ROMUALD WITWIŃSKI.
pporucznik jazdy.

O przekształceniu kwadratowem uogólnionem i jego zastosowaniu do badania powierzchni trzeciego rzędu o czterech punktach podwójnych.

Sur la transformation quadratique généralisée et son application à l'étude des surfaces du troisième ordre à quatre points doubles.

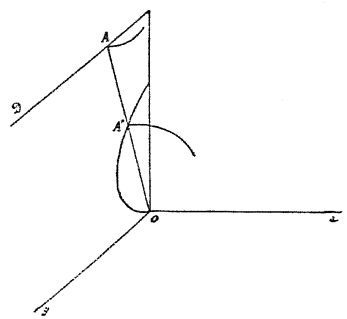
Rozważania, stanowiące przedmiot pracy niniejszej, nasunęły mi się przy rozwiązywaniu następującego zagadnienia, zakomunikowanego mi przez profesora Uniwersytetu moskiewskiego Cyngera:

„Na płaszczyźnie yOz układu prostokątnego osi Ox, Oy, Oz dane są koło (C) i prosta (D), wyznaczone przez równania

$$(C) \qquad y^2 + z^2 - c'z = 0,$$

$$(D) \qquad z - c = 0.$$

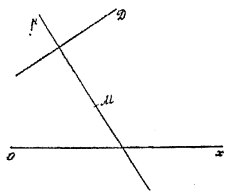
Uważajmy hyperbolę równoboczną (H), położoną na płaszczyźnie (II) (rys. 1), przechodzącej przez oś Ox, której wierzchołki rzeczywiste A i A' są położone — pierwszy na prostej (D), drugi na kole (C), przyczem punkt A' jest różny od punktu O.



Rys. 1.

1. Jeżeli płaszczyzna Π obraca się dokoła osi Ox, wówczas hyperbola (H) wytwarza powierzchnię rzędu trzeciego (S), styczną do płaszczyzny xy wzdłuż osi Ox.

2. Uważajmy prostą zmienną (Δ), opierającą się na osi Ox i na prostej (D), oraz punkt M (rys. 2), nie położony na prostych Ox i (D) — przecięcie prostej Δ z powierzchnią sześcienną (S).



Rys. 2.

Udowodnić, iż spółrzędne punktu M wyrażają się wymiernie w funkcji dwóch spółrzędnych zmiennych punktu μ — śladu prostej Δ na płaszczyźnie $z = 2c$.

3. Gdy punkt M porusza się po przekroju powierzchni (S) przez płaszczyznę (P), wówczas punkt μ opisuje krzywą sześcienną (Γ), i gdy zmienia się położenie płaszczyzny (P), wówczas krzywa (Γ) przechodzi przez sześć punktów stałych, stanowiących wierzchołki pewnego czworoboku zupełnego.

4. Znaleść wszystkie proste, nakreślone na powierzchni.

5. Gdy punkt M porusza się na powierzchni (S) w ten sposób, iż płaszczyzna, styczna w punkcie M, przechodzi przez punkt stały przestrzeni Q, wówczas punkt μ zakreśla stożkową.

Przy jakiem położeniu punktu stałego Q stożkowa ta rozpada się na dwie proste, albo sprowadza się do prostej podwójnej?

Co możemy stąd wnosić o stożku, opisanym na powierzchni (S), którego wierzchołek jest położony w punkcie Q?

6. Zbadać miejsce punktu M, gdy punkt μ porusza się po prostej, położonej na płaszczyźnie $z = 2c$".

Powierzchnia, której badanie stanowi treść zagadnienia Cyngera, jest, jak to okażemy niżej, powierzchnią rzędu trzeciego o czterech punktach podwójnych. Zajmiemy się więc badaniem własności tego rodzaju powierzchni: rozwiązanie zagadnienia Cyngera wyniknie bezpośrednio. W tym celu wprowadzimy do naszych rozważań przekształcenie, które może być uważane jako pewnego rodzaju uogólnienie przekształcenia płaskiego stopnia drugiego.

1. **Przekształcenia** (T). — Będziemy nazywali przekształceniem (T) przekształcenie punktowe inwolucyjne, które podporządkowuje sobie dwa punkty m i m', o spółrzędnych jednorodnych

$$(x, y, z, t) \text{ i } (x', y', z', t')$$

względem jednego i tego samego czworościanu odniesienia, związanych zapomocą zależności

$$xx' = A, \quad yy' = B, \quad zz' = C, \quad tt' = D.$$

Wnosimy bezpośrednio, iż jednemu wierzchołkowi czworościanu odniesienia odpowiadają wszystkie punkty ściany przeciwległej; taksamo, każdemu punktowi jednej krawędzi tego czworościanu odpowiadają wszystkie punkty krawędzi przeciwległej.

