B. KALICUN-CHODOWICKI.

Przyczynek do konstrukcji elementów styczności i środków krzywizn jednobieżnych krzywych płaskich przy pomocy Geometrji kinematycznej.

(Contribution à la construction des éléments de contact et des centres de courbure des courbes planes unicursales à l'aide de la Géométrie cinématique).

TREŚĆ.

We wstępie podaje autor zasadnicze pojęcia i konstrukcje z Geometrji kinematycznej.

W części I i II wyprowadza przy pomocy ruchu postępowego punktu po linji prostej i ruchu obrotowego prostej około punktu konstrukcje punktów styczności, stycznych i środków krzywizn krzywych rz. II. Konstrukcje te, nader proste i przejrzyste, mogą mieć w technice wszechstronne zastosowanie.

W części III i IV wyprowadza autor sposobem kinematycznym konstrukcje punktów styczności, stycznych i środków krzywizn jednobieżnych krzywych wyższych rzędów i wyższych klas.

O ile konstrukcje we wstępie, w części I i II są samodzielnem opracowaniem na podstawie źródeł obcych, o tyle konstrukcje w części III i IV są wyłączną własnością autora.

WSTĘP.

W niniejszej rozprawie podaje autor zastosowanie Geometrji kinematycznej do kreślenia krzywych jednobieżnych [1] i wynajdywania ich środków krzywizn. Dla jasności przedstawia we wstępie w krótkości te zasady Geometrji kinematycznej, na których następnie opiera swe konstrukcje [2].

I. Prosta l (fig. 1) obraca się około swego punktu C i przecina stałą prostą g w punkcie S. Z przyjętej prędkości obrotowej prostej l wykreślić prędkość c, z jaką punkt S porusza się po prostej g.

1. Jeżeli prosta l podczas obrotu około punktu C zajmie nieskończenie bliskie położenie l', to punkt S, jako punkt prostej l, opisze nieskończenie mały łuk kołowy SS', jako zaś punkt prostej stałej g opisze nieskończenie

[1]) Porównaj: 1) B. Kalicun. Über die Eigenschaften der ebenen Kurven... Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien. Bd. CXIX. Abt. IIa. 1910. 2) B. Kalicun. Über die Erzeugnisse krummer projek. Gebilde, deren Träger Plankurven sind. Tamże CXXII, CXXIII, 1913, 1914.

[2]) Porównaj: 1) Mannheim. Géométrie cinématique, 2) D'Ocagne. Cours de géométrie descr. et de géom. infinitésimale. 3) Prochazka. Vybrané statě z descriptivní geometrie. T. IV. Praga, 1916.

mały odcinek SS^1. Ponieważ nieskończenie mały trójkąt $SS'S^1$ może być uważany za prostokątny, przeto oznaczając kąt $(lg) = \alpha$, otrzymamy:

$$SS^1 = \frac{SS'}{\sin \alpha}. \quad (1)$$

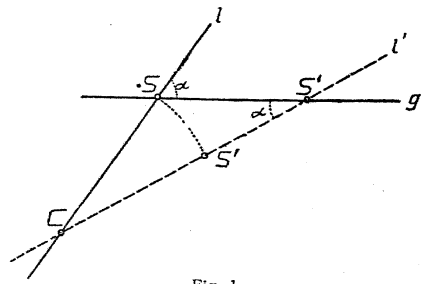


Fig. 1.

Kładąc $SS' = ds$, $SS^1 = ds_1$ i dzieląc oba te równania przez dt, otrzymamy w równaniu $\frac{ds}{dt} = v$ prędkość obrotową punktu S, w równaniu zaś $\frac{ds_1}{dt} = c$ prędkość, z którą punkt S porusza się po prostej stałej g. Z równania (1) wyniknie wtedy równanie: $c = \frac{v}{\sin \alpha}$, (2)

które podaje konstrukcję prędkości postępowej c, gdy dana jest prędkość obrotowa v lub naodwrót. A mianowicie: Jeżeli prosta l (fig. 2) obraca się około swego punktu C tak, że jej punkt przecięcia się S ze stałą prostą g ma prędkość $SS' = v$, to prędkość postępową tego punktu na prostej g otrzymamy, kreśląc z punktu S' równoległą do l i wyznaczając jej punkt przecięcia się S_1 z prostą g. Odcinek $SS_1 = c$ będzie prędkością postępową punktu S na prostej g. I naodwrót: jeżeli odcinek SS_1 przedstawia prędkość postępową punktu S na prostej g, to jego prędkość obrotową $SS' = v$ na prostej l otrzymamy, ograniczając prostą $SS' \perp l$ promieniem $S_1S' \parallel l$.

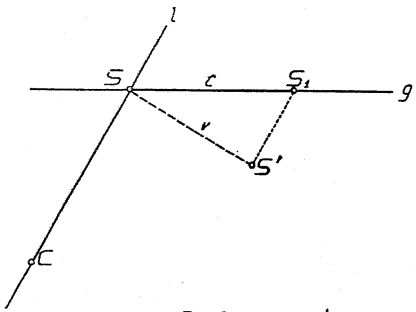


Fig. 2.

2. Na figurze 3 prosta l, obracając się około swego punktu c, przecina stałą prostą g w punkcie U. Prędkości obrotowe v i v_1 i prędkości postępowe c i c_m tych punktów są od siebie zależne, a figura wskazuje, jak z jednej z tych prędkości konstruuje się inne. A mianowicie:

a) Wychodząc z prędkości obrotowej v punktu S, otrzymujemy prędkość obrotową v_1 punktu U, jeżeli prostą $UU_1 \perp l$ ograniczymy promieniem CS_1. Z prędkości v_1 otrzymamy prędkość postępową na prostej m, kreśląc prostą $U_1U_3 \parallel l$. Posta ta przetnie prostą m w punkcie ll_3, a odcinek $UU_3 \equiv c_m$ jest szukaną prędkością postępową punktu ll na prostej m.

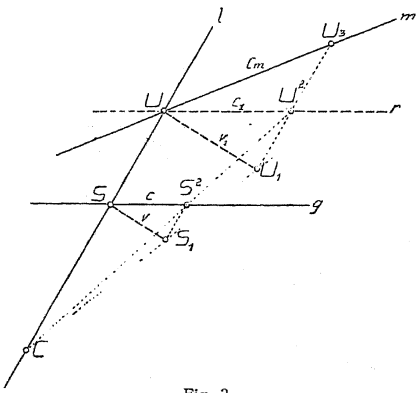


Fig. 3.

b) Jeżeli dana jest prędkość postępowa $c = SS_2$ punktu S na prostej g, to, jak z figury widoczna, otrzymamy prędkość postępową c_1 punktu U na prostej $r \parallel g$, kreśląc promień CS_2 do przecięcia się z prostą r w punkcie ll_2. Odcinek $UU_2 \equiv c_1$ jest prędkością postępową punktu U na prostej $r \parallel g$. Z tej prędkości konstruujemy prędkość postępową $UU_3 \equiv c_m$ punktu U na prostej m, kreśląc prostą $U_2U_3 \parallel l$ i t. d.

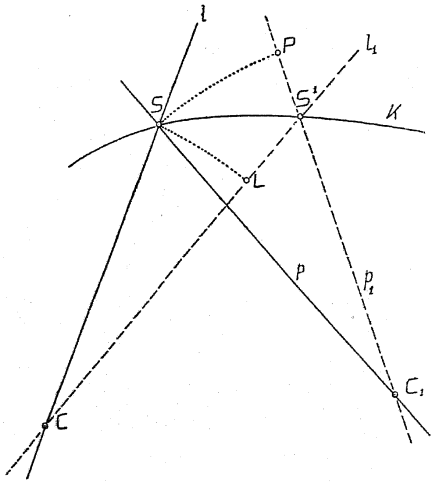


Fig. 4.

II. Konstrukcja prędkości punktu przecięcia się s dwóch prostych l, p, z których jedna obraca się około swego punktu C, druga zaś około swego punktu C_1 (fig. 4).

Jeżeli prosta l obraca się z pewną prędkością około swego punktu C, druga zaś prosta p obraca się z pewną prędkością około swego punktu C_1, to punkt przecięcia się S tych prostych porusza się z pewną prędkością wypadkową i opisuje krzywą k. Prędkości punktu S w poszczególnych

punktach tej krzywej przedstawiają styczne tej krzywej w tychże punktach. Niech l_1 będzie nieskończenie bliskiem położeniem prostej l przy jej obrocie około C, p_1 nieskończenie bliskiem położeniem prostej p przy jej obrocie około C_1. Proste l_1 i p_1 przecinają się w punkcie s_1, który leży w nieskończenie małej odległości od punktu S. Prosta zaś, łącząca punkty S i S_1, jest styczną krzywej k, opisanej przez punkt S.

Punkt S, jako punkt prostej l, przechodzi z nią przy nieskończenie małym obrocie do położenia L, jako zaś punkt prostej p przechodzi z nią przy nieskończenie małym obrocie do położenia P. Nieskończenie małe elementy SL i SP można uważać za prostopadłe do l_1 wzgl. p_1, a zatem proste l_1 i p_1 za równoległe do l wzgl. p (fig. 5). Narysujmy zatem do nieskończenie małego czworoboku SLS_1P czworobok podobny $SL_1S_2P_1$, którego boki mają się do odpowiednich boków pierwszego czworoboku jak $1 : dt$, a otrzymamy:

$$SL_1 = \frac{SL}{dt} = v_l,$$

$$SP_1 = \frac{SP}{dt} = v_p,$$

$$SS_2 = \frac{SS_1}{dt} = v_t,$$

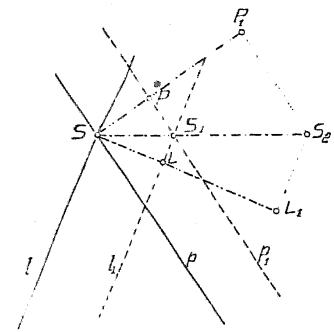


Fig. 5.

v_l i v_p przedstawiają prędkości obrotowe punktu S podczas obrotu prostych l wzgl. p około ich punktów C wzgl. C_1, v_t zaś przedstawia prędkość tego punktu po stycznej t do krzywej k. Jeżeli zatem są dane prędkości obrotowe v_p i v_l punktu S, to prędkość jego postępową po stycznej do krzywej k otrzymamy w sposób następujący:

Z końca L_1 prędkości v_l kreślimy prostą równoległą do l, z końca zaś P_1 prędkości v_p kreślimy prostą równoległą do p. Proste te przecinają się w punkcie S_2. Odcinek S_2S przedstawia prędkość wypadkową punktu S, a kierunek tego odcinka jest kierunkiem stycznej w pnnkcie S do k. Konstrukcja odwrotna prowadzi od prędkości punktu S po stycznej t do prędkości obrotowych tego punktu.

