Nous avions annoncé au paragraphe VIII que nous démontrerons le théorème suivant:

Le systéme

$$\begin{cases} f(x+y) = f(x)+f(y), \\ f(xy) \quad = f(y).f(y) \end{cases}$$

n'admet pas d'autre solution que $f(x) = x$.

Remarquons qu'on a $f(x) = x$ lorsque x est un nombre rationnel, ceci résulte de $f(1) = 1$ et de $f(nx) = nf(x)$ lorsque n est rationnel.

Si $P(x)$ est un polynôme entier à coefficients entiers on a

$$f[P(x)] = P[f(x)]\ k,$$

donc si x est racine de $P(x) = 0$, $f(x)$ est aussi une racine de cette équation.

De même si $P(x, y)$ est un polynôme à coefficients entiers et à deux variables, si x est racine de

$$P(x, y) = 0, \qquad f(x) \text{ sera racine de } \qquad P[X, f(y)] = 0$$

Soit a_1 un nombre quelconque et $f(a_1) = A_1$, supposons $a_1 \neq A_1$ par exemple $a_1 < A_1$, entre a_1 et A_1 intercalons un nombre rationnel u. Soit x une racine de

$$x^2 - u + a_1 = 0$$

qui a ses deux racitnes réelles, $f(x)$ doit être racine de

$$[f(x)]^2 - u + A_1 = 0;$$

mais cette équation n'a pas de racines réelles, or $f(x)$ doit être réel, il y a donc impossibilité et la seule solution du système proposé est $f(x) = x$.

A. ROSENBLATT.

Sur un lemme de choix et son application à la théorie du potentiel.

Introduction.

Dans une Note présentée par M. Levi—Civita à l'Académie dei Lincei [1]) j'ai donné une extension du concept de potentiel newtonien aux ensembles de points mesurables et bornés de l'espace. Ces ensembles étant supposés homogènes le potentiel newtonien de l'ensemble E situé dans l'espace R_3 rapporté aux coordonnées x, y, z s'exprime par l'intégrale

$$(1) \quad J = \frac{1}{2} \int dx'\,dy'\,dz' \int dx\,dy\,dz \frac{1}{r},$$

r étant la distance des deux points $P(x, y, z)$, $P'(x', y', z')$ et l'intégration étant étendue à l'ensemble E.

J'ai donné, dans la Note citée, un aperçu très bref de la démonstration du théorème de Liapounoff,[2]) démonstration qui fait l'objet d'un travail étendu qui doit paraître dans le Bulletin de l'Académie polonaise des sciences [3]). Il s'agit du théorème d'après lequel le maximum de l'intégrale (1) est atteint par la sphère de volume égal à la mesure de l'ensemble E et seulement par la sphère, à un ensemble de points de mesure nulle près que l'on peut ajouter ou soustraire à la sphère.

---

[1]) Dans la Séance du 18 Janvier 1920.

[2]) Dans une Note: Über eine isoperimetrische Aufgabe und ihre physikalischen Anwendungen" Mathematische Zeitschrift 6.3, 1919. M, Carleman a donné une démonstration du théoreme de Liapounoff pour des corps limités par des surfaces continues.

[3]) Dans le Bulletin des Sciences Mathématiques doit paraître un travail qui contient les points essentiels de cette démonstration.

La démonstration du théorème de Liapounoff est très délicate même si l'on veut se borner à démontrer ce théorème pour tous les ensembles de points qui sont formés des points de l'intérieur et de la surface d'un corps limité par une surface de Jordan. Un des points délicats à démontrer est la démonstration de la convergence d'une suite de polyèdres que l'on forme en partant d'un polyèdre symétrique K par rapport à trois plans perpendiculaires deux à deux. Soient Π, Π', Π'' ces trois plans et l, l', l'' les droites (Π, Π'), (Π, Π''), (Π', Π''). Envisageons encore un quatrième plan Π qui passe par la droite l et qui renferme avec le plan Π un angle α incommensurable avec π. Symétrisons K par rapport au plan $\overline{\Pi}$, puis le corps $\overline{K}$ ainsi obtenu par rapport au plan Π et ainsi de suite. Il s'agit de démontrer que la suite infinie de polyèdres ainsi obtenue converge dans un certain sens précis vers un corps de révolution autour de l'axe l bien déterminé et que les potentiels newtoniens de cette suite de corps convergent vers le potentiel newtonien du corps limite.