Łatwo widzieć, iż jakakolwiek prosta przekształca się na krzywą sześcienną skośną, opisaną na czworościanie odniesienia. Wnosimy stąd, iż powierzchnia rzędu n przekształca się naogół na powierzchnię rzędu $3n$, dla której wierzchołki czworościanu są punktami wielokrotnemi rzędu $2n$ i jego krawędzie tworzącemi rzędu n.

Zauważmy jeszcze, iż płaszczyźnie, przechodzącej przez krawędź, odpowiada płaszczyzna, przechodząca przez tę samą krawędź. Ponieważ płaszczyzny te są wzajemne, przeto znajdują się ze sobą w odpowiedniości inwolucyjnej; wobec tego przez każdą krawędź przechodzą dwie płaszczyzny, pokrywające się z płaszczyznami do nich homologicznemi. Prostej, opierającej się na dwóch krawędziach przeciwległych, innemi słowy, prostej wspólnej dwóm płaszczyznom, przechodzącym przez te krawędzie, odpowiadać więc będzie prosta analogiczna.

Jeżeli dwie rozważane płaszczyzny są podwójne, wówczas tę samą własność posiada i linja ich przecięcia; istnieją więc cztery proste podwójne, opierające się na każdej z par krawędzi przeciwległych czworościanu podstawowego.

2. Niech będzie Δ jedną z tych prostych podwójnych, opierającą się na krawędziach przeciwległych A i A' czworościanu podstawowego, oraz M i M' — dwie proste homologiczne, opierające się na tych samych krawędziach: rozważajmy przekształcenie punktowe (m, m') podporządkowywujące sobie ślady tych prostych M i M' na płaszczyźnie P, przechodzącej przez prostą Δ. Wykażemy, iż przekształcenie to stanowi homologję inwolucyjną.

W rzeczy samej, niech będą α i α' punkty, w których prosta Δ przecina krawędzie A i A'; ponieważ płaszczyzny AM i AM' odpowiadają sobie w inwolucji, przeto tę samą własność posiadają ślady tych płaszczyzn αm i $\alpha m'$; proste $\alpha' m$ i $\alpha' m'$ również kreślą pęki inwolucyjne, przyczem w dwóch tych

inwolucjach prosta $\alpha\alpha'$ odpowiada sama sobie. Niech będą $\alpha\omega$ i $\alpha'\omega$ dwa inne promienie podwójne tych inwolucyj, innemi słowy, sprzężone harmoniczne prostej $\alpha\alpha'$ względem kątów $m\alpha m'$ i $m\alpha' m'$: oczywistem jest, iż prosta mm' przechodzi przez punkt ω, i że odcinek mm' dzieli się harmonicznie w punkcie ω i w punkcie przecięcia z prostą $\alpha\alpha'$; wnosimy stąd, iż przekształcenie istotnie jest homologją.

Jeżeli punkt m pokrywa się ze śladem β lub γ krawędzi czworościanu, wówczas oczywiste jest, iż punkt m' pokrywa się ze śladem β' lub γ' krawędzi przeciwległej. Środek homologji ω jest więc punktem przecięcia przekątnych $\beta\beta'$ i $\gamma\gamma'$ czworoboku zupełnego $\alpha\alpha'\beta\beta'\gamma\gamma'$, wyznaczonego na płaszczyźnie P przez ślady krawędzi czworościanu podstawowego.

3. Powierzchnie rzędu trzeciego o czterech punktach podwójnych. — Na mocy uwag, poczynionych wyżej (№ 1) przekształcenie (T) podporządkowuje płaszczyźnie powierzchnię rzędu trzeciego, przechodzącą przez krawędzie czworościanu podstawowego i mającą za punkty podwójne wierzchołki tego czworościanu. Twierdzenie odwrotne jest oczywiste, albowiem równanie takiej powierzchni S ma postać

$$\frac{\alpha}{x}+\frac{\beta}{y}+\frac{\gamma}{z}+\frac{\delta}{t}=0\,.$$

Stwierdzimy z łatwością, iż płaszczyzna

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=0$$

dotyka powierzchni S we wszystkich punktach jednej krawędzi i przecina ją według innej tworzącej Δ, która również jest położona w płaszczyźnie

$$\frac{z}{\gamma}+\frac{\delta}{t}=0\,.$$

Tym sposobem, powierzchnia S posiada trzy tworzące Δ, odpowiednio opierające się na dwóch krawędziach przeciwległych czworościanu i położone jednocześnie w jednej płaszczyźnie

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}+\frac{t}{\delta}=0\,.$$

Wykażemy, iż proste te wraz z krawędziami czworościanu punktów podwójnych stanowią jedyne tworzące powierzchnie S.

