkowe); przeciwnie zaś sposobność do tworzenia pojęć, których sposoby wyznaczania tworzą rozmaitość ciągłą, jest w życiu powszednim tak rzadka, że miejsca przedmiotów zmysłowych i barwy są jedynymi pojęciami prostemi, których sposoby wyznaczania tworzą rozmaitość wielokrotnie rozciągłą. Częstszą sposobność do tworzenia i rozwijania tych pojęć znajdujemy dopiero w Matematyce wyższej.

Określone części rozmaitości, wyróżnione cechą lub granicą, nazywają się wielościami (quanta). Porównanie ich co do ilości odbywa się dla wielkości przerywanych przez liczenie, dla ciągłych przez mierzenie. Mierzenie polega na nakładaniu na siebie porównywanych wielkości; do mierzenia więc potrzeba środka, za pomocą którego możnaby jedną wielkość przenosić jako miarę na inną. W braku takiego środka można dwie wielkości porównać tylko, gdy jedna jest częścią drugiej, i wtedy można tylko rozstrzygnąć, o ile jedna jest większa lub mniejsza, nie zaś ile razy jest większa od drugiej. Badania, które daje się w tym przypadku nad nimi przeprowadzić, tworzą ogólną, niezależną od wyznaczeń miarowych, część nauki o wielkościach, gdzie wielkości uważają się za istniejące nie niezależnie od położenia i nie jako wyrażalne przez jednostkę, lecz jako dziedziny w jednej rozmaitości. Takie badania stały się potrzebą dla wielu części Matematyki, mianowicie dla badania wielowartościowych funkcji analitycznych, i brak tychże jest główną przyczyną, dla której sławne twierdzenie Abela oraz prace Lagrange'a, Pfaffa, Jacobiego tak długo były bezpłodne dla ogólnej teorii równań różniczkowych. Dla teraźniejszego celu wystarcza z tej ogólnej części nauki o wielkościach rozciągłych, gdzie nic więcej nie zakłada się nad to, co jest zawarte w samem ich pojęciu, podnieść dwa punkty, z których pierwszy dotyczy tworzenia po-

jęcia rozmaitości wielokrotnie rozciągłej, drugi zaś sprowadzania wyznaczeń miejsca w danej rozmaitości do wyznaczeń ilościowych, co wyjaśni istotny charakter rozciągłości n -krotnej.

2.

Jeżeli przy pojęciu, którego sposoby wyznaczania tworzą rozmaitość ciągłą, przechodzić będziemy od jednego sposobu wyznaczania do drugiego w sposób określony, to przebieżone sposoby wyznaczania tworzą rozmaitość jednokrotnie rozciągłą, której istotną cechą jest to, że w niej z jednego punktu jest możliwe posuwanie się ciągle tylko w dwie strony: naprzód albo wtył. Jeżeli pomyślimy, że ta rozmaitość przechodzi w inną zupełnie różną i to sposobem zupełnie określonym, t. j. tak że każdy punkt jednej przechodzi w określony punkt drugiej, to wszystkie tak otrzymane sposoby wyznaczania tworzą rozmaitość dwukrotnie rozciągłą. W podobny sposób otrzymujemy rozmaitość trójkrotnie rozciągłą, jeżeli przedstawimy sobie, że dwukrotnie rozciągła przechodzi w sposób określony w inną całkowicie różną, i łatwo widzieć, jak tę konstrukcję, w dalszym ciągu prowadzić można. Jeżeli, zamiast uważania pojęcia za wyznaczalne, uważać będziemy przedmiot jego jako zmienny, to konstrukcję tę nazwać będzie można składaniem zmienności $(n+1)$ -wymiarowej ze zmienności n -wymiarowej i ze zmienności jednowymiarowej.

3.

Pokażę teraz, jak odwrotnie można rozłożyć zmienność, której dziedzina jest dana, na zmienność o jednym wymiarze i na zmienność o mniejszej liczbie wymiarów. W tym celu pomyślimy sobie zmienny odcinek rozmaitości jednowymiarowej, liczony od pewnego stałego punktu początkowego tak, że wartości jego dają się wzajemnie porównać, który to odcinek ma dla każdego punktu danej rozmaitości wartość oznaczoną, zmieniającą się wraz z nim w sposób ciągły; albo innemi słowy, przyjmijmy wewnątrz danej rozmaitości funkcję ciągłą miejsca, mianowicie taką funkcję, która wzdłuż pewnej części tej rozmaitości nie jest stała. Każdy układ punktów, w których funkcja ma wartość stałą, tworzy wtedy rozmaitość o mniejszej liczbie wymiarów niż dana. Te rozmaitości przy zmianie funkcji przechodzą jedna w drugą w sposób ciągły; można więc będzie przyjąć, że z jednej z nich powstają pozostałe, co, ogólnie mówiąc, tak odbywać się może, że każdy punkt jednej przechodzi w oznaczony punkt innej; przypadki wyjątkowe, których badanie jest ważne, mogą tu pozostać nierozważonemi. Przez to wyznaczenie miejsca w danej rozmaitości sprowadzi się do wyznaczenia wielkościowego i do wyznaczenia miejsca w mniejkrotnie rozciągłej rozmaitości. Otóż łatwo pokazać, że ta rozmaitość ma $n-1$ wymiarów, jeżeli dana jest n -krotnie rozciągła. Przez

n -krotne tedy powtórzenie tego postępowania wyznaczenie miejsca w n -krotnie rozciągłej rozmaitości sprowadza się do n wyznaczeń wielkościowych, a więc wyznaczenie miejsca w danej rozmaitości, gdy ono jest możliwe, do skończonej liczby wyznaczeń ilościowych. Istnieją wszakże rozmaitości, w których wyznaczanie miejsca wymaga już nie, jak wyżej, skończonej liczby, lecz albo nieskończonego szeregu, albo też ciągłej rozmaitości wyznaczeń wielkościowych. Takie rozmaitości tworzą np. możliwe wyznaczenia funkcji dla danej dziedziny, możliwe kształty figury przestrzennej i t. d.

II. Stosunki miarowe, właściwe rozmaitości n -wymiarowej, w założeniu, że linje posiadają długość niezależnie od położenia, że więc każda linja daje się mierzyć każdą.

Po ustanowieniu pojęcia n -krotnie rozciągłej rozmaitości i znalezieniu jej istotnego charakteru, polegającego na tem, że wyznaczenie miejsca w tej rozmaitości daje się sprowadzić do n wyznaczeń wielkościowych, przystępujemy do drugiego z wyżej postawionych zadań, a mianowicie do badania stosunków miarowych, do których nadaje się taka rozmaitość, oraz warunków, wystarczających do wyznaczenia tych stosunków miarowych. Te stosunki miarowe dają tylko się badać przy pomocy oderwanych pojęć wielkościowych i przedstawić w związku tylko przez wzory; przy pewnych założeniach można je atoli rozłożyć na stosunki, które, pojedynczo wzięte, nadają się do przedstawienia geometrycznego, przez co staje się rzeczą możliwą wyniki rachunku wyrazić geometrycznie. Dla zyskania przeto stałej podstawy, nie będzie można wprawdzie uniknąć oderwanego badania przy pomocy wzorów, lecz wyniki tego badania dadzą się przedstawić w szacie geometrycznej. Podstawy do obu rzeczy znajdują się w sławnej rozprawie pana tajnego radcy dworu Gaussa o powierzchniach krzywych.

1.

Wyznaczenia miarowe wymagają niezależności wielkości od miejsca, które może zachodzić w wieloraki sposób; najprzód nasuwające się przypuszczenie, którego trzymać się będę, jest to, że długość linii jest niezależna od położenia, że więc każda linja daje się mierzyć każdą. Jeżeli wyznaczenie miejsca sprowadzimy do wyznaczeń wielkościowych, t. j. jeżeli położenie punktu w danej n -krotnie rozciągłej rozmaitości wyrazimy zapomocą n wielkości zmiennych x_1, x_2, x_3 i tak dalej do x_n , to wyznaczenie linii wychodzi na to, że wielkości x są dane jako funkcje jednej zmiennej. Zadanie wtedy jest: utworzyć wyrażenie matematyczne na długość linii, do którego to celu wielkości x należy uważać za wyrażalne w jednostkach. Będę traktował to zadanie tylko pod pewnemi ograniczeniami i ograniczam się najprzód do takich

linij, w których stosunki pomiędzy wielkościami dx , t. j. odpowiedniami przyrostami wielkości x , zmieniają się w sposób ciągły. Można pomyśleć sobie te linie podzielone na elementy, wewnątrz których stosunki wielkości dx mogą być uważane za stałe, i zadanie sprowadza się do tego, by dla każdego punktu znaleźć ogólne wyrażenie na wychodzący z niego element liniowy ds , które to wyrażenie zawierać będzie wielkości x i wielkości dx . Przyjmuję powtórę, że, jeżeli odwrócimy uwagę od wielkości drugiego rzędu, długość elementu pozostaje niezmienniona, gdy wszystkie jego punkty doznają tej samej nieskończonej małej zmiany miejsca, w czem zawiera się i to, że gdy wszystkie wielkości dx rosną w tym samym stosunku, to i element liniowy w tym samym stosunku się zmienia. Przy takich przyjęciach element liniowy może być dowolną funkcją jednorodną stopnia pierwszego wielkości dx , która pozostaje niezmienną, gdy wszystkie wielkości dx zmieniają swój znak, i w której stałe dowolne są funkcjami ciągłymi wielkości x . Dla znalezienia przypadków najprostszych, szukam najprzód wyrażenia na $n-1$ -krotnie rozciągnięte rozmaitości, równooddalone od początku elementu liniowego, t. j. szukam takiej funkcji miejsca, która te rozmaitości od siebie odróżnia. Funkcja ta od punktu początkowego będzie na wszystkie strony albo rosła albo malała; przyjmuję, że na wszystkie strony rośnie, że więc w tym punkcie ma minimum. Gdy więc jej pierwsza i druga pochodna są skończone, jej różniczka rzędu pierwszego musi zniknąć, różniczka zaś rzędu drugiego nie powinna być nigdy ujemna; przyjmuję, że zawsze pozostaje dodatnią. To wyrażenie różniczkowe drugiego rzędu pozostaje wtedy stałem, jeżeli dx pozostaje stałem, i rośnie w stosunku kwadratowym, gdy wielkości dx , a więc i ds , zmieniają się wszystkie w tym samym stosunku; równa się przeto $\text{const. } ds^2$, a więc ds równa się pierwiastkowi kwadratowemu z zawsze dodatniej funkcji całkowitej jednorodnej stopnia drugiego wielkości x o współczynnikach, które są funkcjami ciągłymi wielkości x . Dla przestrzeni, jeżeli położenie punktów wyrazimy w współrzędnych prostokątnych, będzie $s = \sqrt{\Sigma (dx)^2}$; przestrzeń tedy jest zawarta w tym przypadku najprostszym. Następny prosty przypadek obejmowałby rozmaitości, których element liniowy wyraża się pierwiastkiem czwartego stopnia z wyrażenia różniczkowego stopnia czwartego. Badanie tego ogólniejszego gatunku nie wymagałoby wprowadzić istotnie nowych zasad, ale pochłonięłoby sporo czasu i stosunkowo rzuciłoby nie wiele nowego światła na naukę o przestrzeni, choćby dlatego, że wyniki nie dają się wyrazić geometrycznie; ograniczam się przeto do rozmaitości, których element liniowy wyraża się pierwiastkiem kwadratowym z wyrażenia różniczkowego stopnia drugiego. Można takie wyrażenie przekształcić na inne podobne, kładąc za n zmiennych niezależnych funkcje n nowych niezależnych zmiennych. Na tej drodze nie będzie można jednak każdego wyrażenia prze-