2. Dans le présent travail nous nous proposons de donner une démonstration détaillée d'un théorème qui fait partie de la démonstration dont il a été question à la fin du N° précédent.

Envisageons un polygone W fermé, formé d'un nombre fini de segments rectilignes $l_1, l_2, \ldots, l_n$. Les seuls points communs des deux de ces segments sont les points $P_1, P_2, \ldots, P_n$ qui sont communs et extrémités communes de côtés $l_n, l_1; l_1, l_2; \ldots; l_{n-1}, l_n$. Supposons ce polygone symétrique par rapport à deux axes rectangulaires x, y dont les directions positives ont l'orientation habituelle. Chaque côté du polygone qui n'est pas symétrique par rapport à un de ces axes, c'est à dire n'a pas son milieu situé sur l'axe x ou sur l'axe y, est tel qu'il existe trois autres côtés l', l'', l''', qui correspondent au côté l dans les symétries par rapport à l'axe x, par rapport à l'axe y, par rapport au centre O du polygone. Donc le nombre des côtés du polygone W est toujours pair et il est divisible par 4 si la circonstance dont il a été question ne se présente pas. Supposons, enfin, que chaque droite perpendiculaire à l'axe des x rencontre le contour C du polygone W en deux points seulement, à l'exception peut être d'un nombre finx de droites, sur lesquels il peut y avoir deux côtés du contour C ou bien un seul côtè symétrique pa rapport à l'axe x.

Envisageons maintenant une droite $\overline{x}$ passant par O et qui renferme avec l'axe des x un angle α incommensurable avec π. Symétrisons le polygone W par rapport à l'axe $\overline{x}$, en remplaçant les segments s situés sur la droite $\overline{l}$ perpendiculaire à $\overline{x}$ à l'intérieur du polygone W par un segment unique symétrique par rapport à l'axe x et de longueur $2S$ égale à la somme des longueurs des segments s du polygone W.

Si pour une position particulière de la droite $\overline{l}$ il y a des côtés du polygone W situés sur cette droite la longueur du segment $2S$ égale à la somme des segments, s peut éprouver une discontinuité.

On obtient ainsi un polygone W symétrique par rapport à l'axe $\overline{x}$ et à l'axe $\overline{y}$ perpendiculaire à l'axe $\overline{x}$. Toute droite perpendiculaire à l'axe $\overline{x}$ coupe le contour $\overline{C}$ de ce polygone en 2 points ou bien un ou deux côtes du contour $\overline{C}$ peuvent être situés sur cette droite. Le contour $\overline{C}$ est donc sans points doubles. Le plus grand cercle de centre 0 intérieur au polygone W est aussi intérieur au polygone $\overline{W}$.

Symétrisons maintenant le polygone $\overline{W}$ par rapport à l'axe x et poursuivons ce procédé alterné indéfiniment. Si nous appellons W_1 le polygone W, W_2 le polygone $\overline{W}$ et W_{i+1} le polygone que l'on obtient par symétrisation du polygone W_i, les polygones W_{2i+1} sont symétriques par rapport à l'axe x et les polygones W_{2i} sont symétriques par rapport à l'axe des $\overline{x}$.

Nous nous proposons de démontrer que la suite des contours $C_1, C_2, \ldots$ des polygones $W_1, W_2, \ldots$ tend uniformément vers la circonférence C d'un cercle de centre O et d'aire égale à celle des polygones de la suite. La signification précise de cet énoncé sera donnée au cours de ce travail.

Envisageons alors l'intégrale

$$(2) \quad J = \frac{1}{2} \int dx'\, dy' \int dx\, dy \log \frac{1}{r},$$

étendue à un ensemble E plan, r étant la distance des deux points x, y et x', y' et $\log \frac{1}{r}$ désignant la valeur réelle du logarithme. Appelons la valeur de cette intégrale le potentiel logarithmique de l'ensemble E.

Nous nous proposons de démontrer que les potentiels logarithmiques $J_1, J_2, \ldots$ des polygones $W_1, W_2, \ldots$ tendent en croissant en valeur vers le potentiel logarithmique J du cercle Γ.

Dans la démonstration nous aurons à nous servir d'un lemme de choix connu qui sera démontré au début du travail.

Démonstration.