4. Przekroje płaskie. — Zapomocą przekształcenia (T) każdemu punktowi m powierzchni S podporządkujemy punkt m' płaszczyzny P. Uważajmy

w sposób podobny płaszczyznę Q; to samo przekształcenie podporządkuje jej pewną powierzchnię Σ, analogiczną do powierzchni S, oraz krzywej (Q, S) podporządkuje krzywą (Σ, P) — krzywą sześcienną Γ, przechodzącą przez ślady na płaszczyźnie (P) krawędzi czworościanu podstawowego. Oznaczmy przez K czworobok zupełny, którego wierzchołkami są te ślady; mamy twierdzenie następujące:

Zapomocą przekształcenia (T) przekrojom płaskim powierzchni (S) podporządkowują się na płaszczyźnie (P) krzywe sześcienne Γ, opisane na czworoboku zupełnym K, utworzonym przez przekrój czworościanu punktów podwójnych.

Jeżeli płaszczyzna Q przechodzi przez jeden z punktów podwójnych a, wówczas krzywa Γ rozpada się na ślad płaszczyzny innych punktów podwójnych i na stożkową, przechodzącą przez ślady trzech krawędzi, wychodzących z punktu a. Jeżeli płaszczyzna Q przechodzi przez jednę krawędź czworościanu, wówczas krzywa Γ rozpada się na dwa boki czworoboku K i na prostą, przechodzącą przez punkt przecięcia trzech pozostałych boków.

5. Możliwy jest jeszcze inny sposób rozpadania się krzywej Γ: na przekątną $\alpha\alpha'$ czworoboku K i na stożkową, przechodzącą przez cztery wierzchołki β, β', γ, γ'. Tym sposobem, jak to zauważyliśmy w № 1, prostej $\alpha\alpha$, odpowiada prosta, opierająca się na A i A': jest to jedna z trzech tworzących Δ, omówionych w № 3; dwie inne tworzące odpowiadałyby przekątnym $\beta\beta'$ i $\gamma\gamma'$.

Tak więc, biorąc pod uwagę, iż rozpatrzyliśmy wszystkie sposoby rozpadania się krzywej Γ, wnosimy, iż otrzymaliśmy wszystkie tworzące powierzchni.

6. Linje asymptotyczne. — Poza przypadkami rozpadania się, krzywa Γ może przedstawiać punkt podwójny, gdy płaszczyzna Q jest styczna do powierzchni S. Wiadomo, iż w przypadku, gdy krzywa sześcienna, opisana na czworoboku zupełnym, stanowi punkt podwójny, wówczas styczne w tym punkcie są promieniami podwójnemi inwolucji, określonej przez proste, łączące punkt podwójny z wierzchołkami czworoboku: wnosimy stąd, iż styczne te dotykają każda jednej ze stożkowych, wpisanych w czworobok i przechodzących przez punkt podwójny. Stąd wynik:

Zapomocą przekształcenia (T) linjom asymptotycznym powierzchni S podporządkowują się na płaszczyźnie P stożkowe, wpisane w czworobok K.

7. Krzywe styczności stożków opisanych. — Szukajmy teraz przekształcenia krzywej styczności stożka o wierzchołkn σ, opisanego na powierzchni S. Ponieważ prostym, wychodzącym z punktu σ, odpowiadają krzywe sześcienne skośne, opisane na czworościanie podstawowym i przechodzące przez punkt σ',

przeto przekszałceniem szukanem jest miejsce punktów styczności tych krzywych sześciennych, które dotykają płaszczyzny P.

Dalej, wiadomo[1], iż ślady na płaszczyźnie stałej P krzywych sześciennych skośnych, przechodzących przez pięć punktów stałych, są to wierzchołki trójkąta sprzężonego ze stożkową stałą: jeżeli dwa z tych wierzchołków pokrywają się ze sobą, wówczas są one położone na tej stożkowej, która stanowi miejsce szukane. Stożkowa ta, jak wiadomo, jest sprzężona ze śladami dwóch prostych, łączących dwie pary punktów, dowolnie obranych zpośród pięciu punktów stałych. Tak więc, wszystkie stożkowe, które otrzymamy, podzielą harmonicznie odcinki $\alpha\alpha'$ $\beta\beta'$ i $\gamma\gamma'$. Mamy zatem:

Zapomocą przekształcenia (T) krzywej styczności stożka, opisanego na powierzchni S, podporządkowuje się na płaszczyźnie P stożkowa, dzieląca harmonicznie przekątne czworoboku K.