kształcać na każde, albowiem to wyrażenie zawiera $n \cdot \frac{n+1}{2}$ współczynników, które są funkcjami dowolnymi zmiennych niezależnych; przez wprowadzenie nowych zmiennych uczyni się zadość tylko n związkom, będzie więc można tylko n współczynników uczynić równymi wielkościom danym. Pozostałe współczynniki w liczbie $n \cdot \frac{n-1}{2}$ są już zupełnie wyznaczone przez naturę mającej się przedstawić rozmaitości, a więc dla wyznaczenia stosunków miarowych tejże potrzeba $n \cdot \frac{n-1}{2}$ funkcji miejsca. Rozmaitości, w których, tak jak na płaszczyźnie i w przestrzeni, element liniowy daje się sprowadzić do formy $\sqrt{\Sigma dx^2}$, tworzą tylko szczególny przypadek badanych tu rozmaitości, zasługują one na oddzielną nazwę i z tego powodu nazywać będę płaskimi te rozmaitości, w których kwadrat elementu liniowego sprowadzić się daje do sumy kwadratów różniczek zupełnych. Aby móc przejrzeć wszystkie istotnie różne rozmaitości, zawarte w założonej formie, jest konieczne usunięcie różnic pochodzących ze sposobu przedstawienia, co da się osiągnąć przez wybór wielkości zmiennych według pewnej zasady.

2.

W tym celu pomyślimy zbudowany układ linii najkrótszych, wychodzących z pewnego dowolnego punktu; położenie punktu nieoznaczonego da się wtedy wyznaczyć przez kierunek początkowy linii najkrótszej, na której on leży, i przez jego odległość na tej linii od punktu początkowego; będzie można zatem wyrazić je przez stosunki wielkości dx^0 , t. j. wielkości dx w początku tej linii najkrótszej i przez długość s tej linii. Wprowadźmy zamiast dx^0 takie z nich utworzone wyrażenia linjowe dx , by wartość początkowa kwadratu elementu liniowego równała się sumie kwadratów tych wyrażen, tak że zmiennymi niezależnymi są: wielkość s i stosunki wielkości dx . Położmy teraz w miejsce dx takie proporcjonalne do nich wielkości $x_1, x_2, \dots, x_n$, by suma kwadratów równała się s^2 . Jeżeli wprowadzimy te wielkości, to dla nieskończonej małej wartości x kwadrat elementu liniowego będzie równy Σdx^2 , wyraz rzędu następnego w nim będzie równy wyrażeniu jednorodnemu stopnia drugiego $n \cdot \frac{n-1}{2}$ wielkości $(x_1 dx_2 - x_2 dx_1), (x_1 dx_3 - x_3 dx_1), \dots$

a więc ilości nieskończonej małej czwartego wymiaru, tak że otrzymamy wielkość skończoną, gdy podzielimy ją przez kwadrat nieskończonej małego trójkąta, w którego wierzchołkach wartości zmiennych są: $(0, 0, 0, \dots), (x_1, x_2, x_3, \dots), (dx_1, dx_2, dx_3, \dots)$. Ta wielkość zachowuje tę samą wartość, dopóki x i dx są zawarte w tych samych dwójkowych formach linjo-

wych, albo dopóki obie linie najkrótsze od wartości 0 do wartości x i od wartości 0 do wartości dx pozostają na tym samym elemencie powierzchniowym, zależy więc od miejsca i od kierunku tegoż elementu. Jest ona oczywiście równa zeru, gdy przedstawiona rozmaitość jest płaska, t. j. gdy kwadrat elementu liniowego daje się sprowadzić do Σdx^2 , może być zatem uważana jako miara odchylenia rozmaitości od płaskości w tym kierunku powierzchniowym. Pomnożona przez $-\frac{3}{4}$ staje się ona równą wielkości, którą p. radca tajny dworu Gauss nazwał miarą krzywizny powierzchni. Wyżej znaleźliśmy, że dla wyznaczenia stosunków miarowych n -krotnie rozciąglej rozmaitości, dającej się przedstawić w założonej formie, potrzeba $n \frac{n-1}{2}$ funkcji miejsca; gdy więc dana będzie miara krzywizny w każdym punkcie w $n \frac{n-1}{2}$ kierunkach powierzchniowych, to stąd wyznaczyć się dadzą stosunki miarowe rozmaitości, o ile tylko pomiędzy temi wartościami nie zachodzą związki tożsamościowe, co, w rzeczy samej, ogólnie mówiąc, nie ma miejsca. Stosunki miarowe tych rozmaitości, w których element liniowy wyraża się pierwiastkiem kwadratowym z wyrażenia różniczkowego drugiego stopnia, daje się tedy wyrazić w sposób zupełnie niezależny od wyboru wielkości zmiennych. Całkowicie podobna droga daje się zastosować w tym celu i w tych rozmaitościach, w których element liniowy wyraża się w sposób mniej prosty; np. pierwiastkiem czwartego stopnia z wyrażenia różniczkowego stopnia czwartego. Element liniowy wtedy, ogólnie mówiąc, nie dałby się już sprowadzić do formy pierwiastka kwadratowego z sumy kwadratów wyrażen różniczkowych, a więc w wyrażeniu na kwadrat elementu liniowego odchylenie od płaskości byłoby ilością nieskończenie małą drugiego wymiaru, gdy tymczasem w tamtych jest nieskończenie małą czwartego wymiaru. Ta właściwość tych ostatnich rozmaitości może być nazwana płaskością w częściach najmniejszych. Dla terazniejszego celu najważniejszą właściwością tych rozmaitości, dla której one tu są badane, jest to, że stosunki dwukrotnie rozciąglej rozmaitości dają się przedstawić geometrycznie przez powierzchnie, a stosunki wielokrotnie rozciąglej sprowadzić do powierzchni w nich zawartych, co jeszcze wymaga krótkiego wyjaśnienia.

3.

W sposobie ujmowania powierzchni obok wewnętrznych stosunków miarowych, przy których zwraca się tylko uwagę na długość dróg na nich, występuje zawsze i ich położenie względem punktów zewnątrz nich leżących. Lecz można oderwać uwagę od stosunków zewnętrznych, przedsiębiorając tylko takie zmiany z niemi, przy których długość linii pozostaje w nich niezmienna,

t. j. wyobrażając je sobie dowolnie zginanemi bez rozciągnięcia i uważając wszystkie w ten sposób jedne z drugiej powstające powierzchnie za jednorodne. Np. jakiekolwiek powierzchnie walcowe lub stożkowe są jednorodne z płaszczyzną, dlatego że dają się utworzyć przez proste zgięcie płaszczyzny, przyczem stosunki miarowe wewnętrzne i wszystkie o nich twierdzenia, a więc cała Planimetria zachowują swą moc; przeciwnie różnią się one istotnie od kuli, która bez rozciągnięcia nie daje się przekształcić na płaszczyznę. Według badania poprzedzającego, wewnętrzne stosunki miarowe dwukrotnie rozciąglej wielkości, gdy element liniowy daje się wyrazić pierwiastkiem kwadratowym z wyrażenia różniczkowego drugiego stopnia, jak to ma miejsce dla powierzchni, charakteryzuje się przez miarę krzywizny. Wielkość ta dla powierzchni daje się unaocnić, gdyż jest iloczynem dwóch krzywizn powierzchni w tym punkcie, albo też w ten sposób, że iloczyn tychże przez trójkąt nieskończenie mały, utworzony z linii najkrótszych, równa się przewyżce sumy jego kątów nad dwa kąty proste w częściach promienia. Pierwsza definicja zakłada twierdzenie, że iloczyn obu promieni krzywizny przy prostym zginaniu powierzchni pozostaje bez zmiany, — druga, że w tem samym miejscu przewyżka sumy kątów nieskończenie małego trójkąta nad dwa kąty proste jest proporcjonalna do jego pola. Aby unaocnić znaczenie krzywizny rozmaitości n -krotnie rozciąglej w danym punkcie i w danym kierunku powierzchniowym przezeń przechodzącym, trzeba wyjść z tego, że linia najkrótsza, wychodząca z danego punktu, jest zupełnie wyznaczona, gdy dany jest jej kierunek początkowy. W ten sposób otrzymamy oznaczoną powierzchnię, gdy wszystkie kierunki początkowe, wychodzące z danego punktu i leżące na danym elemencie powierzchniowym, przedłużymy na linie najkrótsze, i powierzchnia ta w danym punkcie ma oznaczoną miarę krzywizny, która zarazem jest miarą krzywizny n -krotnie rozciąglej rozmaitości w danym punkcie i w danym kierunku powierzchniowym.

4.

Zanim poczynimy zastosowanie do przestrzeni, musimy podać kilka uwag o rozmaitościach płaskich w ogólności, t. j. o tych, w których kwadrat elementu liniowego wyraża się sumą kwadratów różniczek zupełnych.