III. Konstrukcja środka krzywizny w pewnym punkcie krzywej, jako chwilowego środka obrotu stycznej w tym punkcie.

Środek krzywizny M krzywej k w pewnym punkcie T (fig. 6) może być uważany: a) jako punkt przecięcia się dwóch bezpośrednio po sobie następu-

jących normalnych, b) jako chwilowy środek obrotu stycznej t w punkcie T, gdy styczna ta z położenia TT' przechodzi do nieskończenie bliskiego położenia $T'T''=t'$. Dowolny punkt P tej stycznej przechodzi wtedy do położenia P'. Punkt P osiągnie to położenie, jeżeli odcinek TP przesunie się na stycznej t o odcinek $TT'=PP''$ do położenia $T'P''$, a następnie obróci się około punktu T'.

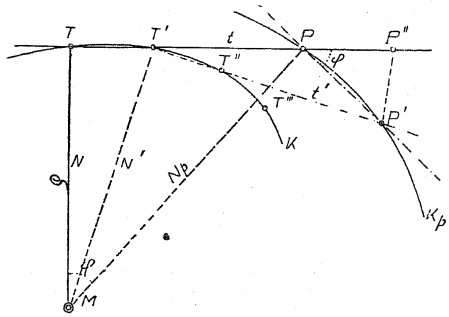


Fig. 6.

Z nieskończenie małego trójkąta $PP'P''$, w którym kąt $P'PP''$ oznaczono przez φ, wynika: $P'P''=PP''\operatorname{tg}\varphi=TT'\operatorname{tg}\varphi$. Prosta PP' jest jednak styczną do trajektorji Kp, zakreślonej punktem P stycznej t. Na podstawie twierdzenia Chasles'a[1] przechodzi normalna w punkcie P tej trajektorji przez środek krzywizny M. Trójkąt $PP''P'$ jest przeto podobny do trójkąta MTP, z czego wynika: $MT:TP=PP'':P'P''$.

Dzieląc trzeci i czwarty wyraz tej proporcji przez dt, a następnie oznaczając:

$$\frac{PP''}{dt}=w,\quad \frac{P'P''}{dt}=v,\quad MT=\rho,$$

otrzymamy związek:

$$\rho:TP=w:v, \tag{1}$$

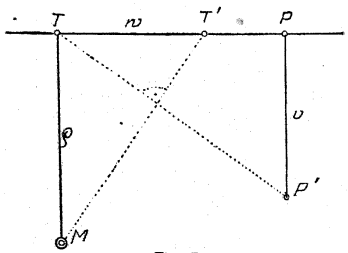


Fig. 7.

gdzie ρ jest promieniem krzywizny krzywej K w punkcie T, w prędkością punktu P, a zatem i punktu T na stycznej t, v prędkością, z jaką się punk P' około T', albo punkt P około T obraca.

Związek 1) pozwala przeto wykreślić jednę z powyższych wielkości, jeżeli inne są dane. Niech będzie np. dana prędkość w, z jaką się punkt stycznośći T porusza na stycznej t, a nadto prędkość v, z jaką się obraca jakiś punkt P tej stycznej wraz z tą styczną około punktu styczności T. Środek krzywizny M znajdziemy jako punkt przecięcia się z normalną w punkcie T prostej, wykreślonej z punktu T', prostopadle do prostej $P'T$, łączącej koniec prędkości v z punktem styczności T.

[1]) Chasles: Mémoire de Géométrie sur la construction des normales à plusieurs courbes mécaniques. Bulletin de la Société mathématique de France. 1878.

I.

Ruch postępowy punktu po linji prostej i z nim związana konstrukcja punktów styczności i promieni krzywizn krzywej kl. II-giej[1]).

1. Niech dowolny punkt I (fig. 8) porusza się z pewną prędkością po prostej O, przyjmując położenie I, II, ... Rzućmy następnie szereg O (I, II,....)

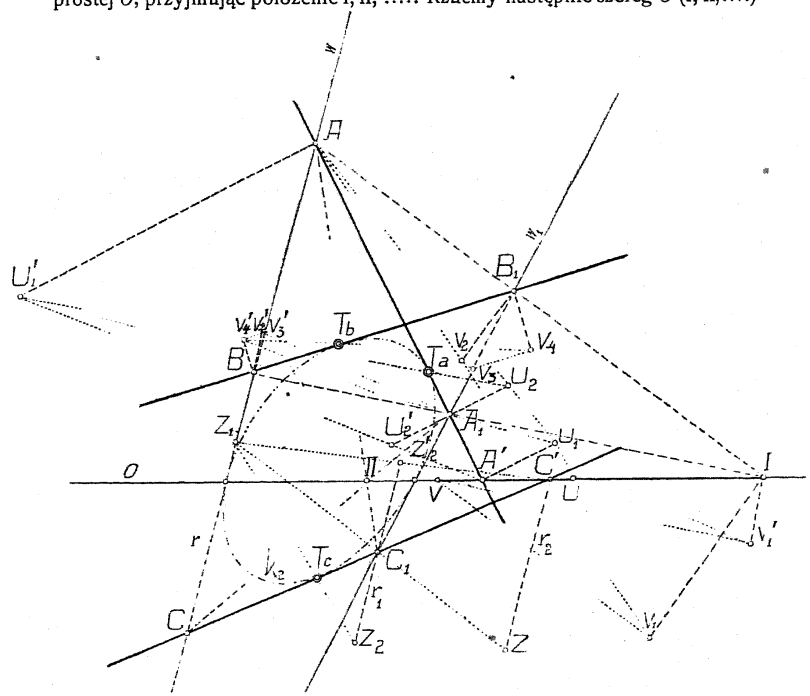


Fig. 8.

[1]) Porównaj również: B. Procházka. Kinematický zpusob sestrojovaní tečen a středů křivosti křivek, II st. Rozprawy czeskiej Akademji, rocz. III, № 19.

raz z dowolnego punktu A, drugi raz z dowolnego punktu A_1. Otrzymamy w ten sposób dwa perspektywiczne pęki A(I, II, ...) i A_1(I, II, ...). Jeżeli następnie pęk pierwszy przetniemy prostą w_1, przechodzącą przez A_1, pęk zaś drugi prostą w, przechodzącą przez A, to powstaną dwa rzutowe szeregi ($A_1, B_1, C_1, \ldots$) i ($A, B, C, \ldots$), dla których prosta O będzie osią perspektywiczności. Proste AA_1, BB_1, CC_1, ... łączące odpowiednie punkty tych szeregów, są stycznemi krzywej klasy II-giej k_2, która, jak wiadomo, dotyka również podstaw w i w_1.

Ruch postępowy punktu I po prostej O powoduje ruch obrotowy promienia AI około A i ruch obrotowy promienia A_1I około A_1. Ruchy obrotowe promieni AI i A_1I powodują ruchy postępowe punktów B_1 i B na podstawach w i w_1. Jeżeli przedstawimy sobie, że wszystkie ruchy odbywają się w nieskończenie krótkim czasie, natenczas wspomniane ruchy postępowe punktów B i B_1 spowodują obrót stycznej BB_1 około jej chwilowego punktu obrotu S_b, który jest właśnie szukanym punktem styczności. Punkt ten znajdziemy, jeśli znać będziemy prędkości obrotowe punktów B i B_1.

Przyjąwszy za prędkość postępową punktu I na prostej O odcinek $I\,V$, wyprowadzimy konstrukcją na figurze 2 wskazaną prędkości obrotowe $I\,V_1$ i IV_1' tego punktu na promieniach AI i A_1I. Z prędkości $I\,V_1$ i $I\,V'_1$ otrzymamy przy pomocy konstrukcji na figurze 3 prędkości obrotowe BV_2' i BV_2 punktów B i B_1 na tychże promieniach; z prędkości BV'_2 i BV_2 otrzymujemy prędkości postępowe tych punktów na prostych w i w_1 przy użyciu konstrukcji z fig. 2. Prędkości te oznaczono odcinkami BV_3' i B_1V_3 i wyprowadzono z nich prędkości BV_4' i B_1V_4, z jakiemi obracają się punkty B i B_1, gdy styczna robi nieskończenie mały obrót około swego punktu styczności. Prosta zatem, łącząca punkty końcowe V_4 i V_4' tych prędkości, przecina styczną BB_1 w punkcie T_b, który jest właśnie szukanym punktem styczności.

2. Znacznie prostsza jest konstrukcja punktu styczności stycznej AA_1.

Uważajmy styczną AA_1 za promień pęku A(I, II, ...) i oznaczmy punkt przecięcia się jej z osią O przez A', zaś prędkość postępową tego punktu na O przez $A'U$. Z tej prędkości wyprowadzamy prędkość obrotową $A'U_1$ punktu A' (porów. fig. 2), a z tej ostatniej prędkość obrotową A_1U_2 punktu A_1, ograniczając odcinek $A_1U_2 \perp A_1A$ promieniem U^1A.

Uważając styczną AA_1 za promień pęku A_1(I, II, ...), otrzymamy prędkość obrotową AU_1' punkru A, ograniczając odcinek $AU_1' \perp AA_1$ promieniem U_1A_1. Prosta U_2U_1' przecina styczną AA_1 w szukanym punkcie styczności Ta.

Połączmy punkt A' z punktem U_1' i znajdźmy punkt U_2', w którym ta prosta przecina przedłużenie odcinka A_1U_2, to odcinek $A_1U_2' = -A_1U_2$.

Ta równość zachodzi wtedy, gdy równoległe do siebie odcinki $A'U_1$, A_1U_2, AU_1' nie są do stycznej prostopadłe, gdy więc przedstawiają prędkości postępowe punktów A', A_1, A na prostych równoległych, przez te punkty

przechodzących (porównaj fig. 3). Ta uwaga prowadzi nas do następującej, nadzwyczaj prostej konstrukcji punktu styczności dowolnej stycznej krzywej klasy II-ej, wyznaczonej przez dwa rzutowe szeregi (ABC....) i ($A_1B_1C_1$....) (fig. 8).

