każdym razem zupełnie określone formy — jak to bywa np. w przypadku kryształów — podczas gdy wielkość tych form musi odpowiadać warunkom, znanym z ogólnej teorji ilostek (kwantów); znalezienie powyższych form stosownie do danych zadania stanowi tedy właściwą treść odnośnego problematu. Zachowanie formy jest jednakże — jak to wykazujemy w innej pracy, która niebawem również ukaże się w druku — przy każdem ogólnem zadaniu n ciał (w którem prócz ciężkości mogą działać też siły elektryczne i t. p.) możliwe jedynie wtedy, gdy się odbywa jeden z następujących trzech rodzajów ruchu względem nieruchomego środka ciężkości:

a) równomierny obrót w przestrzeni około osi stałej;

b) ruch Keplerowski w płaszczyźnie, przyczem wciąż te same płaskie układy wszystkich ciał, opisują podobne linje stożkowe o dowolnym mimośrodzie ε; w przypadkach ruchu nieperjodycznego ($\varepsilon \geqslant 1$) następuje się przytem z konieczności rozpad całego ustroju, co ze względów fizycznych nie wchodzi tutaj w grę; we wszystkich innych przypadkach wystarcza dla określenia poszukiwanych form przyjąć poszczególny ruch Kopernikański, t. j. równomierny obrót kołowy w płaszczyźnie dokoła środka ciężkości — tembardziej, iż podług badań Sommerfelda[1]) wynikają z tego, przynajmniej w grubszych zarysach, te same linje widmowe, co i w ogólniejszym przypadku ruchów eliptycznych;

c) ruchy po nieruchomych prostych, podług praw, ważnych już z przypadku $n=2$, przyczem musi nastąpić albo rozpad całego ustroju, albo też zderzenie wszystkich jego części w połączeniu ze zniszczeniem ładunków elektrycznych: obydwie te możliwości trzeba z względów fizycznych odrzucić.

Dla teorji budowy cząstek należy więc uwzględnić wyłącznie ruchy a) i b). Rozważając działające przytem siły dośrodkowe — pochodzenia zresztą jedynie elektrycznego, gdyż ciężkość odgrywa tu rolę znikomo małą — otrzymuje się za każdym razem niezależny układ równań algebraicznych, których rozwiązanie doprowadza do poszukiwanych form układu cząstek. Teorja Bohra podaje wtedy odpowiednie linje widmowe; długość fal tych linij można bezpośrednio porównać z danemi doświadczeń.

Zgodność teorji z rzeczywistością wydaje nam się w rozpatrywanym tu przypadku H_2^+ dostatecznie wysoka. Pewna, a nawet dość znaczna część t. zw. drugiego widma wodoru (mierzonego przez Hasselberga, Watsona, Lymana i innych: por. Kaysera: „Handbuch der Spectroscopie", t. V, Lipsk 1912), dotychczas matematycznie omal niedostępnego, zostaje w ten sposób dostatecznie uzasadniona, a przy rozpatrywaniu całej cząstki H_2 otrzymuje się jeszcze daleko zupełniejsze wyjaśnienie.

[1]) „Atombau und Spektrallinien", Brunświk 1821, rozdz. 4, § 5.

K. ABRAMOWICZ.

O pewnej własności grupy automorficznej (2, 4, 5).

Sur une propriété du groupe automorphe (2, 4, 5).

Przedmiotem niniejszej pracy jest dowód pewnej własności grupy automorficznej, oznaczanej przez Kleina znakiem (2, 4, 5). Fricke w dodatku do „Vorlesungen über die Theorie der automorphen Functionen" przeprowadził przekształcenie 3-go stopnia funkcyj automorficznych, należących do tej grupy (2, 4, 5), i okazał, że grupa ta tworzy się w sposób następujący: jeżeli przez j oznaczymy pierwiastek dodatni równania $j^2+j-1=0$, to zbiór podstawień

$$z' = \frac{(a+b\sqrt{j})\,z+c+d\sqrt{j}}{(-c+d\sqrt{j})\,z+a-b\sqrt{j}}, \tag{1}$$

w których a, b, c, d są liczbami całkowitemi ciała kwadratowego $K(j)$, a wyznacznik podstawień: $a^2+c^2-j(b^2+d^2)$ równa się 4 lub 2, będzie grupą, którą Klein oznaczył znakiem (2, 4, 5); istnieje przytem zależność $a \equiv c$ (mod 2), $b \equiv d$ (mod 2).