W płaskiej n -krotnie rozciąglej rozmaitości miara krzywizny w każdym punkcie i w każdym kierunku jest zerem; do wyznaczenia atoli stosunków miarowych dość wiedzieć, jak to z poprzedzającego badania wynika, że ta miara w każdym punkcie w $n \cdot \frac{n-1}{2}$ kierunkach powierzchniowych, których miary krzywiznowe są od siebie niezależne, jest zerem. Rozmaitości, dla których miara krzywizny jest wszędzie równa zeru, można uważać za szczególny przypadek rozmaitości, których miara krzywizny jest wszędzie stała. Wspólny

charakterowości, których miara krzywizny jest stała, daje się jeszcze tak wyrazić, że w nich figury mogą się poruszać bez rozciągania. Oczywiście bowiem figury w nich nie mogłyby się dowolnie poruszać i obracać, gdyby miara krzywizny w każdym punkcie we wszystkich kierunkach nie była jedna i ta sama. Z drugiej strony stosunki miaroweowości są zupełnie wyznaczone przez miarę krzywizny, a więc w około jednego punktu we wszystkich kierunkach stosunki miarowe są takie same jak w około innego punktu, a zatem, z jednego punktu poczynając, można wykonywać te same konstrukcje, co i z innego; w rozmaitościach zatem o stałej mierze krzywiznowej figurom dawać można położenie dowolne.

Stosunki miarowe tychowości zależą tylko od wartości miary krzywiznowej, a co się tyczy przedstawienia analitycznego, to zauważymy, że gdy tę wartość oznaczmy przez α , elementowi linijnemu można dać formę następującą:

$$\frac{1}{1 + \frac{\alpha}{4} \Sigma x^2} \sqrt{\Sigma dx^2}.$$

5.

Do wyjaśnienia geometrycznego może służyć rozważanie powierzchni o stałej mierze krzywizny. Łatwo widzieć, że powierzchnie, których krzywizna jest dodatnia, dadzą się zawsze nawinąć na kulę, której promień równa się jednostki podzielonej przez pierwiastek kwadratowy z miary krzywizny; lecz aby przejrzeć całą ową powierzchnię, dajemy jednej z nich kształt kuli, pozostałym zaś kształt powierzchni obrotowych, które dotyczą kuli wzdłuż równika. Powierzchnie o większej mierze krzywiznowej niż ta kula będą dotyczyły kuli od wewnątrz i przyjmą postać taką, jaką ma część zewnętrzna powierzchni pierścienia odwróconego od osi; dałyby się one nawinąć na pasy kul o mniejszym promieniu, ale więcej niż raz jeden. Powierzchnie o mniejszej dodatniej krzywiznie otrzymamy, gdy z powierzchni kulistych o większym promieniu wytniemy kawałek ograniczony dwoma półokręgami kół wielkich i złączymy linie przecięcia. Powierzchnią o krzywiznie zero będzie powierzchnia walcowa, stojąca na równiku; powierzchnie z krzywizną ujemną będą dotyczyły tego walca od zewnątrz i będą uformowane jak część powierzchni pierścienia, zwrócona ku osi. Jeżeli pomyślimy te powierzchnie jako miejsce dla poruszających się na nich części powierzchniowych, w ten sposób, w jaki przestrzeń jest miejscem dla ciał, to na wszystkich tych powierzchniach części powierzchniowe będą poruszały się bez rozciągania. Powierzchnie z krzywizną dodatnią dają się zawsze tak uformować, by w nich części powierzchniowe mogły się poruszać dowolnie i bez zgięcia, a mianowicie

cie w powierzchnie kuliste, powierzchnie zaś z ujemną krzywizną — nie. Oprócz niezależności części powierzchniowych od miejsca w powierzchniach z miarą krzywiznową równą zero, zachodzi także niezależność kierunku od miejsca, nie zachodząca przy innych powierzchniach.

III. Zastosowanie do przestrzeni.

1.

Po tych badaniach i wyznaczeniu stosunków miarowych n krotnie rozciągłej wielkości, można już podać warunki dostateczne i konieczne do wyznaczenia stosunków miarowych przestrzeni, gdy założymy niezależność linii od położenia, oraz że element linijski wyraża się pierwiastkiem kwadratowym z wyrażenia różniczkowego drugiego stopnia, t. j. gdy założymy płaskość w częściach najmniejszych.

Stosunki te dają się po pierwsze w ten sposób wyrazić, że krzywizna w każdym punkcie w trzech kierunkach powierzchniowych jest zerem, a stąd stosunki miarowe przestrzeni są oznaczone, gdy suma kątów w trójkącie jest równa dwóm kątom prostym.

Jeżeli założymy, po drugie, wraz z Euklidesem istnienie niezależne od położenia nie tylko linii ale i ciał, to wyniknie stąd, że miara krzywizny jest wszędzie stała i wtedy we wszystkich trójkątach suma kątów jest oznaczona, jeżeli jest oznaczona w jednym trójkącie.

Na koniec można, po trzecie, zamiast przyjęcia niezależności długości linii od miejsca i kierunku, przyjąć niezależność ich długości i kierunku od miejsca. Przy takim uważaniu zmiany miejsca albo różności miejsca są wielkościami zespolonymi wyrażalnymi w trzech niezależnych jednostkach.

2.

W ciągu dotychczasowych rozważań oddzielaliśmy stosunki rozciągłościowe albo dziedzinowe od stosunków miarowych, i znaleźliśmy, że przy tych samych stosunkach rozciągłościowych można pomyśleć rozmaite stosunki miarowe; następnie szukaliśmy układów najprostszych wyznaczeń miarowych, określających całkowicie stosunki miarowe przestrzeni, których to wyznaczeń wszystkie twierdzenia o stosunkach miarowych są koniecznym następstwem. Pozostaje jeszcze wyjaśnić pytanie, jak, w jakim stopniu i w jakim zakresie doświadczenie stwierdza te założenia. Pod tym względem zachodzi istotna różnica między stosunkami rozciągłościowymi a stosunkami miarowymi; albowiem przy pierwszych, gdzie możliwe przypadki stanowią rozmaitość przerywaną, wypowiedzi doświadczenia nie są wprawdzie nigdy zupełnie pewne, ale nie są niedokładne, gdy tymczasem przy ostatnich, gdzie możliwe przypadki

tworzą rozmaitość ciągłą, każde wyznaczenie z doświadczenia pozostaje zawsze niedokładnem, jakkolwiek wielkie być może prawdopodobieństwo, że ono jest prawie pewne. Ta okoliczność jest ważna przy rozciągnięciu tych wyznaczeń empirycznych poza granice spostrzeżeń w niezmierzalną wielkość i niezmierzalną małość, albowiem te stosunki miarowe mogą rzeczywiście poza granicami spostrzeżeń stawać się ciągle niedokładniejszymi, stosunki zaś rozciągłościowe — nie.

Przy rozciągnięciu konstrukcyj przestrzennych w niezmierzalną wielkość, należy odróżnić nieograniczoność od nieskończoności. Pierwsza należy do stosunków rozciągłościowych, druga do miarowych. Że przestrzeń jest nieograniczoną trójkrotnie rozciągłą rozmaitością, jest to założenie, które stosujemy przy każdym pojmowaniu świata zewnętrznego, w którym w każdej chwili dopełniamy dziedziny rzeczywistych poczuć i budujemy możliwe miejsca szukanego przedmiotu, tak że to założenie przy tych zastosowaniach ciągle się stwierdza. Nieograniczoność przestrzeni posiada zatem większą pewność empiryczną, aniżeli jakiekolwiek doświadczenie. Stąd jednak nie wynika bynajmniej nieskończoność; przeciwnie, przestrzeń, gdy w niej założymy niezależność ciał od miejsca, t. j. gdy jej przypiszemy stałą miarę krzywizny, byłaby koniecznie skończona, jeżeliby ta miara miała jakąkolwiek wartość dodatnią. Gdybyśmy wtedy kierunki początkowe, leżące na elemencie powierzchniowym, przedłużyli na linje najkrótsze, otrzymalibyśmy powierzchnię nieograniczoną o stałej dodatniej mierze krzywizny, a więc powierzchnię, która w rozmaitości płaskiej przyjąłaby kształt powierzchni kulistej, która zatem jest skończona.

3.

Pytania o wielkości niezmierzalnej są dla wyjaśnienia natury pytaniami próżnemi. Inaczej rzecz się ma z pytaniami o niezmierzalnej małości. Na dokładności, z którą przenikamy zjawiska w nieskończonej małości, polega istotne poznanie ich związku przyczynowego. Postępy ostatnich stuleci w poznaniu Mechaniki przyrody są prawie całkowicie uwarunkowane dokładnością konstrukcji, która stała się możliwą przez wynalezienie Analizy nieskończonościowej i przy pomocy prostych pojęć zasadniczych odkrytych przez Archimedesza, Galileusza i Newtona, któremi postuguje się teraźniejsza Fizyka. W naukach przyrodniczych zaś, gdzie dotąd brak prostych pojęć zasadniczych do takich konstrukcji, bada się zjawiska dla poznania związku przyczynowego aż do przestrzennej małości tak daleko, jak pozwala na to mikroskop. Pytania o stosunkach miarowych przestrzeni w niezmierzalnej małości nie należą zatem do pytań próżnych.

Jeżeli założymy, że ciała istnieją niezależnie od miejsca, to miara krzywizny jest wszędzie stała i z pomiarów astronomicznych wynika, że nie może

być różna od zera; w każdym razie jej wartość odwrotna musiałaby być powierzchniową, w porównaniu z którą znika dziedzina dostępna naszym teleskopom. Lecz jeżeli taka niezależność ciał od miejsca nie istnieje, to ze stosunków miarowych w skończoności (im. Grossen) nie można wnioskować o nich w nieskończonej małości; może wtedy w każdym punkcie miara krzywizny w trzech kierunkach mieć wartość dowolną, jeżeli tylko cała krzywizna w każdej, wymierzyć się dającej, części przestrzeni, nie różni się wyraźnie od zera; jeszcze zawiększe stosunki mogą występować, jeżeli nie zachodzi założone przez nas przedstawienie elementu liniowego przez pierwiastek kwadratowy z wyrażenia różniczkowego drugiego stopnia. Otóż zdaje się, że pojęcia empiryczne, na których zasadzają się przestrzenne wyznaczenia miarowe, pojęcie ciała stałego i promienia światła, tracą swoją moc w nieskończonej małości: można tedy pomyśleć, że stosunki miarowe przestrzeni w nieskończonej małości nie zgadzają się z założeniami Geometrii, co w rzeczy samej należałoby przyjąć, gdyby przez to zjawiska dały się prościej wyjaśnić.

Pytanie o stosowaniu się założeń Geometrii do nieskończonej małości jest w związku z pytaniem o wewnętrznej istocie stosunków miarowych przestrzeni. Przy tem pytaniu, które zaliczone być jeszcze powinno do nauki o przestrzeni, znajduje zastosowanie powyższa uwaga, że w rozmaitości przerwanej zasada stosunków miarowych jest już zawarta w pojęciu tej rozmaitości, w ciągłej zaś musi być wzięta skądinąd. A zatem: albo rzeczywistość, będąca podstawą przestrzeni, musi tworzyć rozmaitość przerywaną, albo też, istoty stosunków miarowych szukać należy zewnątrz w wiążących siłach, które w niej działają.