Niech tą dowolną styczną będzie np. CC_1.

Przez punkty C, C_1 i punkt C', w którym styczna przecina oś perspektywiczności szeregów, prowadzimy równoległe r, r_1, r_2. Na prostej r_2 odcinamy dowolny odcinek $C'Z$ i łączymy punkt Z z punktem C_1; prosta C_1Z przecina prostą r w punkcie Z_1. Szukamy punktu przecięcia się Z'_2 prostej Z_1C' z prostą r_1. Odcinamy na prostej r_1 odcinek $C_1Z_2 = -C_1Z'_2$ po przeciwnej stronie punktu C_1, a otrzymany w ten sposób punkt Z_2 łączymy z punktem Z_1. Prosta przecina styczną CC_1 w szukanym punkcie styczności T_c[1].

2. Powyższa konstrukcja punktu styczności jeszcze bardziej się uprości, jeżeli zamiast dowolnego punktu Z na prostej $r_2 \parallel w$ przyjmiemy punkt przecięcia się tej prostej z podstawą w_1 (fig. 9). Punkt Z_1 zejdzie się wtedy z punktem przecięcia się obu podstaw w i w_1, prosta zaś ZZ_1 z podstawą w_1. Punkt styczności T_c wykreślamy wtedy w sposób następujący:

Punkt C' przecięcia się stycznej CC_1 z osią perspektywiczności o łączymy z punktem Z_1, w którym przecinają się podstawy szeregów w i w_1. Ta prosta przecina prostą r_1, równolegle do podstawy w przez punkt C_1 przechodzącą, w punkcie Z'_2. Odcinamy następnie na r_1 odcinek $C_1Z_2 = -C_1Z'_2$, a otrzymany punkt Z_2 łączymy z punktem Z_1; w przecięciu się prostej Z_2Z_1 ze styczną CC_1 znajduje się szukany punkt styczności.

3. Oznaczając na figurze 9 promień Z_1C' przez n, Z_1Z_2 przez m, otrzymamy $(ww_1\, mn) = -1$, to znaczy, że promienie m i n tworzą z podstawami w i w_1, grupę harmoniczną, co wynika zresztą również stąd, że prosta m jest biegunową punktu C'. Jeżeli styczna CC_1 obwija przekrój stożkowy k_2, to z jej ruchem związane są obroty promieni m i n. Obroty te jednak są tego rodzaju, że promienie m i n odcinają zawsze na prostej r_1, równolegle do w przez punkt C_1 przechodzącej, równe, o kierunkach przeciwnych, odcinki $C_1Z_2 = C_1Z'_2$, z czego wnosimy, że promienie te obracają się z równemi, jednak wprost przeciwnemi prędkościami. Jeżeli zatem znamy prędkość obrotu jednego z tych promieni, to temsamem znamy również prędkość obrotu drugiego.

---

[1]) Prawdziwość powyższej konstrukcji daje się również udowodnić przy pomocy Geometrji nowszej (syntetycznej).

To spostrzeżenie posłuży nam do wyznaczenia prędkości, z jaką punkt styczności T_c posuwa się po stycznej CC_1. Niech promień n obraca się w ten sposób, aby jego punkt C' postępował na osi perspektywiczności O z prędkością $C'V$. Z prędkości tej wyprowadzamy prędkość obrotową $C'N$ tego punktu, gdy styczna CC_1 obraca się około punktu styczności T_c, i prędkość postępową $C'Z'$ na prostej r_2, równoległej do w. (Porównaj fig. 2 i 3). Z prędkości $C'Z'$ otrzymamy prędkość punktu Z'_2 na prostej $r_1 \parallel r_2$, ograniczając na tej prostej odcinek Z'_2M promieniem $Z'Z_1$. Odcinając na r_1 odcinek $Z_2M' = -Z'_2M$, otrzymamy prędkość, z którą punkt Z_2 porusza się po r_1, gdy promień m obraca się około Z_1. Z tej ostatniej prędkości otrzymujemy prędkość punktu styczności T_c na prostej równoległej do r_1, a następnie prędkość T_cX, z jaką punkt ten porusza się na stycznej CC_1 (por. fig. 2, 3).

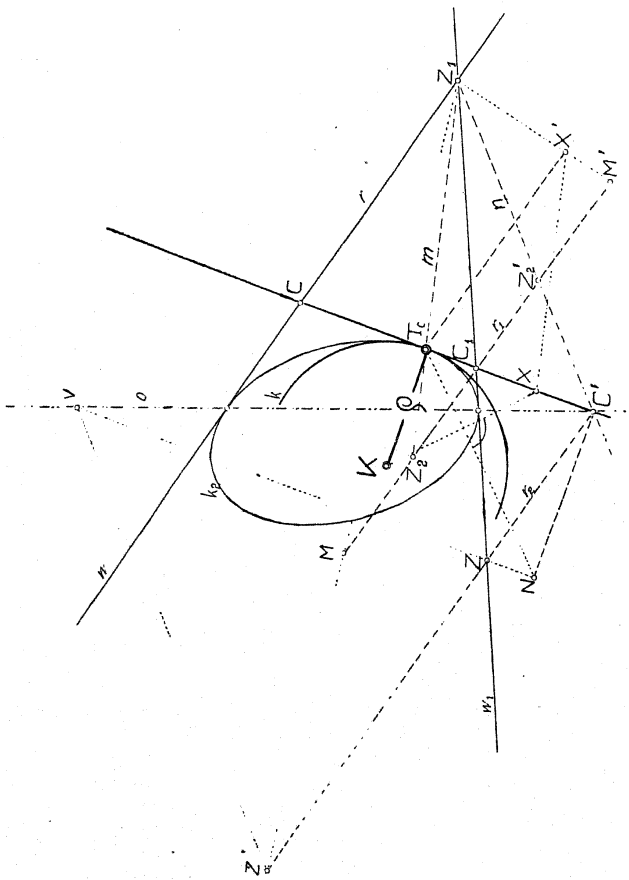


Fig. 9.

W ten sposób doszliśmy do prędkości $C'N$, z jaką punkt C' obraca się, gdy styczna CC' obraca się około punktu styczności T_c, i prędkości postępowej T_cX punktu T_c na tej stycznej; możemy zatem sposobem, na fig. 7 wskazanym, wykreślić środek krzywizny K w punkcie T_c krzywej klasy II-ej.

II.

Ruch obrotowy prostej około jej stałego punktu i z tym ruchem związana konstrukcja stycznych i środków krzywizn krzywej rzędu II-go.

Rozważanemu ruchowi punktu I (fig. 9) po prostej O odpowiada dwoiście ruch obrotowy prostej I około jej punktu stałego O (fig. 10), która zajmuje położenie I, II, III, ...

Przetnijmy pęk O (I, II, III, ...) dowolnemi prostemi a i a_1, a otrzymamy na nich dwa perspektywicznie rzutowe szeregi: $(A, B, C, \ldots)$ i $(A_1, B_1, C_1, \ldots)$. Jeżeli następnie rzucimy szeregi te raz z dowolnego punktu W prostej a, drugi raz z dowolnego punktu W_1 prostej a_1, to powstaną dwa rzutowe pęki $W(a, b, c, \ldots)$ i $W_1(a_1\, b_1\, c_1 \ldots)$, które wyznaczają krzywą rzędu II-go.

Ruch obrotowy promienia I powoduje ruch postępowy punktu B po prostej a_1, punktu zaś B_1 po prostej a, te zaś ruchy powodują ruchy obrotowe promieni b i b_1 pęków $W(a, b, c, \ldots)$ i $W_1(a_1, b_1, c_1, \ldots)$. Z prędkości, jakie przybiera punkt T_b, w którym przecinają się promienie b i b_1, wynika prędkość wypadkowa tego punktu po stycznej w tym punkcie do krzywej K^2. Kierunek tej prędkości daje właśnie styczną w punkcie T_b. Jeżeli przyjmiemy zatem odcinek B_1V za prędkość obrotową punktu B_1 na promieniu OB_1, to z prędkości tej wyprowadzimy nasamprzód prędkość postępową B_1V_1 punktu B_1 na promieniu a, z tej zaś prędkość obrotową B_1V_2, której punkt B_1 nabywa przy obrocie promienia b_1. Przy tym obrocie nabywa punkt T_b prędkości T_bV_3, którą wyprowadzamy z prędkości B_1V_2, ograniczając odcinek $T_bV_3 \perp b_1$ promieniem V_2W_1. (Por. fig. 2, 3).

Pozostaje jeszcze do wyznaczenia prędkość $T_bV'_4$, której punkt T_b nabywa, gdy promień b obraca się około W. Prędkość tę otrzymujemy w sposób następujący: Z prędkości B_1V wyprowadzamy prędkość obrotową BV'_1 punktu B, z tej zaś prędkość postępową BV'_2 i prędkość obrotową BV'_3, któ-

rej punkt B nabywa podczas obrotu promienia b około W (por. fig. 2, 3). Promień WV'_3 ogranicza na prostej, w punkcie T_b do promienia b prostopadle wykreślonej, odcinek $T_bV'_4$, który przedstawia prędkość, jakiej punkt T_b nabywa podczas obrotu promienia b około W.

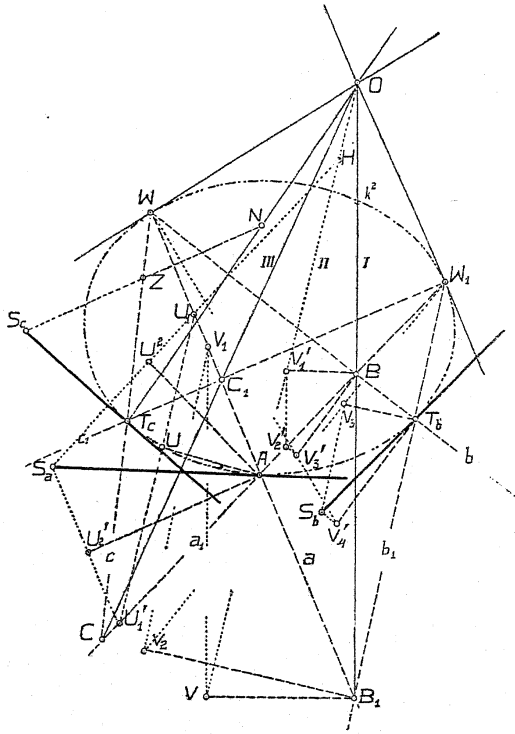


Fig. 10.

