D. MENCHOFF.

Sur un ensemble des lignes cantoriennes.

(O mnogości linij Cantora).

Appelons C-courbe toute ligne cantorienne[1] située dans un plan, qui ne peut être regardée comme une courbe de M. Jordan (simple ou non). Dans cette Note nous allons démontrer l'existence d'un ensemble non dénombrable des C-courbes situées dans le même plan et n'ayant pas de points communs.

Soit $\overline{AB}$ un segment rectiligne quelconque situé dans un plan π (fig. A) et soit P un ensemble parfait linéaire, non dense dans aucun segment, compris dans $\overline{AB}$ et ayant ses extrémités aux points A et B. Désignons par

$$u_{01}, u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{21}, u_{22}, u_{23}, u_{24}, \ldots\ldots, u_{ik}, \ldots\ldots,$$

$1 \leqslant k \leqslant 2^i$, $i=0, 1, 2, 3, \ldots\ldots$, les segments contigus à l'ensemble P. Comme il est bien connu, on peut supposer les segments u_{ik} numérotés de telle façon que les distances du point A aux segments u_{ik} croissent avec k, pour i fixe, et qu' entre deux segments consécutifs u_{ik}, $u_{i,k+1}$, $0 \leqslant k \leqslant 2^i$,[2] soit compris un et un seul segment $u_{i'k'}$, $i' < i$.

Menons, dans le plan π, de tous les poins x de l'ensemble P les segments $p^{(x)}$, de longueur 1, perpendiculaires à AB et ayant la même direction. Considérons les domaines

$$T_{01}, T_{11}, T_{12}, T_{21}, T_{22}, T_{23}, T_{24}, \ldots\ldots, T_{ik}, \ldots\ldots,$$

$1 \leqslant k \leqslant 2^i$, $i=0, 1, 2, 3, \ldots\ldots$, limités respectivement par les contours

[1]) Zoretti, Leçons sur le prolongement analytique, p. 20.

[2]) Nous regardons les points A et B comme des segments dont les extrémités sont confondues, et nous les désignons respectivement par u_{i0} et $u_{i,2^i+1}$, quel que soit i.

$$M_{01}N_{01}N'_{01}M'_{01},\ M_{11}N_{11}N'_{11}M'_{11},\ M_{12}N_{12}N'_{12}M'_{12},\ \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots,\ M_{ik}N_{ik}N'_{ik}M'_{ik},\ \ldots\ldots,$$

dont les positions sont indiquées sur la fig. A. On voit que le domaine T_{01} se compose de trois bandes curvilignes pointillées et de parties des domaines T_{11} et T_{12} comprises entre ces bandes pointillées. De même, chacun des deux domaines T_{11} et T_{12} se compose de deux bandes à petites mailles carrées et d'une partie du domaine T_{21} (dans le cas de T_{11}) ou T_{23} (dans le cas de T_{12}) comprise entre elles. Enfin chacun des quatre domaines T_{21}, T_{22}, T_{23}, T_{24} est teinté en noir.

Nous supposerons que chacun des segments $M_{ik}N_{ik}$ est situé sur le prolongement du perpendiculaire $p(a_{ik})$ mené de l'extrémité gauche a_{ik} du segment u_{ik} et que la distance du point N_{ik} au segment AB ne dépend que du premier indice i et tend vers 1 pour $i\to\infty$. On suppose enfin que l'aire du domaine T_{ik} tend vers zéro avec $\frac{1}{i}$ indépendamment du second indice k et que la distance minima du bord supérieur $N_{ik}N'_{ik}$ du domaine T_{ik} au segment u_{ik} est inférieure à la longueur de ce segment, c'est-à-dire, tend aussi vers zéro avec $\frac{1}{i}$.

Nous dirons que le domaine T_{ik} est **engaîné** dans le domaine $T_{i'k'}$, si T_{ik} a la même position par rapport à $T_{i'k'}$ que les domaines T_{11}, T_{21}, T_{22}—par rapport à T_{01}, c'est-à-dire, si la partie droite du domaine T_{ik} est située à l'intérieur du domaine T_{ik} est située à l'intérieur du domaine $T_{i'k'}$. Il est clair que le domaine T_{ik} est engaîné dans $T_{i'k'}$, quand $i>i'$ et quand les segments correspondants u_{ik}, $u_{i'k'}$ possèdent les propriétés suivantes:

1. $u_{i'k'}$ est situé à droite de u_{ik}.
2. Il n'existe pas un troisième segment $u_{i''k''}$ situé entre les segments u_{ik}, $u_{i'k'}$ et dont le premier indice i'' est inférieur à i'.