Rozstrzygnięcie tych pytań będzie mogło wtedy tylko nastąpić, gdy, wyszedłszy z teraźniejszego pojmowania zjawisk nabytego doświadczeniem, do czego Newton położył podstawy, powoli opracowywać je będziemy, pobudzani do tego faktami, które nie dają się za pomocą tego pojmowania wyjaśnić; takie badania, które, jak niniejsze, wychodzą z pojęć ogólnych, mogą służyć tylko do tego, by tej pracy nie tamowała ograniczoność pojęć, a postępu w poznawaniu związku pomiędzy rzeczami nie wstrzymywały przekazane przesady.

Wprowadza nas to w dziedzinę innej umiejętności, w dziedzinę Fizyki, do której nie pozwala wstąpić treść dzisiejszego wykładu.

Przegląd treści.

Plan badania	Str. (2), 114
I. Pojęcie n -krotnie rozciągłej wielkości. ¹⁾	" "
§ 1. Rozmaitości ciągłe i przerywane. Oznaczone części rozmaitości nazywają się wielkościami. Podział nauki o wielkościach ciągłych na naukę:	
1) o samych stosunkach dziedzinowych, przy których nie zakłada się niezależności wielkości od miejsca;	
2) O stosunkach miarowych, przy których potrzeba założyć taką niezależność.	" (3), 115
§ 2. Wytworzenie pojęcia jednokrotnie, dwukrotnie, . . . n -krotnie rozciągłej rozmaitości	" (4), 116
§ 3. Srowadzenie wyznaczenia miejsca w danej rozmaitości do wyznaczeń ilościowych Istotna właściwość n krotnie rozciągłej rozmaitości	" "
II. Stosunki miarowe, do których nadaje się rozmaitość o n wymiarach ²⁾ przy założeniu, że linie posiadają długość niezależnie od położenia, że więc każda linja daje się mierzyć każdą	" (5), 117
§ 1. Wyrażenie elementu liniowego. Za płaskie uważa się takie rozmaitości, w których element liniowy daje się wyrazić pierwiastkiem z sumy kwadratów różniczek zupełnych	" (6), 118
§ 2. Badanie n -krotnie rozciągłych rozmaitości, w których element liniowy może być przedstawiony przez pierwiastek kwadratowy z wyrażenia różniczkowego drugiego stopnia. Miara odchylenia ich od płaskości (miara krzywizny) w danym punkcie i w danym kierunku powierzchniowym. Do wyznaczenia stosunków miarowych jest (przy pewnych ograniczeniach) rzeczą możliwą i dostateczną, by miara krzywiznowa w każdym punkcie w $\frac{n(n-1)}{2}$ kierunkach powierzchniowych była dowolnie dana.	" (8), 120
§ 3. Wyjaśnienie geometryczne.	" (9), 121
§ 4. Rozmaitości płaskie (w których miara krzywiznowa jest wszędzie równa zero) dają się uważać za szczególny przypadek rozmaitości o stałej krzywiznie. Dają się one określić i w ten sposób,	

¹⁾ Art. 1 stanowi zarazem pracę przygotowawczą do przyczynków do Analysis Situs.

²⁾ Te badania o możliwych wyznaczeniach miarowych n -krotnie rozciągłej rozmaitości jest bardzo niezupełne, ale dla teraźniejszego celu wystarczające.

że w nich zachodzi niezależność n -krotnie rozciągłych wielkości od miejsca (poruszalność ich bez rozciągnięcia).	Str. (10), 122
§ 5. Powierzchnie o stałej mierze krzywizny	" "
III. Zastosowanie do przestrzeni.	" (11), 123
§ 1. Układ faktów, wystarczających do wyznaczenia stosunków miarowych przestrzeni jak je zakłada Geometria.	" (12), 124
§ 2. Jak dalece jest prawdopodobne stosowanie tych wyznaczeń empirycznych poza granicami doświadczeń w dziedzinie nieskończonej wielkości?	" "
§ 3. Jak dalece w dziedzinie nieskończonej małości? Związek tego pytania z wyjaśnieniem Przyrody ¹⁾	" (13), 125

¹⁾ Paragraf 3 art. III wymaga jeszcze opracowania i dalszego rozwinięcia.

PRZYPISY.¹⁾

1. Do str. 1 (113). W ścisłym związku z niniejszą rozprawą są badania Riemanna, zawarte w jego rozprawie konkursowej, przedstawionej Akademii paryskiej w 1861 (wydrukowanej w zbiorowym wydaniu dzieł Riemanna w 1876): „Commen-tatio mathematica, qua respondere tentatur quaestioni ab Ill-ma Academia Parisiensi propositae „Trouver quel doit être l'état calorifique d'un corps solide homogène indéfini pour qu'un système de courbes isothermes, a un instant donné, reste isotherme après un temps quelconque, de telle sorte que la température d'un point puisse s'ex-primer en fonction du temps et de deux autres variables indépendantes“. Rozprawa ta zawiera rozwinięcia analityczne, wyjaśniające niektóre ustępy rozprawy o hipote-zach Geometrii. Porówn. uwagi Dedekinda w zbiorowym wydaniu dzieł Rie-manna wydanie 1^o, str. 384. (Bernard Riemann's gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass, herausgegeben unter Mitwirkung von R. De-dekind von H. Weber, Lipsk 1876). W tymże roku 1866, w którym wyszła z druku rozprawa Riemanna o hipotezach Geometrii, ogłosił Helmholtz artykuł o pod-stawach Geometrii (Über die tatsächlichen Grundlagen der Geometrie, Verhandl. des Naturw.-med. Vereins, Heidelberg) a następnie w Wiadomościach Getyngeskich w r. 1868 rozprawę p. t. „Über die Tatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen“.

Rozprawy Riemanna i Helmholtza pobudziły matematyków do rozważań nad podstawami Geometrii, które po dzień dzisiejszy nie schodzą z porządku dziennego badań. Krytykę tych rozpraw, głównie ze stanowiska Teorii grup przekształceń, podjął Lie (Verhandlungen de Sächs. Ges. der Wissenschaften zu Leipzig Bd. 42; 1890) oraz w dziele „Theorie der Transformationsgruppen“ Abteilung V (Lipsk, 1894). Z rozważań Liego korzystaliśmy w przypisach poniższych dla oświecenia niektó-rych miejsc rozprawy Riemanna. Uwagi krytyczne o badaniach Riemanna i Helmholtza podał też matematyk włoski Veronese w dziele „Fondamenti di geometria a piu dimensioni“ 1891, przekład niemiecki, Lipsk 1894, s. 642—643.

¹⁾ Literami Wł. G. i H. W. oznaczone są przypisy, podane przez Wł. Gosiew-skiego i H. Webera.

2. Do str. 4 (116) § 3. Riemann sprowadza wyznaczenie miejsca w n -krotnie rozciąglącej rozciągłości do n wyznaczeń wielkościowych, czyli innemi słowy, do tego, że układ punktów przestrzeni można odwzorować w sposób jedno-jednoznaczny i ciągły w układzie wartości n współrzędnych. Na tej odpowiedności opiera stosowanie ra-chunku analitycznego do badania stosunków miarowych rozciągłości. Co do tego przedmiotu istnieją liczne prace, między innemi G. Cantora (Journal für die reine und angen. Mathematik t. 84, 1878), Liego (l. c.), Brouwera (Mathem. Ann. 70, 1911; 72, 1912).

4. Do str. 5 (117) II 1. Drugie założenie, że długość linii jest niezależna od miejsca, lub inaczej, że każda linia daje się mierzyć każdą—wyraża Riemann ana-lytycznie, przyjmując, że współrzędne x są dane jako funkcje jednej zmiennej i że dłu-gość elementu linii pomiędzy dwoma punktami jest funkcją jednorodną stopnia pierw-szego przyrostów $dx_1, \dots, dx_n$, zależną od $x_1, x_2, \dots, x_n$ i nie zmieniającą znaku, gdy wszystkie dx zmieniają znak. Lie (l. c.) czyni uwagę, że Riemann przyj-muje tu milcząco, iż każde dwa dowolne punkty rozciągłości n -wymiarowej mają ozna-czoną odległość, t.j. zakłada istnienie pewnej funkcji $\Omega(x_1, x_2, \dots, x_n; x_1^0, \dots, x_n^0)$, która posiada tę samą wartość dla wszystkich punktów $x_1, x_2, \dots, x_n$, które „jed-nakowo są odległe“ od punktu $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$. Nie widać, czy Riemann czyni przez to nowe założenie, czy też sądzi, że z istnienia elementu łuku, o którym mowa wyżej, wynika już istnienie takiej funkcji Ω . Z istnienia takiego elementu wynika istnienie takiej funkcji wtedy tylko, gdy przez element łuku wyznaczona jest linia najkrótsza pomiędzy dwoma punktami.

5. Do str. 6 (118). Lie (l. c.) powiada, że tu po raz pierwszy zostało przez Riemanna wprowadzone ogólne pojęcie odległości (funkcji odległościowej) w prze-strzeni n -wymiarowej. O tej funkcji przyjmuje Riemann, że jako funkcja zmien-nych $x_1, x_2, \dots, x_n$ w otoczeniu układu $x_1^0, \dots, x_n^0$ rośnie na wszystkie strony, t.j. posiada dla $x, = x^0$ wartość najmniejszą; przyjmuje dalej, że jej pochodne pierwsza i druga są skończone dla $x, = x^0$. Przy tych założeniach jest $d\Omega$ równe zero dla $x, = x^0$, druga zaś różniczka

$$d^2\Omega = \sum_{i,j}^{1\dots n} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_i \partial x_j} \partial x_i \partial x_j,$$

po podstawieniu wartości x^0 ze x , nie staje się ujemną dla żadnego układu przyro-stów. Riemann ogranicza się tu do przypadku, w którym ta różniczka jest formą kwadratową stale dodatnią różniczek $dx_1, \dots, dx_n$. Jeżeli ds oznacza element łuku w punkcie $x_1^0, \dots, x_n^0$, to kwadrat tego elementu może się różnić od wyrażenia

$$\sum_{i,j}^{1\dots n} \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_i \partial x_j} \right]_{x=x^0} dx_i dx_j$$

tylko czynnikami stałym, zależnym od $x_1^0, \dots, x_n^0$, a więc element łuku w punkcie dowolnym $x_1 \dots x_n$ wyrazi się równaniem postaci

$$ds^2 = \sum_{i,j}^{1 \dots n} b_{ij}(x_1, \dots, x_n) dx_i dx_j,$$

gdzie b_{ij} są funkcje rzeczywiste, których wyznacznik nie znika tożsamościowo i gdzie strona prawa dla ogólnych wartości $x_1, \dots, x_n$ jest funkcją stale dodatnią różniczek $dx_1, \dots, dx_n$.