Z prędkości obrotowych T_bV_3, $T_bV'_4$ punktu T_b wyprowadzamy przy pomocy konstrukcji, na figurze 5 podanej, prędkość wypadkową T_bS_b tego punktu po stycznej w tym punkcie do krzywej k^2. Kierunek tej wypadkowej jest właśnie kierunkiem stycznej szukanej.

2. Konstrukcja stycznej będzie o wiele prostsza w punkcie A, w którym przecinają się promienie a i a_1, uważane w tym przypadku za ruchome.

Przyjmijmy dowolną prędkość AU punktu A, której ten punkt nabywa, gdy promień $AO \equiv$ II obraca się około punktu O. Prosta, poprowadzona przez U równoległe do promienia II, wyznacza na promieniach a, a_1 odcinki AU_1 wzgl. AU_1', które przedstawiają prędkości postępowe tego punktu na tych promieniach. Kreśląc przez U_1 równoległą do a_1, przez U_1' równoległą do a, wyznaczymy prędkości obrotowe AU_2, AU_2' tego punktu przy obrocie promieni a_1 i a około W_1 wzgl. W; proste U_1U_2 i $U'_1U'_2$ przecinają się w punkcie Sa, który połączony z A daje styczną w punkcie A.

3. Z powyższej konstrukcji punktu Sa wynika, że punkty A, U_1, Sa, U'_1 tworzą równoległobok. Jeżeli zatem przedłużymy bok tego równoległoboku

$S_a\,U_1$ do przecięcia się H z promieniem $OA \equiv$ II, to otrzymamy odcinek $U_1H = US_a$. Stąd wynika nadzwyczaj łatwa metoda kreślenia stycznej w dowolnym punkcie krzywej rzędu II go, której są dane dwie styczne w punktach np. W i W_1, przecinające się w punkcie O.

Chcemy wykreślić styczną np. w punkcie T_c:

Łączę punkt T_c z punktami W, W_1, O. Przez dowolny punkt N promienia T_cO prowadzę równoległą do promienia T_cW_1, a jej punkt przecięcia się z promieniem WT_c oznaczam przez Z. Odcinam na prostej NZ odcinek $ZS_c = -ZN$ i otrzymuję punkt S_c, który, połączony z T_c, da styczną w punkcie T_c.

3. Powyższa konstrukcja stycznej prowadzi do konstrukcji promienia krzywizny w dowolnym punkcie krzywej rz. II-go (fig. 11)[1].

Na poprzedniej figurze przyjęliśmy punkt N zupełnie dowolnie na promieniu OT_c. Konstrukcja znacznie się uprości, jeśli punkt ten przyjmiemy w przecięciu się promienia OT_c z prostą WW_1. Promień przez N (fig. 11), równolegle do W_1T_c poprowadzony, przecina promień WT_c w punkcie N_0. Jeżeli na tej równoległej odetniemy odcinek $N_0S_c = -N_0N$, to otrzymamy punkt S_c, który, połączony z punktem S_c, da styczną w tym punkcie. Z równości odcinków N_0S_c i N_0N wynika, że promienie $T_c(S_c, O, W, W_1)$ tworzą grupę harmoniczną.

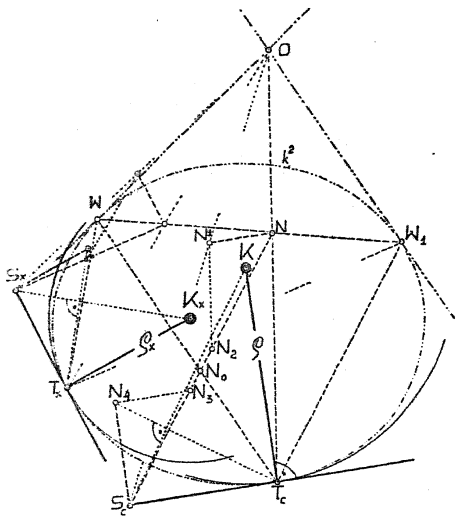


Fig 11.

Wyobraźmy sobie teraz, że punkt T_c odbywa ruch po krzywej K^2, natenczas promienie W_1T_c, WT_c, OT_c obracają się około swych punktów W_1, W, O, styczna zaś odbywa ruch, który się składa z ruchu postępowego i ruchu obrotowego. Prędkość ruchu postępowego stycznej przedstawia odcinek T_cS_c,

[1]) Porównaj: Prohászka. Vybrané statě z descr. Geometrie. T. IV

Z tej prędkości wyprowadzimy prędkość obrotową stycznej w sposób następujący: Przy powyższym ruchu punktu T_c odcinek NS_c jest zawsze promieniem T_cW połowiony, z czego wnosimy, że punkty N i S_c poruszają się z prędkościami równemi, ale wprost przeciwnemi. Połączmy punkt S_c z punktem O, to promień ten przecina prostą, równolegle przez N do stycznej T_cS_c poprowadzoną, w punkcie N_1; odcinek NN_1 przedstawia prędkość punktu N na tej równoległej. Z tej prędkości wyprowadzamy prędkość postępową NN_2 punktu N na prostej NS_c (por. fig. 2, 3). Odcinając na tej prostej odcinek $S_cN_3 = -N_2N$, otrzymamy prędkość postępową punktu S_c^1, z tej zaś prędkość S_cN_4, jakiej punkt S_c nabywa, gdy styczna obraca się około swego punktu styczności.

Mając prędkość postępową T_cS_c punktu styczności i prędkość obrotową S_cN_4 punktu S_c tej stycznej, wykreślimy środek krzywizny K sposobem jak na fig. 7.

Na rysunku skonstruowano również środek krzywizny K_x w punkcie T_x.

III.

Ruch punktu po przekroju stożkowym i z nim związana konstrukcja stycznych, punktów styczności i promieni krzywizn jednobieżnych krzywych klasy $(2n+1)$ wzgl. jednobieżnych krzywych rzędu $(2n+2)$.

$(n = 1, 2, 3, \ldots\ldots)$.

1. Dany jest przekrój stożkowy k^2 (Tabl. 1), po którym porusza się punkt, przyjmując położenia A^1, 2, 3, 4, 5 ..... Za prędkość postępową tego ruchu w każdym z tych położeń może być przyjęty dowolny odcinek na stycznej przekroju stożkowego.

Z ruchem tym punktu po krzywej k^2 wiążemy dwa ruchy obrotowe, jeden około punktu A_1 krzywej K^2, drugi około punktu A_2, który nie leży na obwodzie krzywej k^2.

Jeżeli więc punkt 3 utworzy na k^2 szereg 3, 2, 4, 5, ..., to promienie $A_1 3$ i $A_2 3$ utworzą dwa pęki, które pozostaną do siebie w takiej zależności, że każdemu promieniowi $A_2 3$ pęku $A^2(3, 2, 4, 5 \ldots\ldots)$ odpowiadają dwa promienie pęku $A^1(3, 2, 4, 5 \ldots\ldots)$; są to mianowicie promienie, łączące A^1 z punktami 3 i 3′, w których promień $A^2 3$ przecina k^2. Każdemu jednak promieniowi $A_1 3$ pęku $A^1(3, 2, 4, 5 \ldots.)$ odpowiada tylko jeden promień pęku $A^2(3, 2, 4, 5 \ldots.)$, a mianowicie promień, który łączy punkt 3 z punktem A^2. Pęki $A^2(3, 2, \ldots.)$ i A^1 $(3, 2, \ldots.)$ są zatem jedno-dwuznaczne. Dwie proste w_1 i w_2, poprowadzone przez wierzchołki A_1 i A_2, przecinają te pęki podług dwóch szeregów

jedno-dwuznacznych: $(A^1, B^1, C^1, D^1, E^1, \ldots.)$ i $(A^2, B^2, C^2, D^2, E^2, \ldots.)$. Proste, łączące odpowiednie punkty tych szeregów, obwijają krzywą klasy trzeciej K_3, która dotyka podstawy w_2 dwa razy, podstawy w_1 razy. Krzywa K_3 jest przez sześć swych stycznych pojedyńczych $A^1A^2, B^1B^2, C^1C^2, D^1D^2, E^1E^2, w_1$ i styczną podwójną w_2 dokładnie wyznaczona[1]. Dalsze styczne tej krzywej dadzą się z łatwością wykreślić przy pomocy przekroju stożkowego k^2, a punkty styczności przy pomocy ruchu punktu po krzywej k^2.

a) Połączmy dowolny punkt X przekroju stożkowego k^2 z wierzchołkami A^1 i A^2 pęków $A^1(3, 2, 4, \ldots)$ i $A^2(3, 2, 4, \ldots)$; otrzymamy dwa odpowiednie promienie tych pęków, które przecinają podstawy w_2, w_1 w punktach odpowiednich x_2, x_1 szeregów w_2 $(A^2, B^2, \ldots)$ i w_1 $(A^1, B^1, \ldots)$. Prosta X^1X^2 jest styczną krzywej K_3. Z każdego punktu X_1 podstawy w_1 wychodzą jeszcze po dwie styczne do krzywej K_3, z każdego zaś punktu X_2 podstawy w_2 tylko jedna styczna.

Punktowi T, w którym przecinają się podstawy w_1 i w_2, odpowiadają w szeregu w_2 $(A^2, B^2, \ldots)$ punkty T_1 i T_2, w których krzywa k^2 przecina się z postawą w_2. Jeżeli jednak punkt T zaliczymy do szeregu dwuznacznego $w_2(A^2, \ldots)$, to odpowie mu w szeregu jednoznacznym punkt T_3, w którym krzywa k^2 przecina podstawę w_1. Punkty T_1, T_2, T_3 są, jak łatwo sobie przedstawić, punktami styczności krzywej K_3 ze stycznemi w_2 i w_1.