1. **Définition 1:** Courbe continue s'apelle l'ensemble des points P de coordonnées

$$(1) \quad x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad o \leq t \leq 1,$$

$\varphi(t)$, $\Psi(t)$ étant des fonctions continues de t dans l'intervalle 0,1 de t.

Si l'on a les égalités

$$(2) \quad \varphi(0) = \varphi(1), \quad \psi(0) = \psi(1),$$

la courbe continue s'appelle fermée.

Définition 2: Courbe de Jordan ouverte s'appelle l'ensemble des points P de coordonnées (1), les fonctions $\varphi(t)$, $\psi(t)$ étant telles qu'a chaque point P ne correspond qu'une seule valeur de t.

Courbe de Jordan fermée s'appelle l'ensemble des points P de coordonnées (1), les fonctions $\varphi(t)$, $\psi(t)$ satisfaisant pour toutes les valeurs de t excepté, $t=0$ et $t=1$, à la condition qui caractérise la courbe de Jordan ouverte et satisfaisant pour $t=0$ et pour $t=1$ aux conditions (2)

Définition 3: Courbe continue à variation bornée s'appelle une courbe continue (1), si les sommes

$$(3) \quad S_1 = \sum_{i=0}^{n} \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}),$$

$$(3) \quad S_2 = \sum_{i=0}^{n} \psi(t_i) - \psi(t_{i-1}),$$

$t_0 = 0$, $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$, $t_n = 1$, sont plus petites qu'un nombre positif fixe G indépendant du choix des nombres t_i.

Définition 4: Courbe rectifiable s'appelle une courbe continue, si les sommes

$$(4) \quad S = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})]^2 + [\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})]^2},$$

$t_0 = 0$, $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$, $t_n = 1$ sont plus petites qu'un nombre positif G, independant du choix des nombres t_i.

Théorème 1: „Une courbe continue à variation bornée est rectifiable. Une courbe rectifiable est à variation bornée".

Théorème 2: „Étant donné un nombre positif $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit on a l'inégalité

$$(5) \quad L - S < \varepsilon,$$

L étant la limite supérieure des sommes (4), et les nombres $t_0, t_1 \ldots, t_n$ vérifiant

les inégalités

$$(6) \quad t_i - t_{i-1} < \delta,$$

δ étant un nombre dépendant uniquement de ε".

Nous n'insistons pas sur ce théorème connu.

Définition 5: Longueur de la courbe rectifiable (1) s'appelle la limite supérieure L des sommes S.

Longueur de l'arc de courbe (1) de $t = t_1$ jusqu'à $t = t_2$ $L(t_1, t_2)$ s'appelle la limite supérieure des sommes S formées pour l'intervalle (t_1, t_2) de (0, 1).

La longueur $L(t_1, t)$ est fonction continue non décroissante de t. Elle croît de 0 à L.

Désormais nous choisirons la valeur du paramètre t de la manière suivante. Nous introduisons le nouveau paramètre

$$(7) \quad \tau = \frac{L(0, t)}{L},$$

τ varie en ne décroissant pas de 0 à 1. lorsque t varie en croissant de 0 à 1. Mais τ peut rester constant lorsque t varie dans un intervalle (t_1, t_2). Alors x, y restent constants dans l'intervalle (t_1, t_2). Inversement, si x, y restent constants dans l'intervalle (t_1, t_2), τ reste constant dans cet intervalle. Donc à chaque valeur de τ correspond une valeur unique de x et y.

Les fonctions

$$x = \Phi(\tau) = \varphi[t(\tau)], \quad y = \Psi(\tau) = \psi[t(\tau)]$$

sont des fonctions continues satisfaisant aux conditions

$$(8) \quad \Phi(\tau') - \Phi(\tau) < L(\tau' - \tau),$$

$$\Psi(\tau') - \Psi(\tau) < L(\tau' - \tau)$$

Ce sont donc des fonctions à nombres dérivés bornés.

Définition 6: Distance de la courbe continue C

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

de la courbe continue

$$x = \bar{\varphi}(t), \quad y = \bar{\psi}(t).$$

$D(C, \bar{C})$, s'appelle la limite supérieure des distances $D(P, \bar{C})$ des points P de la courbe C et de la courbe $\bar{C}$. La distance $D(P, C)$ est, par définition, la limite inférieure des distances $D(P, \bar{P})$ du point P et des points $\bar{P}$ de la courbe $\bar{C}$. La courbe $\bar{C}$ étant continue cette limite inférieure est atteinte pour au moins un point $\bar{P}$ de la courbe $\bar{C}$.