To wyrażenie pozwala na zastosowanie Rachunku warjacyjnego i wtedy okaże się, że pomiędzy każdymi dwoma punktami, leżącymi wewnątrz pewnego obszaru, jest możliwa jedna i tylko jedna linia najkrótsza, należąca całkowicie do tego obszaru. Nadto jest rzeczą jasną, że przez każdy punkt $x_1, x_2, \dots, x_n$ przechodzi tylko jedna linia najkrótsza, mająca element liniowy $dx_1 : dx_2 : \dots : dx_n$, przez ten punkt przechodzący.

6. Do str. 8 (120) (Wł. G.). Kwadrat elementu liniowego przedstawia wzór na ds^2 w przypisie 5. Warunek, by linie wychodzące z danego punktu były najkrótsze, wyraża się, jak wiadomo, analitycznie równaniem

$$\delta \int_0^s ds = \delta \int_0^s \sqrt{\sum b_{ij} dx_i dx_j} = 0,$$

które powiada, że warjacja długości linii, jeśli ona ma być najkrótsza, powinna być zerem. Z warunku tego wynikają równania różniczkowe linii najkrótszych w ten sposób:

$$\begin{aligned} \delta \int_0^s \sqrt{\sum b_{ij} dx_i dx_j} &= \int_0^s \frac{\sum_{i,j} \delta b_{ij} dx_i dx_j + 2 \sum b_{ij} dx_i \delta dx_j}{2 ds} \\ &= \sum_{i,j} \left\{ \left(\delta b_{ij} \frac{dx_i}{ds} \right)_1 (\delta x)_1 - \left(b_{ij} \frac{dx_i}{ds} \right)_0 (\delta x)_0 \right\} \\ &+ \int_0^s \left\{ \frac{ds}{2} \sum_{i,j} \delta b_{ij} \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_j}{ds} - \sum_{i,j} dx_j d \left(b_{ij} \frac{dx_i}{ds} \right) \right\} = 0. \end{aligned}$$

Z przyczyny, że $(\delta x)_1 = (\delta x)_0$, otrzymuje się

$$\frac{ds}{2} \sum_{i,j} \delta b_{ij} \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_j}{ds} = \sum_{i,j} \delta x_j d \left(b_{ij} \frac{dx_i}{ds} \right);$$

rozwijając zaś warjację δb_{ij} i porównując współczynniki każdej z warjacji δx_m ($m = 1, 2, 3, \dots, n$) otrzymamy n równań kształtu:

$$(c) \quad \frac{ds}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_m} \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_j}{ds} = d \sum_i b_{im} \frac{dx_i}{ds}.$$

Załóżmy teraz $c_i = \left(\frac{dx_i}{ds} \right)_0$, rozumiejąc przez drugą stronę wartość początkową stoku ilości dx_i i ds dla $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Ponieważ, gdy znany jest kierunek początkowy linii najkrótszej i jej długość, to położenie punktu na niej znajdującego się jest oznaczone, przeto zmiennymi niezależnymi są teraz ilości c_i i s .

Wprowadzając te nowe zmienne, położmy $y_i = c_i s$, i ponieważ przy różniczkowaniach, jakie poniżej wykonywać się będą, będziemy się posuwali wzdłuż linii najkrótszej, przeto ilością zmienną będzie wtedy s . Przy tych nowych zmiennych równania (a) i (c) przechodzą w następujące:

$$(a') \quad ds^2 = \sum_{i,j} a_{ij} dy_i dy_j$$

$$(c') \quad \frac{ds}{2} \sum_{i,j} \frac{da_{ij}}{dy_m} c_i c_j = d \sum_i a_{im} c_i,$$

gdzie a_{ij} są wartości współczynników przy nowych zmiennych.

Zakładając s nieskończenie małym, rozwijając a_{ij} według szeregu Taylora i poprzestając w tem rozwinięciu na wyrazach rzędu drugiego, mieć będziemy:

$$a_{ij} = (a_{ij})_0 + \sum_k \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial y_k} \right)_0 y_k + \frac{1}{2} \sum_{k,l} \left(\frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial y_k \partial y_l} \right)_0 y_k y_l.$$

Wartości te wprowadzone do równania (c') zamieniają je, po wykonaniu przedtem wskazanego różniczkowania i po pomnożeniu następnie obu stron przez s^2 , na następujące:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \sum_{i,j} \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial y_m} \right)_0 y_i y_j + \frac{1}{2} \sum_{i,j} y_i y_j \sum_k \left(\frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial y_k \partial y_m} \right)_0 y_k \\ &= \sum_i y_i \sum_k \left(\frac{\partial a_{im}}{\partial y_k} \right)_0 y_k + \sum_i y_i \sum_{k,l} \left(\frac{\partial^2 a_{im}}{\partial y_k \partial y_l} \right)_0 y_k y_l. \end{aligned}$$

Ponieważ te równania mają miejsce przy wszelkich nieskończenie małych wartościach y , to porównanie obu stron doprowadza do następujących związków:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial y_m} \right)_0 &= \left(\frac{\partial a_{im}}{\partial y_j} \right)_0 + \left(\frac{\partial a_{jm}}{\partial y_i} \right)_0, \\ 2 \left\{ \left(\frac{\partial^2 a_{ik}}{\partial y_l \partial y_m} \right)_0 + \left(\frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial y_m \partial y_k} \right)_0 + \left(\frac{\partial^2 a_{im}}{\partial y_k \partial y_l} \right)_0 \right\} \\ &= \left(\frac{\partial^2 a_{im}}{\partial y_i \partial y_k} \right)_0 + \left(\frac{\partial^2 a_{mk}}{\partial y_i \partial y_l} \right)_0 + \left(\frac{\partial^2 a_{kl}}{\partial y_i \partial y_m} \right)_0 \end{aligned}$$

Przestawiając w pierwszej z tych równości dwa znaczki m, j i dodając otrzymane równania odpowiednimi stronami, znajdziemy:

$$(d) \quad \left(\frac{\partial a_{jm}}{\partial x_i} \right)_0 = 0.$$

Przestawiając zaś dwa znaczki i, k w drugiej z powyższych równości i dodając je odpowiednimi stronami, dochodzi się łatwo do związku:

$$S = 3 \left\{ \left(\frac{\partial^2 a_{im}}{\partial y_i \partial y_k} \right)_0 - \left(\frac{\partial^2 a_{ik}}{\partial y_i \partial y_m} \right)_0 \right\},$$

gdzie S oznacza sumę sześciu pochodnych

$$\frac{\partial^2 a_{ik}}{\partial y_i \partial y_m}, \frac{\partial^2 a_{il}}{\partial y_m \partial y_k}, \frac{\partial^2 a_{im}}{\partial y_k \partial y_l}, \frac{\partial^2 a_{lm}}{\partial y_i \partial y_k}, \frac{\partial^2 a_{mk}}{\partial y_l \partial y_i}, \frac{\partial^2 a_{kl}}{\partial y_i \partial y_m}.$$

Na mocy własności, że suma nie zmienia się przy przestawieniu znaczków l, m ze znaczkami i, k znajdujemy łatwo:

$$(e) \quad \left(\frac{\partial^2 a_{lm}}{\partial y_i \partial y_k} \right)_0 = \left(\frac{\partial^2 a_{ik}}{\partial y_l \partial y_m} \right)_0$$

a że stąd $S = 0$, więc przy pomocy drugiej z równości, z których wyszliśmy, dochodzimy do związku:

$$(f) \quad \frac{\partial^2 a_{ik}}{\partial y_i \partial y_m} + \frac{\partial^2 a_{il}}{\partial y_m \partial y_k} + \frac{\partial^2 a_{im}}{\partial y_k \partial y_l} = \frac{\partial^2 a_{lm}}{\partial y_i \partial y_k} + \frac{\partial^2 a_{mk}}{\partial y_l \partial y_i} + \frac{\partial^2 a_{kl}}{\partial y_i \partial y_m} = 0.$$

Podstawiając rozwinięcie a_{ij} w wyrażenie kwadratu elementu, znajdujemy:

$$ds^2 = \sum_{ij} (a_{ij}) dy_i dy_j + \sum_{i,j,k} \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial y_k} \right)_0 y_k dy_i dy_j + \frac{1}{2} \sum_{i,j,k,l} \left(\frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial y_k \partial y_l} \right)_0 y_k y_l dy_i dy_j$$

Jeżeli w miejsce y położymy tymczasowo δy i umówimy się, że warjacje $ddy, \delta dy, \delta \delta y$ i $\delta \delta y$ są zerem, to ostatni wyraz powyższego rozwinięcia przedstawić można pod dwiema postaciami

$$\frac{1}{2} d \delta \sum_{ij} a_{ij} \delta y_i \delta y_j = \frac{1}{2} \delta \delta \sum_{ij} a_{ij} dy_i dy_j,$$

gdzie, po wykonaniu różniczkowań, należy podstawić za pochodne cząstkowe ich wartości początkowe. Na tej zasadzie i przy pomocy związku (f) znajdziemy także

$$d \delta \sum_{ij} a_{ij} \delta y_i \delta y_j + 2 d \delta \sum_{ij} a_{ij} dy_i dy_j = 0,$$

skąd wypadnie:

$$d \delta \sum_{ij} a_{ij} \delta y_i \delta y_j = \frac{1}{2} \left\{ d \delta \sum_{ij} a_{ij} \delta y_i \delta y_j - 2 d \delta \sum_{ij} a_{ij} dy_i \delta y_j + \delta \delta \sum_{ij} a_{ij} dy_i dy_j \right\},$$

co można, po wykonaniu wspomnianych działań i przy pomocy równości (c), sprowadzić do formy następującej:

$$\frac{1}{2} \sum_{i,k,j,l} \left(\frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial y_i \partial y_l} \right)_0 (dy_i \delta y_k - \delta y_l dy_i) (dy_j \delta y_l - \delta y_j dy_l),$$

gdzie sumę należy rozciągnąć do wszystkich różnych par znaczków ik, jl .