Krzywa K_3 dotyka również stycznej A^1S^2, wykreślonej w wierzchołku A^1 do przekroju stożkowego k^2. Oznaczmy bowiem punkt przecięcia się tej stycznej z podstawą w_2 przez S_2. Punktowi temu odpowiada pewien punkt szeregu w_1, który znajdziemy, gdy S^2 połączymy z A^1 i wyznaczymy punkt przecięcia się tej prostej z w_1; punkt ten schodzi się jednak z A^1, tak, że prosta A^1S^2 jest również styczną krzywej K_3.

b) Postawmy sobie za zadanie wyznaczenie punktu styczności T_e stycznej E^1E^2. Styczną E^1E^2 wyznaczyliśmy przy pomocy punktu 5 na przekroju stożkowym k^2. Niech odcinek $5V$ przedstawia prędność, z jaką ten punkt porusza się po stycznej do przekroju k^2 w tymże punkcie wykreślonej. Z tej prędkości wyprowadzamy przy pomocy konstrukcji na fig. 5 prędkości $5V_1$ i $5V_1'$, których punkt 5 nabywa, gdy promienie $A_1 5$ i $A_2 5$ około A_1 wzgl. A_2 obracają się. Z prędkości $5V_1$ konstruujemy prędkość obrotową E^2V_2 tego punktu przy pomocy promienia A^1V^1. Prosta, poprowadzona przez V_2 równolegle do A^1E^2, przecina w_2 w punkcie V_3, a odcinek E^2V_3 przedstawia prędkość postępową tego punktu na prostej w_2. Kreśląc przez punkt V_3 prostą równoległą do stycznej E^1E^2, otrzymamy na prostopadłej w punkcie E^2 do E^1E^2 wykreślonej, punkt V_4; odcinek E^2V_4 przedstawia prędkość, z jaką się punkt E^2 obraca, gdy styczna E^1E^2 obraca się około swego punktu styczności T_e.

[1]) E. Weyr. Theorie der mehrdeutigen geom. Elementargebilde.

Analogicznie z prędkości $5V'_1$ wyprowadzamy prędkość obrotową $E^1V'_2$ punktu E^1 i prędkość postępową $E^1V'_3$ tego punktu na prostej w_1, z tej ostatniej prędkość obrotową E_1V_4', z jaką się punkt E^1 obraca, gdy styczna E^1E^2 obraca się około swego punktu styczności T_e.

Prędkości E^2V_4 i $E^1V'_4$ prowadzą do punktu styczności T_e. Jest to mianowicie punkt przecięcia się ze styczną E^1E^2 prostej, łączącej punkty V_4 i V'_4 (Por. fig. 3).

W ten sam sposób wyznaczano na rysunku punkty styczności stycznej B^1B^2, C^1C^2, ...

2. O wiele prostsza jest konstrukcja punktu styczności stycznej A^1A^2.

Styczna A^1A^2 może być uważana raz za promień pęku (A^2), drugi raz za promień pęku (A^1). Oznaczmy punkt przecięcia się stycznej A^1A^2 z przekrojem stożkowym k^2 cyfrą 7. Z dowolnie przyjętej prędkości tego punktu po stycznej w tym punkcie do k^2 wyprowadzamy prędkość obrotową $7Z$, z którą się punkt 7 obraca około A^1 wzgl. A^2. Z prędkości $7Z$ konstruujemy prędkość obrotową A^2Z_1 punktu A^2, gdy promień $7A^1$ obraca się około A^1, jak również prędkość obrotową A^1Z_2, której punkt A^1 nabywa, gdy tenże promień obraca się około A^2. Prosta, łącząca punkty Z_1 i Z_2, przecina styczną A^1A^2 w punkcie styczności.

3. Punkt styczności stycznej A^1A^2 wyznaczono na rysunku również i w inny sposób, a mianowicie na podstawie następującego rozważania:

Do konstrukcji krzywej K_3 możemy użyć również dobrze innego przekroju stożkowego. Połączmy mianowicie punkt D^1 z punktami szeregu A^2, B^2, C^2, ..., odpowiedni punkt D^2 z punktami szeregu A^1, B^1, C^1, ...; otrzymamamy dwa jedno-dwuznaczne pęki w perspektywicznem położeniu, które wyznaczą przekrój stożkowy k_d^2, przy pomocy którego można skonstruować krzywą K_3 i wyznaczyć punkt styczności jakiejkolwiek stycznej np. A^1A^2. Przekrój k_d^2 przechodzi przez D^1, T_1, T_2, T_3, a nadto przez punkt 6, w którym przecinają się promienie D^1A^2 i D^2A^1. Punkt 6 jest jednak punktem przekroju k^2, tak, że przekroje k^2 i k_d^2 mają cztery punkty wspólne: T_1, T_2, T_3 i 6.

Na rysunku wyznaczono sposobem Pascala styczną w punkcie 6 do przekroju stożkowego k_d^2 i przyjęto na niej prędkość postępową $6G$. Z tej prędkości znanemi konstrukcjami wyprowadzono prędkości pochodne $6G_1$, A_1G_2, A_1G_3, A_1G_4; $6G'_1$, $A_2G'_2$, $A_2G'_3$, $A_2G'_4$. Prosta $G_4G'_4$ przecina styczną A^1A^2 w punkcie styczności.

Zauważyć należy, że każda para odpowiednich punktów X^1, X^2 jedno-dwuznacznych szeregów (w_1) i (w_2) może być przyjęta za wierzchołki dwu jedno-dwuznacznych pęków, wyznaczających przekrój stożkowy k_x^2, który może być użyty do konstrukcji krzywej K_3. Dochodzimy zatem do twierdzenia:

Istnieje ∞^2 przekrojów stożkowych k_x^2, przy pomocy których można skonstruować jednobieżną krzywą klasy III-ej, daną przez dwa szeregi jedno-dwuznaczne (w^1) i (w^2). Każdy z tych przekrojów przechodzi przez trzy stałe punky T_1, T_2, T_2, w których krzywa dotyka podstaw w_1 i w_2.

4. Punkt styczności dowolnej stycznej krzywej k_3 da się wyznaczyć również na podstawie Geometrji nowszej. Konstrukcja ta zasługuje dlatego na uwagę, że prowadzi do wyznaczenia środka krzywizny w dowolnym punkcie krzywej k_3.

Wyobraźmy sobie dowolny przekrój stożkowy C_2, przechodzący przez punkt A^1, A^2 i punkt 5 przekroju stożkowego k^2.

Jeżelibyśmy rzucili punkty tego przekroju raz z punktu A^1 na podstawę w_2, drugi raz z punktu A^2 na podstawę w_1, to otrzymalibyśmy dwa rzutowe szeregi, któreby z jedno-dwuznacznemi szeregami (w_1) i (w_2) miały jednę parę odpowiednich punktów E^1E^2 wspólną. Z tego wynika, że krzywa c'_2, którąby utworzyły wspomniane dwa rzutowe szeregi, miałyby z krzywą k_3 jednę styczną E^1E^2 wspólną; krzywe te miałyby dwie bezpośrednio po sobie następujące styczne wspólne, czyli wspólny punkt styczności T_e na stycznej E^1E^2, gdyby krzywe k^2 i c^2 w punkcie 5 miały wspólną styczną.

Wyobraźmy sobie w końcu taki przekrój stożkowy c^2, któryby z przekrojem stożkowym k^2 miał w punkcie 5 trzy bezpośrednio po sobie następnjące punkty wspólne, to przekrój c'_2 miałby w punkcie T_e z krzywą k_3 również trzy bezpośrednio po sobie następujące punkty wspólne. W tym przypadku krzywe k_3 i c'_2 miałyby wspólny środek krzywizny. Jeżelibyśmy więc konstrukcją na figurze 9 lub 11 wskazaną znaleźli środek krzywizny w punkcie T_e dla przekroju stożkowego c'_2, to byłby on również dla krzywej k_3.

a) Przekrój c^2 ściśle styczny do przekroju k^2 w punkcie 5 odpowiada przekrojowi k^2 środkowo-kolineacyjnie — dla punktu 5 jako środka, wspólnej cięciwy $5A^1$ jako osi kolineacji [1]. Ażeby przekrój c^2 wykreślić, należy przedewszystkiem wyznaczyć punkt krzywej k^2, który odpowiada kolineacyjnie punktowi A^2. W tym celu należy połączyć punkt A^2 ze środkiem kolineacji, t. j. z punktem 5, i wyznaczyć punkt przecięcia się tego promienia z przekrojem k^2 (na rysunku schodzi się ten punkt z punktem 4). Mając daną oś kolineacji $A'5$, środek kolineacji 5 i parę punktów odpowiednich A^2, 4, z łatwością wykreślimy przekrój c^2, ściśle styczny do k^2 w punkcie 5.

b) Przy pomocy przekroju c^2 wykreślimy przekrój c'_2, ściśle styczny do krzywej k_3 w punkcie T_e. Jeżeli mianowicie rzucimy dowolny punkt U krzywej c^2 raz z punktu A^1 na podstawę w_2, drugi raz z punktu A^2 na podstawę w_1,

[1]) E. Weyr. Projective Geometrie. Cz. II.

to otrzymamy dwa odpowiednie punkty U_1, U_2 rzutowych szeregów, które wyznaczają krzywą c'_2. Prosta zatem $U_1 U_2$ jest styczną krzywej c'_2. Z tego określenia stycznej przekroju c'_2 łatwo wywnioskować, że styczne s_1, s_2, w punktach A^1, A^2 do krzywej c^2 wykreślone, są również stycznemi do krzywej c'_2, a nadto, że krzywa c'_2 dotyka podstaw w_1, w_2 w punktach, w których krzywa c_2 te podstawy przecina. Temi elementami jest krzywa c'_2 aż nadto dokładnie wyznaczona, możemy zatem metodą Brianchona wyszukać punkt styczności T_e stycznej E^1E^2, który jest punktem ścisłej styczności między krzywemi k_3 i c'_2.

c) Mając wyznaczony przekrój stożkowy c'_2, wykreślimy środek krzywizny jego w punkcie T_e sposobem na fig. 11 podanym.

Na tablicy I użyto do tego celu stycznych s_1 i w_1 i ich punktów styczności S_1 i S_3 (S_3 przypadkowo schodzi się z punktem C_1), zatrzymując wszystkie znakowania figury 11 dla łatwiejszego orjentowania się.

Środek krzywizny K przekroju stożkowego c'_2 w punkcie T_e jest środkiem krzywizny również krzywej k_3.