On définit de même la distance $D(\overline{C}, C)$ égale à la limite supérieure les distances des points $\overline{P}$ de la courbe $\overline{C}$ et de la courbe C.

Définition 7:
Distance des deux courbes $C, \overline{C}$

$$D(C, \overline{C})$$

s'appelle le plus grand des deux nombres $D(\overline{C}, C)$ et $D(C, \overline{C})$.

Théorème 4: „Il existe deux points $P, \overline{P}$ pour lesquels la limite supérieure des distances $D(C, \overline{C})$ est atteinte".

En effet, nous pouvons trouver une suite infinie de paires de points $P_i\, \overline{P}_i$ telles que l'on ait

$$\text{im}\ P_i \overline{P}_i = \lim D(P_i, \overline{C}) = D(C, \overline{C}).$$

De cette suite infinie on peut extraire une autre suite infinie de paires de points $P_i'\, \overline{P}_i'$ qui tendent vers une paire de points $P, \overline{P}$, pour laquelle on a

$$D(P, \overline{P}) = D(C, \overline{C}).$$

Il en est de même de la distance $D(\overline{C}, C)$.

Définition 8: Distance des courbes $C(t)$, $\overline{C}(t)$ dans la représentation paramétrique donnée $D[C(t), \overline{C}(t)]$ s'appelle la limite supérieure des distances $P(t)$, $\overline{P}(t)$ des points correspondants des deux courbes. Cette limite supérieure est atteinte pour deux points $P(t)$, $\overline{P}(t)$ des deux courbes.

Théorème 4: „La distance $D(C\overline{C})$ des deux courbes $C, \overline{C}$ n'est pas plus grande que la distance $D[C(t), \overline{C}(t)]$".

En effet, on a pour chaque valeur de t les inégalites

$$D[P(t), \overline{C}] \leqq D[C(t), \overline{C}(t)],$$
$$D[\overline{P}(t), C] \leqq D[\overline{C}(t), C(t)].$$

Définition 9: Suite uniformément bornée de courbes continues s'appelle une suite infinie de courbes

$$(10) \quad x_i = \varphi_i(t), \quad y_i = \psi_i(t), \quad 0 \leqq t \leqq 1,$$

telles que l'on ait les inégalités

$$(12) \quad \varphi_i(t) < A, \quad \psi_i(t) < A,$$

A étant un nombre fixe.

Définition 10: Suite uniformément bornée en longueur de courbes continues s'appelle une suite (10) de courbes rectifiables qui posséde la propriété que les les longueurs L_i de ces courbes satisfont à l'inégalité

$$(12) \quad L_i < M,$$

M étant un nombre fixe.

Théorème 5: „La suite infinie (10) est uniformément bornée en longueur, si t étant un paramètre quelconque variant de 0 à 1 on a les inégalités

$$(13) \quad |\varphi_i(t') - \varphi_i(t)| < K_i\, |t' - t|,$$
$$|\psi_i(t') - \psi_i(t)| < K_i\, |t' - t|,$$

K_i étant des nombres positifs bornés dans leur ensemble

$$|K_i| < N."$$

Théorème 6: „On peut extraire de la suite (10) uniformément bornée en longueur un autre suite infinie de courbes $C_i(t)$

$$(14) \quad x_i = \varphi_i^*(t), \quad y_i = \Psi_i^*(t)$$

telle que pour chaque valeur de t on ait

$$(15) \quad \lim_{i=\infty} \varphi_i^*(t) = \Phi(t), \quad \lim_{i=\infty} \Psi_i^*(t) = \psi(t),$$

$\Phi(t)$, $\Psi(t)$ étant deux fonctions déterminées".

Ce théorème est le lemme du choix qui joue un rôle considérable dans diverses questions d'Analyse.

Envisageons une suite dénombrable de valeurs $t_1, t_2, \ldots$ denses partout dans l'intervalle $(0, 1)$. Envisageons la suite infinie de points

$$P_i(t), \quad i = 1, 2,$$

On peut extraire de cette suite une suite infinie de points

$$P_{1i}(t_1), \quad i = 1, 2, \ldots$$

qui converge vers un point déterminé $P(t_1)$.