Ponieważ w skład grupy (2, 4, 5), jak wynika z określenia, wchodzą tylko podstawienia (1) o wyznaczniku równym 4 lub 2, to powstaje nader ważne pytanie, jaką rolę odgrywają przytem podstawienia o wyznaczniku 1; łatwo odrazu zauważyć, że wszystkie one wchodzą w skład grupy (2, 4, 5), ponieważ odpowiadają przypadkowi, kiedy a, b, c, d są wszystkie podzielne przez 2; tworzą one przytem grupę.

Co do tej grupy podstawień o wyznaczniku 1 można wypowiedzieć następujące twierdzenie:

Twierdzenie: Jeżeli j oznacza pierwiastek dodatni równania $j^2+j-1=0$, i a, b, c, d są liczby całkowite ciała kwadratowego $K(j)$, to zbiór podstawień

$$\begin{pmatrix} a+b\sqrt{j}, & c+d\sqrt{j} \\ -c+d\sqrt{j}, & a-b\sqrt{j} \end{pmatrix} \tag{2}$$

o wyznaczniku $a^2+c^2-j(b^2+d^2)=1$ tworzy podgrupę grupy (2, 4, 5) o wskaźniku 10.

Dowód tego twierdzenia jest przedmiotem niniejszej pracy.

Rozważaną grupę podstawień (2) o wyznaczniku 1 oznaczać będziemy literą G i dla dowodu wypowiedzianego twierdzenia wykreślimy najprzód obszar zasadniczy grupy G.

Rozszerzymy w tym celu w zwykły sposób grupę G przez dołączenie do niej podstawienia $z'=-\bar{z}$, gdzie $\bar{z}$ oznacza liczbę sprzężoną z liczbą z. Jeżeli rozszerzoną w taki sposób grupę oznaczymy przez $\bar{G}$, to grupa $\bar{G}$ będzie zbiorem podstawień (1) i podstawień:

$$z'=\frac{(a+b\sqrt{j})\,\bar{z}-c-d\sqrt{j}}{(-c+d\sqrt{j})\,\bar{z}-a+b\sqrt{j}}. \tag{3}$$

Jeżeli wykreślimy obszar zasadniczy grupy rozszerzonej $\bar{G}$, to obszar zasadniczy grupy G będzie się składał z obszaru zasadniczego grupy $\bar{G}$ i jego odbicia w osi rzędnych.

Zwróćmy przeto uwagę na możliwe granice obszaru zasadniczego grupy $\bar{G}$. Granicami obszaru zasadniczego mogą być te zbiory punktów płaszczyzny z, które pozostają bez zmiany przy podstawieniach grupy $\bar{G}$; będą to linje symetrji grupy $\bar{G}$. Lecz linje symetrji charakteryzuje równość $b=0$ (ponieważ pierwszy i czwarty spółczynnik podstawienia (3) powinny mieć wtedy znaki odwrotne), będą one zatem kołami

$$(-c+d\sqrt{j})(x^2+y^2)-2ax+c+d\sqrt{j}=0,\quad a^2+c^2-jd^2=1. \tag{4}$$

Między temi kołami znajduje się koło o promieniu 1 (przy $a=0$, $d=0$) i oś rzędnych (przy $c=0$, $d=0$).

Mając na względzie te linje symetrji, postępować będziemy dalej w sposób następujący: 1-o) będziemy szukali na osi rzędnych najbliższego następującego po punkcie i punktu eliptycznego grupy $\bar{G}$; na przechodzącej przez ten punkt linji symetrji będziemy szukali następnego najbliższego punktu eliptycznego, na następnej linji symetrji będziemy szukali nowego najbliższego punktu eliptycznego i t. d.; postępując w ten sposób dalej, powrócimy do punktu i; otrzymamy wtedy pewien wielokąt kołowy. Jeżeli wtenczas w grupie $\bar{G}$ okażą się podstawienia, przekształcające otrzymany wielokąt sam

w siebie, to one utworzą pewną grupę, która musi być cykliczną o pewnym okresie k, i wtedy k-ta część otrzymanego wielokąta będzie obszarem zasadniczym grupy $\bar{G}$; 2 o) będziemy szukali takiego podstawienia eliptycznego V, nie należącego do grupy $\bar{G}$, które przekształcałoby grupę $\bar{G}$ samą w siebie, t. j. spełniałoby warunek: $\bar{G}=V^{-1}\bar{G}V$; posiadanie takiego podstawienia ułatwi nam wykreślenie obszaru zasadniczego grupy $\bar{G}$.