5. Wyobraźmy sobie obecnie ruch prostej A^1A^2 po krzywej klasy trzeciej k_3. (Ta sama tablica I). Gdy prosta ta obwija krzywą k_3, to jej punkt $A^1{}_1$ wytwarza na dowolnej prostej $w^1{}_1$ szereg punktów $A^1{}_1, B^1{}_1, C^1{}_1, D^1{}_1, E^1{}_1, \ldots T^1{}_2 \ldots$, zaś punkt jej A^2 wytwarza na stycznej podwójnej w_2 krzywej k_3 szereg punktów $A^3 \equiv A^2$, $B^3 \equiv A^2$, $C^3 \equiv C^2$, $D^3 \equiv D^2$, $E^3 \equiv E^2, \ldots T^3 \equiv T^2, \ldots$ Te dwa szeregi są jedno-trójznaczne, gdyż z każdego punktu szeregu $(w^1{}_1)$ wychodzą po trzy styczne do k_3, które przecinają podstawę $w_3 \equiv w_2$ w trzech punktach odpowiednich szeregu trójznacznego, z każdego jednak punktu szeregu (w_3) wychodzi tylko jedna styczna do k_3, która przecina $w^1{}_1$ w odpowiednim punkcie szeregu jednoznacznego. Te dwa szeregi są w perspektywicznem położeniu, gdyż punkt VII∞, w którym przecinają się podstawy $w^1{}_1$ i w_3 sam sobie odpowiada. Jeżeli szeregi te rzucimy raz z dowolnego punktu W_1 prostej w_3, drugi raz z dowolnego punktu W_3 prostej $w^1{}_1$, to otrzymamy dwa jedno-trójznaczne pęki, które wytworzą krzywą rzędu IV-go k^4. Krzywa ta będzie miała w punkcie W_3 punkt potrójny, w punkcie W_1 punkt pojedyńczy[1]).

Na rysunku są mianowicie między innemi wyznaczone punkty krzywej k^4: I$\equiv[W_1A_1{}^1, W_3A^2]$, II$\equiv[W_1B_1{}^1, W_3B^2]$, III$\equiv[W_1C_1{}^1, W_3B^2]$, IV$\equiv[W_1D_1{}^1, W_3D^2]$, V$\equiv[W_1E_1{}^1, W_3E^2]$, VI$\equiv[W_1T_1{}^1, W_3T]$, VII$\infty\equiv(w_1{}^1, w_3)$, VIII$\equiv[W_1{}^1Y_1{}^1, W^3Y_3]$.

a) Styczną w dowolnym punkcie krzywej k^4 znajdziemy na podstawie ruchu prostej po krzywej k_3.

[1]) Por. M. Łazarski. O konstrukcji i własnościach krzywych rzędu IV-go z punktem potrójnym. Tom XV Rozpraw Akad. Umiej. Kraków. 1886.

Weźmy np. pod uwagę styczną E^1E^2. Ruch jej obrotowy około punktu styczności T_e, jako chwilowego punktu obrotu, powoduje ruchy postępowe punktów $E^2, E^1, E_1{}^1$ po prostych w_3, w_1, $w_1{}^1$. Od ruchów postępowych punktów $E^2, E^1{}_1$, są zależne ruchy odpowiednich promieni W_3E^2, $W_1E_1{}^1$ pęków (W_3) i (W_1). Przy tych ostatnich ruchach nabywa wspólny punkt V tych promieni dwóch prędkości obrotowych, które się składają na ruch postępowy tego punktu po stycznej w tym punkcie do krzywej k^4.

Oznaczmy więc prędkość obrotową punktu E^2 przez E^2O. Z tej prędkości otrzymamy prędkość postępową E^2O_1 tego punktu na prostej w_2, jeżeli przez O poprowadzimy $OO_1 \parallel E_1E_2$, z tej zaś prędkość obrotową E^2O_2 punktu E^2 na promieniu E^2W^3, gdy ograniczymy odcinek $O^2E^2 \perp E^2W_3$ prostą $O_1O_2 \parallel E^2W_3$. Ograniczając w końcu odcinek $VO_3 \perp E^2W_3$ promieniem O_3W_3, otrzymamy prędkość punktu V, której ten punkt nabywa, gdy promień W_3V obraca się około W_3.

Z przyjętej prędkości E^2O wyniknie prędkość obrotowa $E_1{}^1O_1'$ punktu $E_1{}^1$, jeżeli odcinek $E_1{}^1O_1' \perp E_1{}^1E^2$ ograniczymy promieniem OT_e. Z prędkości $E_1{}^1O_1'$ dochodzimy następnie znanemi konstrukcjami do prędkości VO_4', jakiej punkt V nabywa, gdy promień W_1V obraca się około punktu W_1.

Z prędkości obrotowych VO_3, VO_4' punktu V otrzymujemy znaną konstrukcję (fig. 5) prędkość tego punktu na stycznej VV_t, wykreślonej w punkcie V do krzywej rz. IV-go k^4.

Prędkość obrotową stycznej $E_1{}^1E^2$ przyjęliśmy dowolnie jako odcinek E^2O. Mogliśmy byli jednak wyjść od znanej prędkości E^2V_4.

Podobnie jak styczną w punkcie V wyznaczono na rysunku styczną t_y w punkcie VIII krzywej k^4.

b) Styczną w dowolnym punkcie krzywej k^4 wykreślić można również na podstawie Geometrji nowszej, co nas prowadzi do konstrukcji środka krzywizny w dowolnym punkcie krzywej.

Wyobraźmy sobie taki przekrój stożkowy $c_2{}^2$, któryby był ściśle styczny w punkcie T_e do krzywej klasy III-ej k_3, a prócz tego dotykał podstaw $w_1{}^1, w_3$. Styczne do przekroju $c_2{}^2$ wyznaczają na podstawach $w_1{}^1, w_3$ dwa rzutowe szeregi, które połączone z punktami W_1 i W_3 dadzą dwa rzutowe pęki, które utworzą przekrój stożkowy $c_2{}^1$. Przekrój stożkowy $c_2{}^1$ przechodzić będzie przez punkty W_1 i W_3 i będzie, jak łatwo wywnioskować, ściśle styczny do krzywej k^4 w punkcie V. Stycznej bowiem $E_1{}^1E^2$ przekroju $c_2{}^2$ w punkcie T_e odpowiada punkt V przekroju stożkowego $c_2{}^1$, który otrzymamy jako punkt przecięcia się promieni $W_1E_1{}^1$ i W_3E^2. Punkt ten, jak widzimy, jest wspólny dla krzywych $c_2{}^1$ i k^4. Krzywe k^4 i $c_2{}^1$ będą w punkcie V miały dwa, trzy bezpośrednio po sobie następujące punkty wspólne, jeżeli ze styczną $E_1'E^2$ zejdą się dwie, trzy styczne krzywych k_3 i $c_2{}^2$ czyli jeżeli krzywe k_3 i $c_2{}^2$ będą w punkcie T_e styczne wzgl. ściśle styczne do prostej $E^2E_1{}^1$. Jednak przekrój

c_2^2, będąc ściśle styczny do k_3 w punkcie T_s, jest ściśle styczny do przekroju stożkowego c_2', ściśle stycznego w tym punkcie do k_3. Przekrój c_2^2 da się zatem skonstruować przy pomocy przekroju c_2'. Przekroje te bowiem pozostają ze sobą w związku kolineacyjnym, dla którego styczna $E_1^1E^2$ jest osią kolineacji, punkt E^2, w którym wspólna styczna w_2 przecina E^1_1E, środkiem kolineacji. Krzywa c_2^2 da się włęc z łatwością wykreślić. Szukamy przedewszystkiem punktu styczności R_1 stycznej w_1^1 krzywej c_2^2. W tym celu kreślimy z punktu E_1' styczną $E_1'R$ do przekroju c_2'; styczna ta odpowiada kolineacyjnie stycznej w_1^1 do c_2^2, jej punktowi styczności R odpowiada kolineacyjnie punkt styczności R_1 stycznej w_1^1. Jeżeli więc środek kolineacji E^2 połączymy z R, to prosta ta przecina w_1^1 w szukanym puncie R_1.

W ten sam sposób wyznaczamy styczną s_1' krzywej c_2^2, która odpowiada kolineacyjnie stycznej s_1, wykreślonej do c_2' z punktu A^1. Styczna s_1' przecina podstawy w_1^1, w_2 w punktach I^1 i I^3 [I^3 schodzi się przypadkowo na rysunku z C^2]. Promienie W^1I^1 i W_3I^3 przecinają się w punkcie I przekroju stożkowego c_2^1, ściśle stycznego do krzywej k^4 w punkcie V. Przekrój c_2^1 jest zatem punktami W_1, W_3, I, V i styczną VS_V dokładnie wyznaczony, możemy zatem użyć do konstrukcji środka krzywizny K_1 w punkcie V krzywej k^4 (porówn. fig. 11).

Na rysunku przeprowadzono konstrukcję środka krzywizny przy pomocy stycznych f i t do c_2^1 w punktach I i W_1. Styczne t i f przecinają się w punkcie Q, prosta zaś QV przecina cięciwę W_1I w punkcie P, przez który przeprowadzono prostą $PS_V \parallel IV$. Punkt przecięcia się tej prostej z cięciwą VW_1 oznaczono P_0. Odcinek VS_V przyjęto za prędkość postępową punktu V na stycznej, a z tej prędkości wyprowadzono znaną konstrukcję prędkość obrotową S_VP_4, której punkt S_V nabywa, gdy styczna VS_V obraca się około swego punktu styczności.

Przy pomocy prędkości VS_V i S_VP_4 wykreślamy środek krzywizny K_1 przekroju stożkowego c_2^1, a zatem i krzywej rz. IV-go k^4.

c) Jeżeli krzywa jednobieżna k^4 jest wyznaczona przez dwa jedno-trójznaczne pęki (W_1) i (W_3), to każda para odpowiednich promieni przecina te pęki w dwu jedno-trójznacznych szeregach w perspektywicznem położeniu, które wyznaczają krzywą klasy III-ej k_3, przy pomocy której da się w sposób kinematyczny skonstruować krzywu rz. IV-go k^4. Ponieważ za wierzchołek pęku jednoznacznego (W_1) może być przyjęty dowolny punkt krzywej k^4, przeto dochodzimy do twierdzenia:

Istnieje ∞^2 jednobieżnych krzywych klasy III-ej k_3, przy pomocy których da się w sposób kinematyczny skonstruować dana krzywa jdnobieżna rz. IV-go k^4. Wszystkie krzywe k_3 dotykają stycznych krzywej k^4 w punkcie potrójnym W_3.