Uwzględniając więc w rozwinięciu kwadratu elementu otrzymamy teraz wypadek i równości (i) oraz przywracając ilościom δy ich pierwotne znaczenie y , znajdujemy:

$$(g) \quad ds^2 = ds_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,l,j,k} \left(\frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial y_k \partial y_l} \right)_0 (y_k dy_i - y_l dy_k) (y_l dy_j - y_j dy_l),$$

gdzie

$$(h) \quad ds_0^2 = \sum_{ij} (a_{ij})_0 dy_i dy_j.$$

Ponieważ we wzorach (g) i (h) współczynniki są ilościami stałymi, przeto istnieją takie podstawienia linijowe o stałych współczynnikach, przy pomocy których początkowa wartość kwadratu elementu linijnego daje się sprowadzić do formy Σdx^2 , przyczem wyraz następującego rzędu w rozwinięciu wyrażenia ds^2 nie ulegnie zmianie kształtu, tak że przy tych nowych zmiennych napisać go będzie można:

$$\frac{1}{2} \sum_{i,k,j,l} \left(\frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} \right)_0 (x_k dx_i - x_i dx_k) (x_l dx_j - x_j dx_l),$$

jeżeli by nie wprowadzać nowych oznaczeń, umówimy się, aby ilości $\left(\frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} \right)$ przedstawiały wartości odpowiednich współczynników w tem nowym przekształceniu.

Kwadrat trójkąta mającego wierzchołki w punktach $(0, 0, 0 \dots)$, x_1 , $(x_2, x_3 \dots)$, $(dx_1, dx_2, dx_3 \dots)$ wyraża się wtedy w sposób następujący:

$$\frac{1}{2} \sum_{ij} (x_i dx_j - x_j dx_i)^2.$$

Dzieląc poprzednie wyrażenie przez ostatnie i mnożąc otrzymamy wynik przez $-\frac{3}{4}$, otrzymujemy wyrażenie:

$$\alpha = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\sum_{i,k,j,l} \left(\frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} \right)_0 (x_k dx_i - x_i dx_k) (x_l dx_j - x_j dx_l)}{\sum_{ij} (x_i dx_j - x_j dx_i)^2}$$

któremu można jeszcze nadać postać:

$$\begin{aligned} (i) \quad a &= \sum A_{ij, ij} m_{ij}^2 + 2 \sum A_{ij, kl} m_{ij} m_{kl}, \\ \text{jeżeli położymy} \quad A_{ij, ij} &= \frac{1}{2} \left\{ 2 \left(\frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} \right)_0 - \left(\frac{\partial^2 a_{ii}}{\partial x_j^2} \right)_0 - \left(\frac{\partial^2 a_{jj}}{\partial x_i^2} \right)_0 \right\} \\ (k) \quad A_{ij, kl} &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial x_i \partial x_k} \right)_0 + \left(\frac{\partial^2 a_{kl}}{\partial x_i \partial x_j} \right)_0 - \left(\frac{\partial^2 a_{ik}}{\partial x_j \partial x_l} \right)_0 - \left(\frac{\partial^2 a_{jl}}{\partial x_i \partial x_k} \right)_0 \right\}, \\ m_{ij} &= \frac{x_i dx_j - x_j dx_i}{\sqrt{\sum_{ij} (x_i dx_j - x_j dx_i)^2}}, \end{aligned}$$

i które jest równoważne temu, co Gauss nazwał miarą krzywizny. Aby to pokazać, przypuścimy, że element liniowy znajduje się na powierzchni $x_i x_j$, skąd już samo przez się wynika, że kwadrat tego elementu wyrazi się wzorem

$$a_{ii} dx_i^2 + 2 a_{ij} dx_i dx_j + a_{jj} dx_j^2.$$

Według teorii Gaussa miara krzywizny a_{ij} dla takiego przypadku otrzymuje się z wzoru

$$\begin{aligned} 4(a_{ii} a_{jj} - a_{ij}^2) a_{ij} &= a_{ii} \left[\frac{\partial a_{ii}}{\partial x_j} \frac{\partial a_{jj}}{\partial x_i} - 2 \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} + \left(\frac{\partial a_{jj}}{\partial x_i} \right)^2 \right] \\ + a_{jj} &\left[\frac{\partial a_{ii}}{\partial x_i} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial a_{ii}}{\partial x_j} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i} - 2 \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} \frac{\partial a_{ii}}{\partial x_j} + 4 \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} - 2 \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i} \right] \\ (l) \quad &+ a_{jj} \left[\frac{\partial a_{ii}}{\partial x_i} \frac{\partial a_{jj}}{\partial x_i} - 2 \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} + \left(\frac{\partial a_{ii}}{\partial x_i} \right)^2 \right] \\ &- (2 a_{ii} a_{jj} - a_{ij}^2) \left(\frac{\partial^2 a_{ii}}{\partial x_j^2} - 2 \frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 a_{jj}}{\partial x_i^2} \right). \end{aligned}$$

Podstawiając w tym wzorze za zmienne x zera, znajdziemy;

$$a_{ij} = \frac{1}{2} \left\{ 2 \left(\frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} \right)_0 - \left(\frac{\partial^2 a_{ii}}{\partial x_j^2} \right)_0 - \left(\frac{\partial^2 a_{jj}}{\partial x_i^2} \right)_0 \right\} = A_{ij, ij}$$

albowiem z powodu, że wartość początkowa kwadratu elementu liniowego ma kształt $\Sigma d x^2$, jest

$$(a_{ii})_0 = (a_{jj})_0 = \dots = 1,$$

$$(a_{ij})_0 = (a_{kl})_0 = \dots = 0$$

inne zaś uproszczenia wynikają z równania (d). Taki sam rezultat daje wzór (c), gdy w nim uwzględnimy wartość kwadratu elementu, do której zastosowaliśmy wzór Gaussa i widoczne jest, że, nadając znakowi ij wszystkie różne znaczenia, których jest $\frac{n(n-1)}{2}$, otrzymamy tyleż miar krzywiznowych, wyznaczających w uważanym

punkcie rozmaitości n -wymiarowej jej stosunki miarowe w $\frac{n(n-1)}{2}$ kierunkach powierzchniowych, tych samych, które przyjęliśmy za kierunki współrzędnych.

Sposób, użyty przez nas do pokazania tożsamości definicji miary krzywizny podanej przez Riemanna z taką definicją Gaussa, jest zupełnie różny od tego, który wykonał Dedekind według wskazań Riemanna (porówn. B. Riemann's Gesamm. Math. Werke; 1876 od str. 389 do 391). Nie jest on jednak mniej ogólny, albowiem kierunek powierzchniowy, oznaczony w formule Riemanna (i) ilościami m_{ij} jest tak samo dowolny, jak kierunek wzięty przez nas $x_i x_j$; jeżeli więc definicje Riemanna i Gaussa zgadzają się z sobą dla tego ostatniego kierunku, to nie są także w sprzeczności i dla każdego innego. Lecz podając ten sposób nierównie krótszy, nie mieliśmy na celu samego tylko uproszczenia kwestji. Chcieliśmy zarazem utworzyć drogę do wykazania niedokładności pomienionej definicji Riemanna w przypadku rozmaitości o więcej niż dwu wymiarach, i następnie do uzupełnienia tej definicji.

W rzeczy samej, trzymając się ściśle orzeczenia własnego Riemanna (patrz w tekście str. 8 (120) wiersz 11 od góry, od wyrazów „gdy więc i t. d.”), trudno jest zawyrokoować, iż dla wyznaczenia stosunków miarowych w danym punkcie rozmaitości wystarczy mieć miary krzywizny w $\frac{n(n-1)}{2}$ kierunkach powierzchniowych dowolnych, czy też konieczne jest je mieć w tyluż kierunkach w pewien sposób oznaczonych. Przyjąwszy za podstawę to pierwsze, można by za owe kierunki wziąć kierunki początkowe współrzędnych, i wtedy według tego, co wyżej było powiedziane, stosunki miarowe wyznaczyłyby się za pomocą $\frac{n(n-1)}{2}$ współczynników $A_{ij, ij}$, danych przez równanie (k). Lecz w takim razie następcza sama przez się wątpliwość, dotycząca znaczenia pozostałych współczynników $A_{ij, kl}$, które dla przyjętych teraz kierunków żadnej nie mają roli, podczas gdy dla kierunków innych, jak to formuła (l) wskazuje, posiadają rolę jednorodną ze współczynnikami $A_{ij, ij}$. Dla usunięcia tej wątpliwości należy definicję Riemanna uzupełnić jak następuje:

Poprowadźmy w punkcie $(0, 0, 0, \dots)$ n elementów liniowych w ten sposób względem siebie skierowanych, by przedłużone w linie najkrótsze utworzyły układ taki, w którym wartość początkowa kwadratu elementu liniowego ma kształt $\Sigma d x^2$, innymi słowy, by elementy te były wzajemnie do siebie prostopadłe. Każde dwa takie elementy wyznaczają w uważanym punkcie jeden kierunek powierzchniowy, dający się określić za pomocą $\frac{n(n-1)}{2}$ ilości m_{ij} (wzór (k)), a każdemu z tak utworzonych $\frac{n(n-1)}{2}$ kierunków powierzchniowych odpowiada w tym samym punkcie miara krzywizny α , dająca się wyznaczyć, według Riemanna za pomocą formuły (i). Jeżeli teraz pomyślimy, że układ niezmienny n takich elementów porusza się

około swego początku, to miary krzywizny α , odpowiadające $\frac{n(n-1)}{2}$ kierunkom powierzchniowym, również stale ze sobą połączonym, zmieniają się wówczas wraz z ilościami m_{ij} tak, że gdy np. położenie tego układu zgodzi się z położeniem w początku układu pierwotnego spólrzędnych, to ilości α przyjmą wartości współczynników $A_{ij, ij}$. Można pytać się także o takie położenie pomienionego układu, by miary krzywizny α , odpowiadające $\frac{n(n-1)}{2}$ kierunkom powierzchniowym, były, ogólnie mówiąc, maksimum lub minimum. Odpowiedź na to pytanie łatwa, bo znajduje się ją, szukając maksymów i minimów ilości α , uważanej za funkcję (wzór (1)) zmiennych m_{ij} . Stosując w tym celu dobrze znaną metodę, otrzymamy na wyznaczenie $\frac{n(n-1)}{2}$ maksymów i minimów λ funkcji α i im odpowiadających i wzajemnie do siebie prostopadłych tyłuż kierunków powierzchniowych $\frac{n(n-1)}{2}$ równań zawartych w jednym równaniu

$$\sum_{ij} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial m_{ij}} - 2\lambda m_{ij} \right) \delta m_{ij} = 0,$$

które ma miejsce przy wszelkich wartościach δm_{ij} . Tym $\frac{n(n-1)}{2}$ kierunkom powierzchniowym odpowiada n elementów liniowych, również wzajemnie do siebie prostopadłych w sposób, że każde dwa kierunki liniowe wyznaczają jeden kierunek powierzchniowy, któremu odpowiada miara krzywizny maksimum lub minimum λ . Tak więc w każdym punkcie rozmaiłości n -wymiarowej istnieje zawsze jeden i wogóle tylko jeden układ n kierunków liniowych wzajemnie do siebie prostopadłych, tworzący jednocześnie układ $\frac{n(n-1)}{2}$ kierunków powierzchniowych, mających w tym punkcie

miary krzywizny maksimum lub minimum. Otóż te miary i odpowiadające im kierunki powierzchniowe określają w uważanym punkcie stosunki miarowe rozmaiłości. Dla odróżnienia nazwiemy je miarami głównymi i kierunkami głównymi.