Przechodząc do znalezienia takiego podstawienia V, zauważymy przedewszystkiem następujące własności rozszerzonej prupy $\bar{G}$:

I. Grupa $\bar{G}$ może zawierać w sobie podstawienia eliptyczne, mające tylko okres 2.

W samej rzeczy, jeżeli podstawienie (2) ma być eliptyczne, to musi być $a<1$, lecz jednocześnie liczba $\bar{a}$ sprzężona w ciele $K(j)$ z liczbą a musi czynić zadość warunkowi $\bar{a}<1$; będzie zatem $a\bar{a}<1$, czyli, że norma liczby a jest mniejsza od 1; lecz jeżeli $N(a)<1$, to $N(a)=0$, a zatem $a=0$; okres podstawienia eliptycznego jest tylko 2.

Stąd wynika:

II. Wszystkie linje symetrji (4) grupy $\bar{G}$ przecinają się pod kątami prostemi.

W samej rzeczy, punkty przecięcia się linji symetrji są punktami stałemi odpowiednich podstawień eliptycznych; lecz ponieważ grupa $\bar{G}$ posiada tylko podstawienia eliptyczne o okresie 2, to wszystkie linje symetrji muszą się przecinać pod kątem $\pi:2$.

Ostatnią własność można sformułować w sposób następujący: Koła (4) przy $a^2+c^2-jd^2=1$ tworzą na płaszczyźnie z sieć wielokątów z kątami prostemi. Pozostaje między temi wielokątami wybrać ten, który byłby obszarem zasadniczym grupy $\bar{G}$.

Będziemy w tym celu starali się wynaleść takie podstawienie V, nie należące do grupy $\bar{G}$, które przekształcałoby grupę $\bar{G}$ samą w siebie. W ciele 4-go stopnia, które otrzymamy przez dołączenie do ciała $K(j)$ pierwiastka kwadratowego $\sqrt{j}$, wynajdziemy taką jednostkę

$$\varepsilon=\alpha+\beta j+\sqrt{j}\,(\gamma+\delta j),$$

iżby przy $\bar{\varepsilon}=\alpha+\beta j-\sqrt{j}\,(\gamma+\delta j)$ było $\varepsilon\bar{\varepsilon}=1$, i aby w tem ciele 4-go stopnia liczba 2ε była kwadratem zupełnym; po dokonaniu odpowiednich rachunków taką jednostkę będziemy mogli obrać w postaci

$$\varepsilon=1+j+\sqrt{j}\,(1+j),$$

prócz tego będzie

$$2\varepsilon = (1+j+\sqrt{j})^2 = k^2,$$

jeżeli $k = 1+j+\sqrt{j}$.

Mając to na względzie, zwrócimy uwagę na podstawienie

$$V = \frac{k}{\bar{k}} \cdot \frac{z+1}{-z+1}. \tag{5}$$

w którem $\bar{k} = 1+j-\sqrt{j}$ i które przekształca punkt i na punkt $\frac{k}{\bar{k}} i$; wyznacznik tego podstawienia $2k\bar{k}$, jak to łatwo zauważyć na zasadzie wyboru jednostki ε, równa się 4.

Podstawienie (5) będzie właśnie szukanem podstawieniem, przekształcającem grupę $\bar{G}$ samą w siebie. Posiada ono własności następujące:

1-o) nie wchodzi w skład grupy $\bar{G}$, ponieważ wyznacznik jego jest równy 4;

2-o) przekształca grupę $\bar{G}$ samą w siebie; co łatwo sprawdzić, obliczając podstawienia grupy $V^{-1}\bar{G}V$; te podstawienia będą znowu postaci (2);

3-o) jest podstawieniem eliptycznem o okresie 5, ponieważ równanie, wyznaczające okres m tego podstawienia, będzie w danym przypadku

$$k + \bar{k} = 4 \cos \frac{\pi}{m},$$

albo ze względu na wartość k:

$$1+j = 2 \cos \frac{\pi}{m},$$

skąd wynika $m = 5$.