Wnosimy z łatwością, iż, gdy rozważać będziemy trzy z tych stożkowych, wówczas ich hesjanem będzie krzywa sześcienna μ, stanowiąca przekrój powierzchni S przez płaszczyznę wierzchołków trzech stożków rozważanych.

8. Ponieważ stożkowe, które otrzymaliśmy, są poddane jedynie dwóm warunkom linjowym, przeto mogą się one rozpadać na dwie proste, z których jedna jest zupełnie dowolna. Lecz w tym przypadku krzywa styczności przedstawia punkt podwójny i, co za tem idzie, punkt σ jest położony na powierzchni S. Z drugiej strony, wskazaliśmy w № 1, iż każdej prostej przekształcenie (T) podporządkowuje krzywą sześcienną skośną, opisaną na czworościanie punktów podwójnych. Mamy więc:

Stożek, opisany na powierzchni S, wychodzący z punktu tej powierzchni, rozpada się na dwa stożki rzędu trzeciego, styczne do powierzchni S, we wsystkich punktach dwóch krzywych sześciennych skośnych, przechodzących przez cztery punkty podwójne.

9. **Inne przedstawienie płaskie powierzchni** S. Niech będzie P płaszczyzna, przeprowadzona przez tę z trzech tworzących Δ, która opiera się na krawędziach A i A'. Każda prosta M, opierająca się na tych krawędziach, przecina powierzchnię S i płaszczyznę P w dwóch punktach μ i m, i łatwo widzieć, iż spółrzędne punktu μ wyrażają się wymiernie w funkcji spółrzędnych punktu m. Jesteśmy więc w posiadaniu nowego sposobu odwzorowania płaskiego powierzchni S.

[1]) E. Duporcq, Premiers principes de Géométrie moderne, str. 109.

Istnieje przekształcenie (T), ustalające odpowiedniość między płaszczyzną P i powierzchnią S; albowiem, jeżeli równania płaszczyzny i powierzchni są następujące

$$ax + by + cz + dt = 0, \quad \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{y} + \frac{\gamma}{z} + \frac{\delta}{t} = 0,$$

wówczas wystarczy wziąć

$$A = \frac{\alpha}{a}, \quad B = \frac{\beta}{b}, \quad C = \frac{\gamma}{c}, \quad D = \frac{\delta}{d}.$$

Tworząca Δ odpowiadać będzie oczywiście sama sobie. Niech będzie M' prosta, którą przekształcenie to podporządkowuje prostej M' oraz μ' i m' niechaj będą punkty, w których prosta M' przecina powierzchnię S i płaszczyznę P. Wyżej przekonaliśmy się, iż przekształcenie (m, m') jest homologją (№ 2). Przekształcenie (μ, m), równe iloczynowi przekształceń (μ, m') i (m', m), innemi słowy, — przekształcenia (T) i homologii, posiada więc własności rzutowe przekształcenia (T): wystarczy uprzytomnić sobie (№ 2), iż czworobok zupełny K przekształca się sam na siebie zapomocą homologji (m, m').

10. **Zastosowanie do zagadnienia Cyngera.** — Z łatwością znajdujemy, iż powierzchnia, o której mowa w zagadnieniu, ma za równanie

$$x^2 z = (z - c)(y^2 + z^2 - c'z).$$

Zauważmy, iż gdy płaszczyzna Π przechodzi przez jeden lub drugi z punktów spólnych prostej (D) i kołu (C), wówczas hyperbola (H) sprowadza się do dwóch prostych, i jest oczywiste, iż dwie pary prostych, w ten sposób otrzymanych, przecinają oś Ox w tych samych punktach. Cztery te proste tworzą więc wraz z osią Ox i prostą (D) sześć krawędzi czworościanu, położonych na powierzchni.

Zwróćmy jeszcze uwagę na to, iż powierzchnia przechodzi przez prostą w nieskończoności płaszczyzny $z = 2c$; prosta ta odgrywa więc rolę prostej Δ, uważanej w ustępie poprzednim, — i wszystkie wyniki, wypowiedziane w zagadnieniu Cyngera, stają się wnioskiem bezpośrednim z naszych rozważań.