Miara krzywizny, analogiczna do głównej, w kierunku dowolnym będzie już teraz bardziej złożona niż według definicji Riemanna. Aby otrzymać kwadrat tej miary dla kierunku $x_i x_j$, należy zsumować kwadraty współczynników $A_{ij, kl}$ względem $\frac{1}{2} \frac{dx}{dm_{ij}}$, kierunek zaś tej miary nie zgadza się z kierunkiem powierzchniowym $x_i x_j$, jak to ma miejsce dla kierunku głównego, ale oznacza się stosunkami pomienionych współczynników $A_{ij, kl}$ do wielkości miary.

Jeżeli rozmaiłość jest ciągła, to zbiór elementów powierzchniowych w całej rozmaiłości, odpowiadających jednoimiennemu kierunkowi głównemu, stanowi rozmaiłość dwuwymiarową, którą nazwiemy powierzchnią główną. Miara krzywizny powierzchni głównej jest wszędzie do niej normalna. Według tego wszelka rozmaiłość n -wymia-

rową uważać można jako utwór jedynego układu $\frac{n(n-1)}{2}$ familij powierzchni głównych, $\frac{n(n-1)}{2}$ -krotnie prostopadłych i posiadających miary krzywizny normalne. W rozmaiłości o krzywiznie stałej we wszystkich kierunkach i w każdym punkcie wszystkie krzywizny główne są równe. W takiej więc rozmaiłości jest nieskończenie wiele między sobą tożsamościowych układów $\frac{n(n-1)}{2}$ familij powierzchni głównych. Formuła dana poniżej (str. (11), (122)), przedstawiająca długość elementu liniowego takiej rozmaiłości, odnosi się do jednego z takich układów.

7. Do str. 9 (120). Do metryki rozmaiłości wprowadził przed niedawnym czasem prof. T. Levi-Civita bardzo ważne nowe pojęcie równoległości, będące uogólnieniem równoległości euklidesowej, i na podstawie tego pojęcia utworzył nową teorię geometryczną krzywizny riemannowskiej¹⁾. Oto definicje i główne wyniki tej teorii.

Dla scharakteryzowania równoległości dwóch kierunków (α) i (α') , wychodzących z dwóch punktów P i P' nieskończenie bliskich w rozmaiłości V_n , pomyślimy, że ta rozmaiłość jest zanurzona w przestrzeni Euklidesowej S_N o dostatecznie wysokiej liczbie N wymiarów i wyobraźmy sobie pewien kierunek (f) w tej przestrzeni, wychodzący z punktu P . Równoległość zwykła w takiej przestrzeni polegałaby na tem, że kąt pomiędzy (f) i (α) równałby się kątowi pomiędzy (f) i (α') dla jakiegokolwiek f . Otóż równoległość w rozmaiłości V_n określa się przez wymaganie, by warunek powyższy spełniał się dla wszystkich kierunków (f) , należących do rozmaiłości V_n .

Rozmaiłość V_n odnieśmy do spólrzędnych $x_1, x_2, \dots, x_n$ i niechaj $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ będą przyrosty spólrzędnych przy przejściu od P do P' ; $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots, \xi^{(n)}$ niechaj będą parametry, należące do kierunku (α) , wychodzącego z punktu P ; $\xi^{(1)} + d\xi^{(1)}, \xi^{(2)} + d\xi^{(2)}, \dots, \xi^{(n)} + d\xi^{(n)}$ — parametry, należące do kierunku (α') , wychodzącego z punktu P' . Warunek równoległości wyraża się przy pomocy n równań:

¹⁾ Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e conseguente specificazione della curvatura riemanniana. Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, 1917. T. 42. s. 172—204.

„Questions de mécanique classique et relativista; „Conferència III. Parallelisme i curvatura en una varietat qualsevol. s. 81—117. Institut d'estudis Catalans. Barcelona.

Fr. Severi. Sulla curvatura delle superficie e varietà. Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. 1917. T. 42. s. 227—259.

Hermann Weyl, Raum-Zeit-Materie. Vierte Auflage 1921. s. 100.

Luigi Bianchi, Le reti di Tchebychef sulle superficie ed il parallelismo nel senso di Levi-Civita, Bullettino della Unione matematica italiana, Ottobre 1922, s. 1—6.

$$d\xi^{(i)} + \sum_{j=1}^{1 \dots n} \binom{j}{i} d\xi_j \xi^{(i)} = 0, \quad (i = 1, 2, 3, \dots n)$$

gdzie $\binom{j}{i}$, $i = 1, 2, 3 \dots n$ są znane symbole Christoffela.

Jeżeli $x_1 = x_1(s)$, $x_2 = x_2(s) \dots$, $x_n = x_n(s)$ są równania parametryczne pewnej krzywej C , wtedy w równaniach (1) dla krzywej tej z równań (1) otrzymamy układ następujący

$$\frac{d\xi^{(i)}}{ds} + \sum_{j=1}^{1 \dots n} \binom{j}{i} \frac{dx_j}{ds} \xi^{(i)} = 0 \quad (i = 1, 2, 3 \dots n)$$

Stąd wynikają następujące wnioski geometryczne:

1°. Kierunek równoległy w punkcie P do kierunku (α) , wychodzącego z punktu P_0 , zależy w ogólności od drogi, którą przechodzimy od punktu P_0 do punktu P . Niezależność od drogi jest cechą wyłączną rozmaitości euklidesowych.

2°. Wzdłuż tej samej linii geodezyjnej kierunki stycznych są równoległe.

3°. Przeniesienie dwóch kierunków przy pomocy równoległości wzdłuż jakiegokolwiek drogi nie zmienia ich kąta. Stąd wynika, że wzdłuż linii geodezyjnych kierunki równoległe są zawsze równo nachylone do tej linii geodezyjnej.

Niechaj PQ będzie łukiem linii geodezyjnej w rozmaitości V_n . Z punktów P i Q wyobraźmy sobie poprowadzone dwie inne linie geodezyjne w kierunkach równoległych; tworzą one z linią geodezyjną ten sam kąt ϕ . Weźmy na tych geodezyjnych łuki równe $PP' = QQ' = ds$ i połączmy punkty P' i Q' łukiem linii geodezyjnej. Otrzymamy wtedy czworokąt geodezyjny, który Levi-Civita nazywa paralelogrammoidem; PQ i $P'Q'$ są podstawami tego czworokąta.

Otóż, jeżeli w rozmaitości V_n zbudujemy nieskończenie mały parallelogrammoid $PQ P'Q'$ i weźmiemy stosunek różnicy kwadratów dwóch jego podstaw do kwadratu jego pola, to stosunek ten

$$K = \frac{PQ^2 - P'Q'^2}{(ds \delta s \sin \phi)^2}$$

stanowi krzywiznę riemannowską rozmaitości V_n w punkcie P w kierunku powierzchniowym parallelogrammoidu.

7. Do str. 120, ustęp ostatni № 2 (Wl. G.). Jeżeli element liniowy wyraża się pierwiastkiem czwartego stopnia z wyrażenia różniczkowego czwartego rzędu, wtedy będzie:

$$ds^2 = \sqrt{\sum_{ij,kl} a_{ijkl} dx_i dx_j dx_k dx_l}$$

lub także

$$ds^2 = \sum_i dx_i^2 + \left(\sqrt{\sum_{ij,kl} a_{ijkl} dx_i dx_j dx_k dx_l} - \sum_i dx_i^2 \right),$$

gdzie wyraz znajdujący się w nawiasie musi, ogólnie mówiąc, pozostać wymiaru drugiego, co tłumaczy łatwo powyższe miejsce w tekście. Można prztem zauważyć, że ponieważ stosunek wyrażu w nawiasie do kwadratu nieskończenia małego trójkąta, mającego wierzchołki w punktach $(0, 0, 0 \dots)$, $(x_1, x_2, x_3, \dots)$, $(dx_1, dx_2, dx_3, \dots)$, jest nieskończenie wielki drugiego rzędu, przeto biorąc ten stosunek za miarę krzywizny, przyszlizbyśmy do wniosku, że rozmaitości tego rodzaju mają w każdym punkcie krzywiznę nieskończenie wielką, i to jest powód dla którego autor nazwał rozmaitości poprzednio traktowane płaskimi w częściach najmniejszych.

8. Str. 125; wiersz 13 i następ. Wynika to ze znanego twierdzenia Gaussa, że krzywizna całkowita trójkąta utworzonego z linii najkrótszych na powierzchni tak się ma do powierzchni kuli, jak przewyżka sumy trzech kątów trójkąta nad dwa proste do ośmiu kątów prostych.

9. Str. 122. Wzór w ustępie ostatnim (Wl. G.).

Dla udowodnienia tego wzoru przyjmijmy za układ współrzędnych układ $\frac{n(n-1)}{2}$ -krotnie do siebie prostopadłych powierzchni głównych. Wartość początko-

wa kwadratu elementu liniowego wyrazi się wtedy sumą $\sum dx^2$. Oznaczmy przez r odległość punktu jakiegokolwiek od początku współrzędnych, rachowaną na linii najkrótszej, na której oba znajdują się, a przez γ_i n ilości, określających kierunek początkowy tejże linii. Ilości γ_i mają te same wartości wzdłuż całej długości r i zadość czynią warunkowi $\sum \gamma_i^2 = 1$. Współrzędne tego samego punktu odnośnie do przyję-

tego układu powierzchni głównych wyrażą się ilościami $x_i = \gamma_i \rho$, rozumiejąc przez ρ funkcję zmiennej r , zamieniającą się na r dla r nieskończenia małego.