4-o) jego punkty stałe z_1 i z_2 leżą na kole

$$x^2 + y^2 + 2x = 1,$$

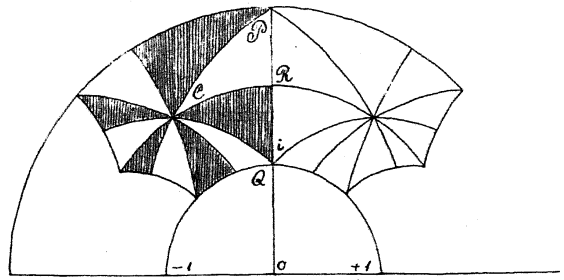
ponieważ ich wartości są następujące

$$z_1, z_2 = \frac{-\sqrt{j} \pm i\sqrt{2-j}}{1+j-\sqrt{j}},$$

i własność ta sprawdza się natychmiast przez podstawienie; spółrzędne tych punktów mają przybliżone wartości $(-0{,}9\ldots, \pm 1{,}6\ldots)$.

Po tych uwagach możemy łatwo spostrzec, jakiego przekształcenia doznaje punkt stały i grupy $\bar{G}$ po zastosowaniu do niego podstawienia V;

przejdzie on mianowicie z koła, przechodzącego przez punkty stałe z_1 i z_2, na koło pochylone do niego pod kątem $2\pi:5$, a przechodzące przez te same



punkty stałe; z tego koła przejdzie na następne pochylone do niego pod kątem $2\pi:5$ i t. d. Dokonywając odpowiednich wykreśleń, otrzymamy pięciokąt kołowy, którego środek C leżeć będzie na kole

$$x^2 + y^2 + 2x = 1,$$

i przedstawiać będzie liczbę zespoloną

$$\frac{-\sqrt{j} + i\sqrt{2-j}}{1+j-\sqrt{j}}.$$

punkt stały podstawienia V.

Otrzymany 5-kąt będzie obszarem zasadniczym grupy $\bar{G}$.

W samej rzeczy, 5-kąt ten przekształca się sam w siebie przy zastosowaniu podstawień

$$V,\ V^2,\ V^3,\ V^4,$$

lecz wszystkie one mają wyznacznik 4, nie należą zatem do grupy $\bar{G}$; dalej 5-kąt ten przekształca się sam w siebie przez odwrócenie w każdej ze swych pięciu przekątnych, ale i te odwrócenia nie należą do składu grupy $\bar{G}$.

Otrzymany 5-kąt kołowy razem z odbiciem swem w osi rzędnych będzie obszarem zasadniczym prupy G.

Aby teraz, mając obszar zasadniczy grupy G, dowieść wypowiedzianego na początku twierdzenia, rozumować będziemy tak. Ponieważ podstawienie

$$V = \frac{k}{\bar{k}} \cdot \frac{z+1}{-z+1}$$

przekształca grupę $\bar{G}$ samą w siebie, to dołączając do grupy G podstawienia

$$V,\ V^2,\ V^3,\ V^4,$$

otrzymamy zbiór podstawień postaci

$$\bar{G},\ \bar{G}V^k,\quad k=1,2,3,4,$$

wyznaczający nową grupę, którą oznaczymy literą $\bar{G}_{(5)}$; obszarem zasadniczym tej grupy będzie piąta część obszaru zasadniczego grupy $\bar{G}$, naprzykład, trójkąt CPQ. Ponieważ dalej 5-kąt zasadniczy przekształca się sam w siebie przez odwrócenie w każdej ze swych przekątnych, to obierzemy jedno z takich odwróceń, naprzykład

$$z'=\frac{-\bar{z}+1}{\bar{z}+1}$$

i dołączymy je do grupy $\bar{G}_{(5)}$; otrzymamy w ten sposób nową grupę, którą oznaczymy literą $\bar{G}_{(10)}$, i dla której obszarem zasadniczym będzie już połowa trójkąta CPQ, naprzykład, trójkąt CRQ.

Po tych uwagach udowodnimy, że:

1-o) grupa $\bar{G}_{(5)}$ składa się wyłącznie z podstawień (2) o wyznaczniku $a^2+c^2-j(b^2+d^2)=4$ i warunkach: $a\equiv c$ (mod 2), $b\equiv d$ (mod 2).

2-o) grupa $\bar{G}_{(10)}$ składa się wyłącznie z podstawień (2) o wyznacznikach $a^2+c^2-j(b^2+d^2)=4$ lub 2.