On voit immédiatement que les domaines T_{ik} peuvent être rangés dans le tableau de la fig. B, où les flèches $\longleftrightarrow$, joignant deux domaines quelconques $T_{i'k'}$ et $T_{i''k''}$, $i'>i''$, indiquent que $T_{i''k''}$ est le domaine ayant le plus grand premier indice de tous les domaines T_{ik} tels que $T_{i'k'}$ est engaîné dans T_{ik}.

Soit x un point quelconque de second espèce de l'ensemble P, distinct des points A et B. Nous dirons que le segment $u_{i'k'}$ a une **position principale** entre le point x et un autre segment $u_{i''k''}$, situé à droite de x, si le premier indice i' de ces segment à la plus petite valeur parmi tous les indices i correspondant aux segments u_{ik} situés entre le point x et le segment

[1]) Nous regardons, comme plus haut, le point B, comme le segment $u_{i,2i+1}$, $i=0,1,2,3\ldots\ldots$, dont les extrémités sont confondues.

$u_{i''k''}$[1]). On voit immédiatement que le domaine $T_{i'k'}$ est engaîné dans le domaine $T_{i''k''}$, qua $i''<i'$ et quand le segment $u_{i'k'}$ a une position principale entre le point x considéré et le segment $u_{i''k''}$.

Soient

$$u_{i_1k_1};\ u_{i_2k_2};\ u_{i_3k_3};\ \ldots\ldots;\ u_{i_mk_m};\ \ldots\ldots \tag{1}$$

les segments contigus à l'ensemble P possédant les propriétés suivantes:

1. Le segment $u_{i_1k_1}$ a une position principale entre le point x considéré et le point B.
2. Le segment $u_{i_mk_m}$ a une position principale entre le point x et le segment $u_{i_{m-1}k_{m-1}}$, $m\geqslant 2$.

Il est clair que les segments $u_{i_mk_m}$, ainsi définis, et les domaines $T_{i_mk_m}$ possèdent aussi les deux propriétés suivantes:

3. La distance du point x au segment $u_{i_mk_m}$ tend vers zéro avec $\frac{1}{m}$.
4. Le domaine $T_{i_mk_m}$ est engaîné dans le domaine $T_{i_{m-1}k_{m-1}}$, $m\geqslant 2$.

Nous appelons la suite (1) des segments contigus à l'ensemble P la **suite canonique correspondant au point x** considéré.

Désignons par $L(x)$ l'ensemble limite restreint des ensembles formés respectivement des points des domaines $T_{i_mk_m}$, $m=1,2,3,\ldots\ldots$ Comme l'aire du domaine $T_{i_mk_m}$ tend vers zéro avec $\frac{1}{m}$ l'ensemble $L(x)$ n'a pas de points intérieurs. En tenant compte que la distance du point x au segment $u_{i_mk_m}$ tend vers zéro avec $\frac{1}{m}$ et que la distance du point $N_{i_mk_m}$ au segment $\overline{AB}$ tend en même temps vers un, il résulte de la propriété 4° des domaines $T_{i_mk_m}$ que tous les points limites de l'ensemble $L(x)$, non situés sur cet ensemble, appartiennent au segment $p(x)$ correspondant au point x considéré. En posant

$$C(x)=L(x)+p(x),$$

on voit donc que

(A) $C(x)$ **est un ensemble fermé qui n'a pas de points intérieurs.**

On démontre aussi aisément que

(B) $C(x)$ **est un ensemble bien enchaîné.**

Comme la distance minima du bord supérieur $N_{ik}N'_{ik}$ du domaine T_{ik} au segment $\overline{AB}$ tend vers zéro avec $\frac{1}{i}$ et la distance du point M_{ik} à ce segment est, en même temps, supérieure à un, les deux extrémités du segment $p(x)$ et, par suite,

(C) l'ensemble $C(x)$ ne peut être regardé comme une courbe de M. Jordan.

En rapprochant les propriétés (A), (B) et (C) de l'ensemble $C(x)$, il résulte immédiatement que cet ensemble est une C-courbe. On voit donc qu'a chaque point x de seconde espèce de l'ensemble P, diffèrent des points A et B, correspond une C-courbe $C(x)$. Comme l'ensemble de points de seconde espèce d'un ensemble parfait quelconque a la puissance du continu, l'ensemble formé des C-courbes $C(x)$ correspondant à tous les points x considérés de l'ensemble P a la même puissance; on obtient donc un ensemble non dénombrable des C-courbes $C(x)$ situées dans le même plan.