Pozostawiając ten sam początek, weźmy inny układ tożsamościowy z teraźniejszym, co jest zawsze możliwe z przyczyny, że krzywizna rozmaitości jest stała, i oznaczmy współrzędne punktu x_s w tym nowym układzie, przez x'_s . Formuły, służące do przejścia od układu pierwszego do drugiego, zawierają się w następującej:

$$x_i = \sum_k c_{ik} x'_k,$$

rozumiejąc przez c_{ik} n^2 ilości stałych, czyniących zadość związkom:

$$\sum_i c_{ik}^2 = 1, \quad \sum_i c_{ki} c_{li} = 0;$$

skoro bowiem układy są między sobą tożsamościowe, to przejście od jednego do drugiego powinno się dokonać za pomocą podstawień liniowych o współczynnikach stałych, prostokątność zaś w obu układach wymaga przytoczonych związków pomiędzy temi stałemi.

Przyjętemu układowi odpowiadają oczywiście dwa niezmienniki

$$\sum x^2 = \sum x'^2 = \rho^2 \quad \text{i drugi} \quad \sum dx^2 = \sum dx'^2,$$

a że kwadrat elementu liniowego w rozmaitości o krzywiznie stałej i w spólrzędnych głównych powinien być także niezmiennikiem, przeto kwadrat ten musi mieć formę

$$\varepsilon \sum dx^2, \text{ rozumując przez } \varepsilon \text{ funkcję samego } \rho.$$

Celem znalezienia tej funkcji poprowadźmy przez linię najkrótszą r i przez linię, będącą przedłużeniem elementu liniowego $ds = \sqrt{\varepsilon \sum dx^2}$, powierzchnię i pomysłmy w tej powierzchni układ spólrzędnych, analogiczny do powyższego o wspólnym z nim początku. Oznaczając w tym nowym układzie przez ξ_1 i ξ_2 spólrzędne punktu, z którego element ds wychodzi, mieć będziemy

$$\xi_1 = \rho \cos \varphi, \quad \xi_2 = \rho \sin \varphi,$$

gdzie φ oznacza kąt, który kierunek początkowy linii najkrótszej r tworzy z kierunkiem początkowym linii $\xi_2 = 0$. Kwadrat elementu liniowego wyrazi się wtedy formułą

$$\varepsilon (d\xi_1^2 + d\xi_2^2).$$

Stosując do tej ostatniej formuły (i) Gaussa (przyp. 6), na wyznaczenie funkcji ε znajdziemy równanie

$$2\alpha\varepsilon^3 = \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\xi_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\xi_2}\right)^2 - \varepsilon \left(\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial\xi_1^2} + \frac{\partial^2\varepsilon}{\partial\xi_2^2}\right),$$

które przy pomocy spólrzędnych ρ i φ przechodzi w następujące:

$$2\alpha\varepsilon^3 = \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\varphi}\right)^2 - \varepsilon \left(\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2\varepsilon}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial\varepsilon}{\partial\varphi}\right).$$

Ponieważ funkcja ε nie powinna zależeć od kąta φ , przeto równanie poprzedzające redukuje się do następującego

$$2\alpha\varepsilon^3 = \left(\frac{d\varepsilon}{d\rho}\right)^2 - \varepsilon \left(\frac{d^2\varepsilon}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\varepsilon}{d\rho}\right),$$

które, po założeniu $\varepsilon = \frac{1}{\omega^2}$, przybiera postać:

$$\alpha\rho = \omega \left(\rho \frac{d^2\omega}{d\rho^2} + \frac{d\omega}{d\rho} \right) - \rho \left(\frac{d\omega}{d\rho} \right)^2$$

Całka ogólna tego ostatniego równania ma postać:

$$\omega = \alpha\rho^{2-b} + \frac{\alpha\rho^b}{4(b-1)^2 a},$$

gdzie a i b są dwie stałe dowolne. Stałe dowolne wyznaczmy z warunku, że dla

$\rho = 0$ powinno być ε , a tem samei i ω , równe 2. Temu można uczynić zadość, kładąc albo $b = 2$, $a = 1$, albo też $b = 0$, $a = \frac{\alpha}{4}$. W obu razach otrzymuje się:

$$\omega = 1 + \frac{\alpha\rho^2}{4},$$

a stąd

$$\varepsilon = \frac{1}{\left(1 + \frac{\alpha}{4}\rho^2\right)^2}.$$

Jeżeli za ρ^2 przywrócimy wartość $\sum x^2$ wyżej założoną, to otrzymamy na długość elementu liniowego

$$ds = \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{4}\sum x^2} \sqrt{\sum dx^2}.$$

t. j. wzór Riemanna.

W celu znalezienia funkcji ρ zmiennej r , uważamy, że, zakładając wszystkie $\gamma_i = 0$ z wyjątkiem jednego $\gamma_i = 1$, mamy również wszystkie x równe 0 z wyjątkiem jednego $x_i = \rho$. Kierunkowi temu odpowiada oczywiście linia najkrótsza r , której długość elementu ds wyrazi się, na mocy otrzymanego teraz wzoru, wzorem

$$\frac{d\rho}{1 + \frac{\alpha\rho^2}{4}}.$$

Jest przeto

$$r = \int_0^r ds = \int_0^r \frac{d\rho}{1 + \frac{\alpha\rho^2}{4}} = \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \arctg \frac{\sqrt{\alpha}\rho}{2},$$

a stąd

$$\rho = \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{\alpha}r}{2}$$

i następnie:

$$x_i = \frac{2\gamma_i}{\sqrt{\alpha}} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{\alpha}r}{2}.$$

10. (Do tego samego ustępu co w przyp. 9). Podamy jeszcze inny dowód wzoru Riemanna, zakomunikowany nam przez H. Webera (w owym czasie profesora w Królewcu).

(H. W.). Jeżeli we wzorze

$$1 = \sum_{ij} b_{ij} \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_j}{ds}$$

wynikającym z wzoru

$$ds^2 = \sum_{ij} b_{ij} dx_i dx_j, \quad b_{ij} = b_{ji},$$

wprowadzimy wartości początkowe $\left(\frac{dx_i}{dx_s}\right)_0$ równa x_i , to oznaczając przez b_{ij} wartości początkowe ilości b_{ij} , mieć będziemy równanie

$$\sum_{ij} b_{ij}^0 c_i c_j = 1;$$

Za pomocą podstawienia linowego ze współczynnikami stałymi sprowadzimy to ostatnie do formy

$$\sum_i \gamma_i^2 = 1$$

położmy $\xi_i = \rho \gamma_i$ tak że ilości γ wzdłuż jednej linii najkrótszej są stałe, ρ zaś oznacza funkcję zmiennej r , która dla nieskończenie małych wartości r jest równa r .

Uważamy teraz te linie najkrótsze, dla których γ_i i γ_j są różne od zera, gdy pozostałe γ są zerami. Wtedy tworzą one powierzchnię, która nadaje się do przedstawienia w naszej przestrzeni trójwymiarowej i która posiada stałą krzywiznę. Można więc do niej zastosować metodę Gaussa. Jeżeli φ oznacza kąt, jaki początkowy element jednej z tych linii najkrótszych tworzy z elementem początkowym $\xi_j = 0$, to $\gamma_i = \cos \varphi$, $\gamma_j = \sin \varphi$ i według Gaussa (Disquisitiones supra superf. curvas, Art. 19) dla dowolnego elementu linowego, znajdującego się na uważanej powierzchni, mamy:

$$ds^2 = dr^2 + m^2 d\varphi^2,$$

$$\alpha = -\frac{1}{m} \frac{dm}{dr},$$

gdzie $m = 0$ i $\frac{dm}{dr} = 1$ dla $r = 0$. Stąd dla stałego α otrzymujemy

$$m = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sin r \sqrt{\alpha}.$$

Zakładając

$$ds^2 = \varepsilon (d\xi_1^2 + d\xi_2^2) = \varepsilon d\rho^2 + \varepsilon \rho^2 d\varphi^2,$$

znajdujemy za pomocą prostego rachunku

$$\rho = \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} r \sqrt{\alpha}$$

i następnie

$$ds = \frac{\sqrt{d\xi_1^2 + d\xi_2^2}}{1 + \frac{\alpha}{4} (\xi_1^2 + \xi_2^2)}.$$

Dowiedliśmy więc wzoru Riemanna dla takiego elementu linowego, który leży na powierzchni, dla której pozostałe ξ są zerami. Lecz ponieważ wzór ten nie zmienia swojej formy, jeżeli w miejsce ilości ξ lub, co na jedno wychodzi, w miejsce ilości γ wprowadzimy dowolne podstawienia linowe ortogonalne, więc stąd wynika ogólna jego prawdziwość.

11. Do str. (18), 125. Głębokie myśli, wyrażone przez Riemanna w ostatnich ustępach niniejszej rozprawy, były niejako przecuciem wieszchem — tak wyraża się o nich H. Weyl w nowym jej wydaniu¹⁾ — tych przeobrażeń, jakich w poglądach na podstawy Fizyki, a zwłaszcza na istotę grawitacji, dokonała ogólna Teoria względności Einsteina. Wyrażenie elementu linowego rozmaitości Riemannowskiej, dane w postaci

$$ds^2 = \sum_{\mu, \nu} g_{\mu, \nu} dx_{\mu} dx_{\nu},$$

badania nad przekształceniem form różniczkowych kwadratowych, które zawdzięczamy Christoffelowi,²⁾ a zwłaszcza Rachunek różniczkowy bezwzględny, (t.j. niezależny od układu współrzędnych, którego twórcami są Ricci i Levi-Civita³⁾ — oto środki i narzędzia, przy których pomocy rozwija się część matematyczna teorii Einsteina.⁴⁾

¹⁾ H. Riemann, „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen“. Neu herausgegeben und erläutert von H. Weyl, Zweite Auflage Berlin, 1921. str. IV.

²⁾ Über die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades. Journal für die reine und angewandte Mathematik, T. 70 (1869).

³⁾ Metody Rachunku różniczkowego bezwzględnego i ich zastosowania. Prace matematyczno-fizyczne t. 12 (1901) str. 11—94.

⁴⁾ Strona matematyczna i fizyczna ogólnej teorii grawitacji są wyłożone między innymi w następujących pracach:

Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation. I. Physikalischer Teil von Albert Einstein, II. Mathematischer Teil von Marcel Grossmann, Leipzig und Berlin 1913.

Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie von A. Einstein, Leipzig, 1916. Raum-Zeit-Materie. Vorlesungen über allgemeine Relativitätstheorie von Hermann Weyl, Vierte Auflage, Berlin 1921.