W ten sposób będzie dowiedzione, że grupa $G_{(10)}$ nie różni się niczem od grupy (2, 4, 5), ponieważ ta ostatnia, zgodnie z określeniem, składa się wyłącznie z podstawień (2) o wyznacznikach 4 lub 2; jednocześnie będzie dowiedzione, że wskaźnik grupy G, złożonej z podstawień (2) o wyznaczniku 1, jest względem grupy (2, 4, 5) równy 10, ponieważ 10 równoważnych względem grupy (2, 4, 5) czworokątów wypełnia obszar zasadniczy grupy G.

Ad 1-o). Widoczne jest odrazu, że grupa $G_{(5)}$ nie zawiera żadnych innych podstawień prócz podstawień o wyznaczniku 4 (wliczamy tu podstawienia o wyznaczniku 1); pozostaje tylko dowieść, że grupa $G_{(5)}$ wyczerpuje wszystkie podstawienia o wyznaczniku 4. W samej rzeczy, jeżeliby były jakie podstawienia o wyznaczniku 4, nie należące do składu grupy $G_{(5)}$, to, biorąc je pod uwagę, mielibyśmy też nowe linje symetrji, nie należące do grupy $\bar{G}_{(5)}$; niechby koło

$$(-c+d\sqrt{j})(x^2+y^2)-2ax+c+d\sqrt{j}=0,\quad a^2+c^2-jd^2=4,$$

było taką linją symetrji; wtedy z warunku $b=0$, wynikałoby $d\equiv 0$ (mod 2), a stąd, ze względu na warunek

$$a^2+c^2-jd^2=4,$$

wynikałoby $a^2+c^2\equiv 0$ (mod 4); lecz ponieważ $a\equiv c$ (mod 2), to wynikałoby dalej $a\equiv 0$ (mod 2); wszystkie zatem liczby a, c, d, byłyby podzielne przez 2, i odpowiednie podstawienie wchodziłoby w skład grupy $G_{(5)}$, ponieważ wchodziłoby do G. Niema zatem nowych linji symetrji: sieć wielokątów, odpowiadająca grupie $G_{(5)}$ i sieć wielokątów, odpowiadająca zbiorowi podstawień o wyznaczniku 4, są tożsamościowe. Mogłaby stąd wynikać ewentualność, iż obszar zasadniczy zbioru podstawień o wyznaczniku 4 mógłby stanowić część pewną obszaru zasadniczego grupy $G_{(5)}$, lecz to jest niemożliwe. Grupa zatem $G_{(5)}$ zawiera w sobie wszystkie podstawienia o wyznaczniku 4 z warunkiem $a\equiv c$ (mod 2), $b\equiv d$ (mod 2) i nie zawiera żadnych innych.

Ad 2-o). Aby dowieść, że grupa $G_{(10)}$ zawiera w sobie wyłącznie podstawienia o wyznacznikach: $a^2+c^2-j(b^2+d^2)=4$ lub 2, wystarczy okazać, że jeżeli s oznacza podstawienie typu (2) o wyznaczniku 2, a S podstawienie typu (2) o wyznaczniku 4, to podstawienie

$$T=\frac{z+1}{-z+1}$$

daje w iloczynie sT podstawienie o wyznaczniku 4, a w iloczynie $T^{-1}S$ podstawienie o wyznaczniku 2.

W samej rzeczy, znajdujemy, że

$$sT=\begin{pmatrix} a-c+(b-d)\sqrt{j}, & a+c+(b+d)\sqrt{j} \\ -a-c+(b+d)\sqrt{j}, & a-c-(b-d)\sqrt{j} \end{pmatrix},$$

co, jak łatwo sprawdzić, ze względu na warunek: $a^2+c^2-j(b^2+d^2)=2$, jest podstawieniem o wyznaczniku 4.

Analogicznie obliczamy

$$T^{-1}S=\begin{pmatrix} a+c+(b+d)\sqrt{j}, & -a+c+(-b+d)\sqrt{j} \\ a-c+(-b+d)\sqrt{j}, & a+c-(b+d)\sqrt{j} \end{pmatrix},$$

skąd, ze względu na warunki $a\equiv c$ (mod 2), $b\equiv d$ (mod 2), spostrzegamy, że wszystkie spółczynniki podstawienia $T^{-1}S$ są podzielne przez 2, i po skróceniu 2, otrzymujemy podstawienie o wyznaczniku 2.

W ten sposób wypowiedziane twierdzenie o grupie podstawień z wyznacznikiem 1 zostało udowodnione. Udowodniliśmy zarazem, że zbiór $G_{(5}$ podstawień (2) o wyznaczniku 4 ma względem grupy (2, 4, 5) wskaźnik 5.