Gdy dana była krzywa jednobieżna klasy III-ej k_3 przez swe jedno-dwuznaczne szeregi (w_1) i (w_2), to do jednobieżnej krzywej rz. IV-go k^4 doszliśmy w ten sposób, że przyjęliśmy dowolny punkt W_3, przez ten poprowadziliśmy dowolną prostą w_1^1, następnie na stycznej podwójnej w_2 przyjęliśmy dowolny punkt W_1, z czego wnosimy, że zapomocą ruchu prostej po jednobieżnej krzywej kl. III-ej k_3 można utworzyć ∞^4 jednobieżnych krzywych rz. IV-go k^4. Wszystkie te krzywe przechodzą przez punkty T_1 i T_2, w których styczna podwójna w_2 dotyka krzywej k_3.

6. Rzućmy krzywą k^4 raz z punktu potrójnego W_3 na dowolną prostą w_4, drugi raz z dowolnego punktu W_1^1 prostej w_4 na prostą w_1^2, dowolnie przechodzącą przez punkt W_3. Otrzymamy w ten sposób na prostych w_1^2 i w_4 dwa jedno-czteroznaczone szeregi, które wyznaczą krzywą jednobieżną klasy V-ej k_5.

Styczne, punkty styczności i środki krzywizny tej krzywej skonstruujemy w sposób kinematyczny przy pomocy krzywej rz. IV-go k^4.

Wychodząc zatem z ruchu punktu po przekroju stożkowym, wyznaczymy w sposób kinematyczny punkty, styczne i środki krzywizny jakiejkołwiek jednobieżnej krzywej klasy $2n+1$, jak również jakiejkolwiek jednobieżnej krzywej rz. $2n+2$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$.

III.

Ruch prostej po przekroju stożkowym i z nim związana konstrukcja punktów stycznych i środków krzywizn jednobieżnych krzywych rzędu $(2n+1)$ i jednobieżnych krzywych klasy $(2n+2)$.

$(n=1, 2, 3, \ldots)$.

1. Ruchowi punktu po krzywej rz. II odpowiada dwoiście ruch prostej po krzywej klasy II, a konstrukcjom na jednobieżnych krzywych klasy $(2n+1)$ wzgl. rzędu $(2n+2)$ z pierwszym ruchem związanym, odpowiadają dwoiście konstrukcje na jednobieżnych krzywych rz. $(2n+1)$ wzgl. kl. $(2n+2)$ z drugim ruchem związane.

Niech będzie dany przekrój stożkowy k^2 (Tablica II), po którym porusza się styczna, przyjmując położenia $s_1 \equiv a_2, s_2, s_3, s_4, s_5, \ldots$ Za prędkość obrotową tego ruchu w każdem położeniu może być przyjęty dowolny odcinek, prostopadły do stycznej.

Przetnijmy wszystkie styczne przekroju stożkowego k^2 styczną $s_1 \equiv a_2$ i dowolną prostą a_1, to otrzymamy dwa szeregi $A_2, B_2, C_2, D_2, E_2, \ldots$ i $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, \ldots$ Te szeregi są jedno-dwuznaczne, gdyż każdemu punktowi X_1 szeregu a_1 odpowiadają dwa punkty $X_1^2 X_2^2$ szeregu a_2; są to mianowicie

punkty przecięcia się z podstawą a_2 stycznych, poprowadzonych z x_1 do k^2, i naodwrót każdemu punktowi x^2 szeregu a_2 odpowiada tylko jeden punkt szeregu a_1; jest to mianowicie punkt przecięcia się z a_1 jedynej stycznej, poprowadzonej z X^2 do k^2. Punktowi A przecięcia się obu podstaw, zaliczanemu do szeregu a_1, odpowiadają w szeregu a_2 dwa punkty, z których jeden schodzi się z A, drugi z punktem styczności A_2' podstawy a_2 z przekrojem k^2. Szeregi (a_1) i (a_2) są zatem w perspektywicznem położeniu.

Jeżeli szeregi (a_1) i (a_2) rzucimy raz z dowolnego punktu W_1 prostej a_2, drugi raz z dowolnego punktu W_2 prostej a_1, to otrzymamy dwa jedno-dwuznaczne pęki, które wyznaczają krzywą rzędu III-go k^3, która w punkcie W_2 ma punkt podwójny, w punkcie W_1 punkt pojedyńczy.

Krzywe k^3 jest dokładnie wyznaczona przez punkt podwójny W^2 i sześć swych dalszych punktów, a mianowicie: W_1, $A \equiv (s_1 . a_1)$, $B \equiv (W_1 B_1 . W_2 B_2)$, $C \equiv (W_1 C_1 . W_2 C_2)$, $D \equiv (W_1 D_1 . W_2 D_2)$, $E \equiv [W_1 E_1 . W_2 E_2]$ [1].

Dalsze punkty krzywej k^3 dadzą się z łatwością wykreślić przy pomocy krzywej k^2. Niech bowiem dowolna styczna x przekrojn stożkowego k^2 przecina podstawy a_1, a_2, w punktach X_1 i X_2, to promienie $W_1 X_1$ i $W_2 W_2$ przecinają się w punkcie X krzywej k^3.

Łatwo również uzasadnić, że styczne σ_1, σ_2 i σ_3, poprowadzone z punktu W^2 wzgl. W_1 do k^2, są stycznemi w tych punktach do krzywej k^3, która przejść również musi przez punkt A_2', w którym a_2 dotyka przekroju k^2.

2. Styczne w poszczególnych punktach krzywej k^3 wyznaczymy na podstawie ruchu stycznej po przekroju k^2.

Wykreślmy np. styczną w punkcie B do krzywej k^3. Punkt B wyznaczyliśmy przy pomocy stycznej s_2 do krzywej k^2. Niech styczna s_2 obraca się około swego punktu styczności T_b z prędkością $B_2 V$. Z tej prędkości wyprowadzimy prędkość postępową $B^2 V^1$ punktu B^2 po prostej a_2, a z tej ostatniej prędkość obrotową $B^2 V_2$ punktu B^2 i prędkość obrotową BV_3 punktu B, których te punkty nabywają, gdy promień $W_2 B^2$ obraca się około punktu W_2. Z prędkości $B^2 V$ otrzymamy również prędkość obrotową punktu B_1, jeżeli ograniczymy odcinek $B_1 V' \perp B_1 B_2$ promieniem $VV' T_b$. Z prędkości $B_1 V'$ wyprowadzamy znanemi konstrukcjami prędkość BV_3', jakiej punkt B nabywa, gdy promień BW_1 obraca się około punktu W_1.

Z prędkości obrotowych BV_3 i BV_3' otrzymujemy znaną konstrukcją (por. fig. 5) prędkość wypadkową BV_b punktu B, a kierunek tej prędkości daje styczną w tym punkcie do krzywej k^3.

W ten sam sposób przeprowadzono na rysunku konstrukcję stycznych w punktach C i D, jednak dla przejrzystości rysunku nie opisano ich.

[1] E. Weyr. Theorie der mehrdeutigen geom. Elementargebilde.

3. Styczną w punkcie A lub A_2' wyznaczymy w sposób następujący:

Krzywą k^3 można wykreślić również przy pomocy innego przekroju stożkowego k_x^2, który otrzymamy, gdy jedno-dwuznaczne pęki $W^1(A^1 B^1 \ldots)$ i $W^2(A^2, B^2, C^2, \ldots)$ przetniemy dowolną parą promieni odpowiednich $W^2 X^2$ i $W_1 X_1$; na promieniach tych otrzymujemy mianowicie dwa jedno-dwuznaczne szeregi w położeniu perspektywicznem, które wyznaczają właśnie przekrój stożkowy k_x^2.

Przekrój k_x^2 dotyka stycznych σ_1, σ_2, σ_3 krzywej k^3, stycznej $X_1 X_2$ przekroju k^2, a nadto promienia $W_1 X_1$; jest on zatem przez te styczne dokładnie wyznaczony.

Możemy obecnie przedstawić sobie, że krzywa k^3 jest wytworzona przez ruch stycznej $X_1 X_2$ po przekroju stożkowym k_x^2. Z prędkości obrotowej tej stycznej wyprowadzamy styczne do krzywej k^3. Przeprowadźmy konstrukcję np. stycznej w punkcie A_2'. Promień $W_2 A_2'$ przecina podstawę $W_1 X$ w punkcie X_1^1, odpowiedni zaś promień $W_1 A_2'$ przecina podstawę $W_2 X$ w punkcie X^2, prosta zatem $X_1^1 X^2$ jest styczną przekroju stożkowego k_x^2. Kostrukcją Brianchona wyznaczymy jej punkt styczności T_k. Jeżeli za prędkość obrotową punktu X_1^1, przy obrocie stycznej $X_1^1 X^2$ około punktu styczności T_k, przyjmiemy odcinek $X_1' Z \perp X_1^1 X^2$, to znanemi konstrukcjami wykreślimy styczną w punkcie A_2'. Tak samo wyznaczono styczną do krzywej k^3 w punkcie A przy pomocy przekroju stożkowego k_x^2.

Zauważyć należy, że:

Istnieje ∞^2 przekrojów stożkowych k_x^2, przy pomocy których da się wykreślić jednobieżna krzywa rz. III-go k^3, dana przez dwa jedno-dwuznaczne pęki (W^1) i (W_2). Wszystkie te przekroje dotykają stycznych σ_1, σ_2, σ_3, w punkcie W_2 i W_1 do krzywej k^3 wykreślonych.

4. Styczną w dowolnym punkcie np. E można wykreślić jeszcze i w sposób syntetyczny, co prowadzi nas do konstrukcji środka krzywizny krzywej k^3 w jej dowolnym punkcie.