Nous allons démontrer que les deux C-courbes, correspondant à deux points différents x et x', n'ont pas de points communs. Soient, en effet, x et x', $x \neq x'$, deux points quelconques de seconde espèce de l'ensemble P, différents des points A et B. Désignons respectivement par

$$u_{i_1 k_1};\ u_{i_2 k_2};\ u_{i_3 k_3};\ \ldots\ldots;\ u_{i_m k_m};\ \ldots\ldots$$

et

$$u_{i'_1 k'_1};\ u_{i'_2 k'_2};\ u_{i'_3 k'_3};\ \ldots\ldots;\ u_{i'_m k'_m};\ \ldots\ldots$$

les suites canoniques des segments contigus à l'ensemble P correspondant aux points x et x'. Comme les distances des points x et x' aux segments $u_{i_m k_m}$ et $u_{i'_m k_m}$ tendent respectivement vers zéro avec $\frac{1}{m}$ ces segments doivent être différents à partir d'un certain indice m; aussi peut-on déterminer, pour m suffisamment grand, un segment u_{ik}, $i < i_m$, $i < i'_m$, situé entre les segments $u_{i_m k_m}$ et $u_{i'_m k'_m}$. Nous supposerons, pour fixer les idées, que x est situé à gauche de x'; les segments $u_{i_m k_m}$ et $u_{i'_m k'_m}$ sont alors situés respectivement à gauche et à droite de u_{ik} et, par suite, comme on le voit de la fig. A et des inégalités $i < i_m$, $i < i'_m$, le domaine $T_{i_m k_m}$ est engaîné dans T_{ik} ou situé au-dessus de ce domaine et le domaine $T_{i'_m k_m}$ est en même temps situé au-dessous de T_{ik}. Il en résulte immédiatement que les ensembles $L(x)$ et $L(x')$ et, par suite, les C-courbes $C(x)$ et $C(x')$ ne peuvent avoir de points communs. On voit ainsi

qu'il existe un ensemble non dénombrable des C-courbes $C(x)$ situées dans le même plan et n'ayant pas de points communs, c. q. f. d.

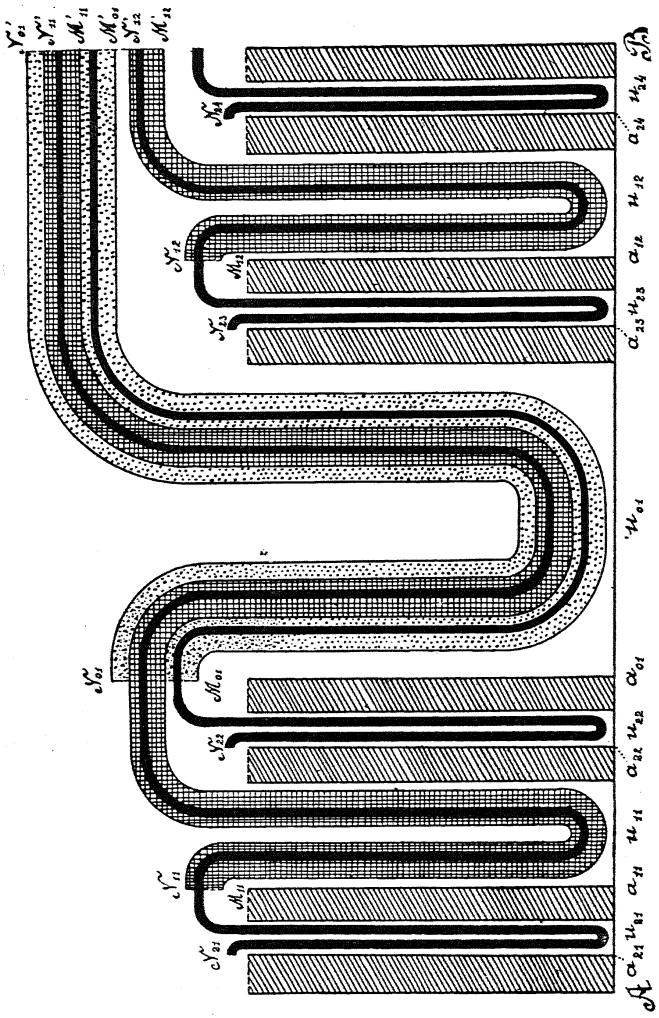

fig. A