Wyobraźmy sobie zamiast przekroju stożkowego k^2 taki przekrój stożkowej c^2, któryby dotykał podstaw a_2, a_1 i stycznej $E_1 E^2$ przekroju k^2. Styczne przekroju c^2 wyznaczyłyby na podstawach a_2 i a_1 dwa rzutowe szeregi, któreby z szeregami jedno-dwuznacznemi $(A_1 B_1 C_1, \ldots)$ i $(A^2 B^2 C^2, \ldots)$ miały jednę parę punktów E_1 i E^2 wspólną. Gdybyśmy następnie te szeregi rzutowe rzucili z punktów W^1 i W_2, to otrzymalibyśmy dwa rzutowe pęki, któreby wyznaczyły przekrój stożkowy c_1^2. Przekrój ten przechodziłby przez punkty W_1, W_2 i miałby z krzywą k^3 wspólny punkt E. Krzywe k^3 i c_1^2 miałyby wspólną styczną w punkcie E, gdyby krzywe c^2 i k^2 miały w punkcie T_e wspólny punkt styczności. W końcu krzywe k^3 i c_1^2 byłyby w punkcie E ściśle styczne, gdyby krzywe k^2 i c^2 były w punkcie T_e ściśle styczne. Przekrój

c^2 ściśle styczny do przekroju k^2 w punkcie T_e odpowiada k^2 kolineacyjnie, przyczem wspólna styczna E_1E^2 jest osią kolineacji, punkt E^2, w którym oś kolineacji przecina się ze wspólną styczną obu krzywych, t. j. z a_2, jest środkiem kolineacji. Celem wyznaczenia przekroju c^2 prowadzimy z punktu E^1 styczną E^1S do k^2. Styczna ta odpowiada kolineacyjnie stycznej a_1 krzywej c^2. Punktowi zatem styczności S stycznej SE_1 odpowiada kolineacyjnie punkt styczności S' stycznej a_1. Punkt S' otrzymamy zatem, jeżeli punkt S połączymy ze środkiem kolineacji E_2 i znajdziemy punkt przecięcia się tej prostej z a_1. Mając dane dwie styczne a_1 i E_1E^2 i ich punkty styczności S' i T_e znajdziemy z łatwością punkt S_1, w którym c^2 dotyka stycznej a^2. Temi elementami jest przekrój c^2 aż nadto dokładnie wyznaczony.

Przy pomocy przekroju c^2 da się z łatwością wykreślić przekrój c_1^2, który przechodzić musi przez punkty W_1, W_2, S, S_1 i w punkcie E posiada z krzywą k^3 trzy bezpośrednio po sobie następujące punkty, a zatem i wspólny środek krzywizny K_e. Styczną w punkcie E do krzywej k^3 wykreślić zatem można sposobem Pascala jako styczną przekroju ściśle stycznego c_1^2, środek zaś krzywizny K_e konstrukcją podaną na figurze 11.

Na tablicy II wykreślono również promień krzywizny krzywej k^3 w punkcie D.

5. Wyobraźmy sobie teraz, że punkty $A, B, C, \ldots$ krzywej k^3 rzucamy raz z punktu $G_1 \equiv W_2$ na dowolną prostą a_3, z punktu zaś G_3, dowolnie obranego na a_3, na prostą a_1^1 dowolnie poprowadzoną przez W_2. Otrzymamy w ten sposób dwa jedno-trójznaczne szeregi: $A_1^1, B_1^1, C_1^1, D_1^1, E_1^1, F_{1I}, G_1^1, \ldots$ i $A^3, B^3, C^3, D^3, E^3, F^3, G^3, G^3, G^3$, w których punkty G_1 i G_2 sobie odpowiadają. Szeregi te wyznaczają krzywą klasy czwartej k_4, mającą podstawę a_3 za styczną potrójną, podstawę a_1 za styczną pojedyńczą.

Punkty styczności stycznych krzywej k_4 wyznaczamy w sposób kinematyczny przy pomocy krzywej k^3.

a) Przeprowadźmy konstrukcję punktu styczności stycznej $B_1^1B^3$.

Styczną tę otrzymaliśmy przez rzut punktu B krzywej k^3 z punktów G_3 i $G_1 \equiv W_2$ na proste a_1^1 i a_3. Z ruchem punktu B po krzywej k^3 związane są ruchy obrotowe promieni G_1BB_3 i $G_3BB_1^1$. Jeżeli więc przyjmiemy odcinek BV_b za prędkość postępową punktu B po stycznej w tym punkcie do k^3, to z prędkości tej wyprowadzimy znanemi konstrukcjami prędkości obrotowe tych promieni, prędkości postępowe punktów B_3 i B_1^1 na prostych a_3 i a_1^1, a następnie prędkości B_3V_3' i $B_1^1V_b^4$, których te punkty nabywają, gdy styczna $B_3B_1^1$ krzywej k_4 obraca się około swego punktu styczności. Prosta zatem, łącząca punkty końcowe V_3' i V_b^4 przecina styczną w punkcie jej styczności B'.

b) Punkt styczności E' stycznej $E_1^1E^3$ i w tym punkcie środek krzywizny K_e' krzywej k_4 wykreślono na rysunku przy pomocy przekroju stożkowego c_3^2, który jest w punkcie E' ściśle styczny do krzywej k_4 i dotyka prostych a_1^1 i a_3. Przekrój c_3^2 otrzymano w sposób następujący:

Wykreślono przekrój c_2^2 ściśle styczny w punkcie E do przekroju stożkowego c_1^2, a przechodzący przez punkty G_1 i G_3. Ponieważ przekrój c_1^2 jest w punkcie E ściśle styczny do krzywej k^3, przeto również przekrój c_2^2 jest ściśle styczny w tym punkcie do k^3. Jeżeli zatem rzucimy przekrój c_2^2 z punktów G_1 i G_3 na proste a_1^1 i a_3, to otrzymamy dwa rzutowe szeregi, które wyznaczą przekrój stożkowy c_3^2 ściśle styczny w punkcie E' do krzywej k_4 i dotykający prostych a_1^1 i a_3. Przy pomocy tego przekroju wykreśloną znaną konstrukcję środek krzywizny K_e'.

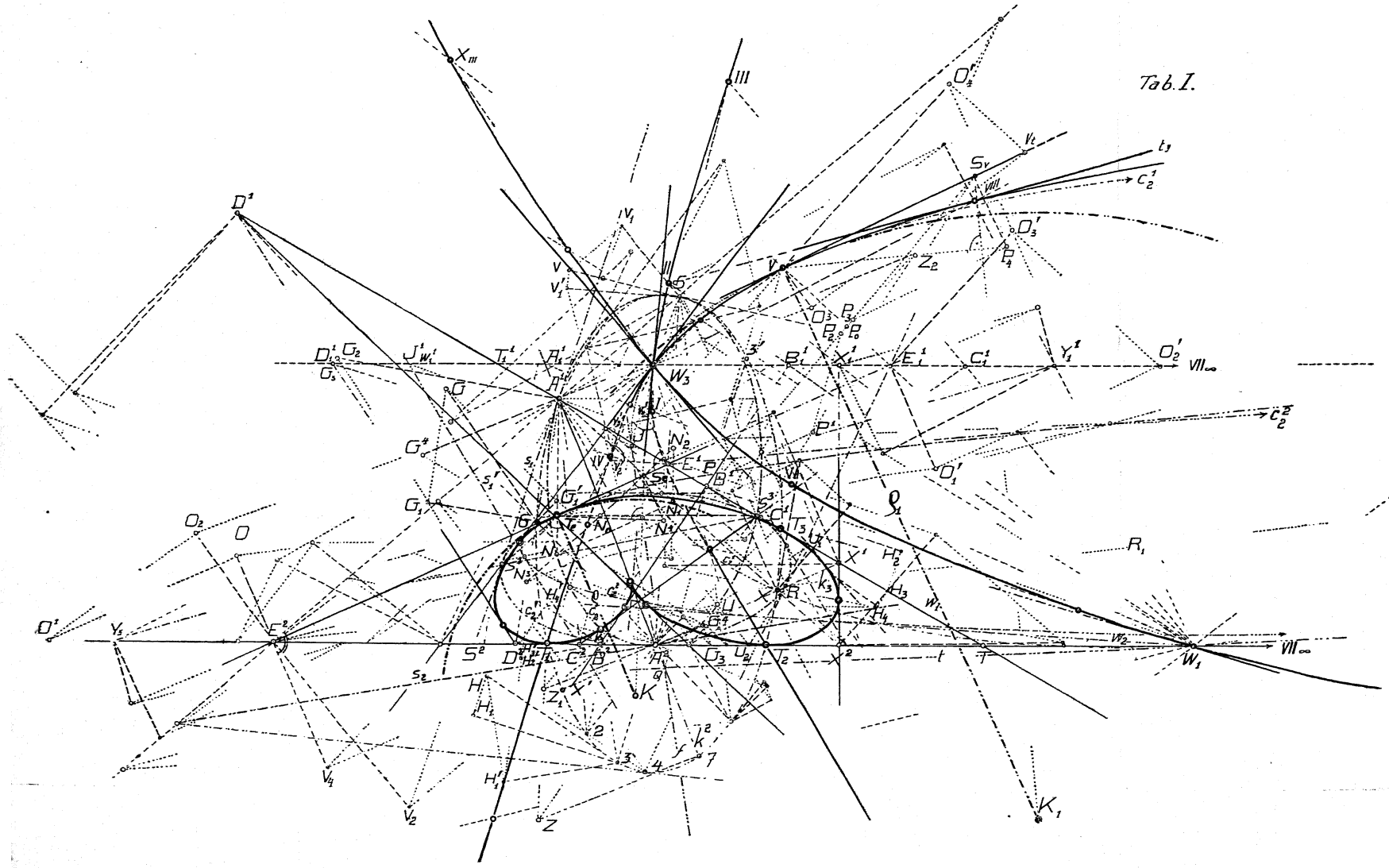
6. Wyobraźmy sobie teraz, że styczne krzywej klasy czwartej k_4, przecinamy dowolną prostą h_1 i prostą h_4 schodzącą się z a_3. Otrzymamy w ten sposób dwa jedno-czteroznaczne szeregi na tych prostych w perspektywicznem położeniu, gdyż punkt przecięcia się podstaw h_1 i h_4 sam sobie raz odpowiada. Jeżeli szeregi te rzucimy raz z punktu I_4, leżącego na prostej h_1, drugi raz z punktu I_1, leżącego na prostej h_4, to otrzymamy dwa jedno-czteroznaczne pęki, które wyznaczają krzywą rz. V-go k^5, mającą w punkcie I_4 punkt poczwórny[1]. Konstrukcja stycznych i środków krzywizn da się przeprowadzić sposobem kinematycznym przy pomocy krzywej kl. IV k_4.

Wychodząc zatem z ruchu prostej po przekroju stożkowym, wyznaczymy w sposób kinematyczny styczne, punkty styczności i środki krzywizn jakiejkolwiek jednobieżnej krzywej rz. $(2n+1)$, jak również jakiejkolwiek jednobieżnej krzywej klasy $(2n+2)$ $[n = 1, 2, 3, \ldots]$.

---

[1]) Własność tej krzywej zbadał autor w rozprawie p. t.: „B. Kalicun. Über die Eigenschaften der ebenen kurven V-er Ord. Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften in Wien. Tom CXIX, rok 1910.

Tab. I.



Tab. II.