De la suite infinie de courbes $C_{2i}(t)$ on peut extraire une autre suite infinie de courbes $C_{2i}(t)$, $t = 1, 2, \ldots$ qui est telle que la suite infinie $P_{2i}(t)$ de points converge vers un point déterminé $P(t_2)$.

On forme ainsi une suite infinie de suites de courbes $C_{ki}(t)$ telles que les suites $P_{ki}(t_j)$ convergent vers des points déterminés $P(t_j)$ pour $j = 1, 2, \ldots k$.

Nous formons alors la suite „diagonale" infinie

$$(16) \quad C_{kk}(t),$$

suite qui est telle que les suites de points $P_{kk}(t_i)$ convergent pour chaque valeur de i vers une limite déterminée $P(t_i)$.

Nous obtenons ainsi un ensemble dénombrable de points limites des suites dont il a été question.

Envisageons alors une valeur arbitraire de t et la suite de points $P_{kk}(t)$. Appelons $C_k(t)$ la suite (16) de courbes. Nous avons alors l'inégalité

$$(17) \quad P_i(t)\, P_j(t) \leqq P_i(t)\, P_i(t_k) + P_i(t)\, P_j(t_k) + P_j(t_k)\, P_j(t),$$

t_k étant une valeur rationnelle de t. Nous pouvons choisir cette valeur tellement que ε étant un nombre donné arbitrairement petit on ait l'inégalité

$$|t - t_k| < \frac{\varepsilon}{3M}.$$

Choisissons ensuite un nombre entier N assez grand pour que l'on ait pour $i > N, j > N$ l'inégalité

$$P_i(t_k)\, P_j(t_k) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Il s'ensuit l'inégalité

$$(18) \quad P_i(t)\, P_j(t) < \varepsilon, \quad i, j > N.$$

Donc la suite $C_k(t)$ de courbes satisfait à l'énoncé du théorème.

Théorème 7: „La courbe $C(t)$

$$(19) \quad x = \varphi(t), \; y = \psi(t)$$

limite de la suite de courbes (14) est continue et rectifiable".

En effet on peut à tout nombre $\varepsilon > 0$ faire correspondre une suite finie de valeurs $t_k, k = 1, 2, \ldots m$ telles que pour chaque valeur de t on ait l'inégalité pour une certaine valeur de k

$$|t - t_k| < \frac{\varepsilon}{3M}.$$

Si l'on choisit ensuite N telle que pour $i > N, j > N$ on ait l'inégalité

$$P_i(t_k)\, P_j(t_k) < \frac{\varepsilon}{3},$$

on a l'inégalité (18) pour toute valeur de t points.

Donc la convergence de la suite de $P_k(t)$ est uniforme et la courbe limite (19) est continue.

Cette courbe est rectifiable, car on a l'inégalité

$$P_i(t)\, P_i(t') < M\, |t - t'|,$$

donc on a aussi

$$P(t)\, P(t') = \lim P_i(t)\, P_i(t') \leqq M\, |t - t'|.$$

Donc les fonctions $\Phi(t)$, $\Psi(t)$ sont à nombres dérivés bornés

$$(20) \quad \begin{aligned} \Phi(t) - \Phi(t') &\leqq M\, |t - t'|, \\ \Psi(t) - \Psi(t') &\leqq M\, |t - t'|. \end{aligned}$$

Théorème 8: „Envisageons une suite infinie de valeurs t_i, $i = 1, 2, \ldots$ Tout point limite de la suite $P_i(t_i)$ appartient à la courbe $C(t)$ limite".

Car t_i a au moins un point limite τ:

Si l'on a

$$\lim_{i=\infty} t_{1i} = \tau,$$

on a

$$P_{1i}(\tau) = P(\tau),$$

$$\lim P_{1i}(t_{1i})\, P_{1i}(\tau) = 0,$$

donc

$$\lim P_{1i}(t_{1i}) = P(\tau).$$

Théorème 9: „La distance $D(C\, C_i)$ des courbes $C(t)$ et $C_i(t)$ tend vers zéro avec $\frac{1}{i}$".

En effet (Théorème 4.), on a les inégalités

$$D[P(t), C_i] \leqq D[C(t)\, C_i(t)],$$

$$D[P_i(t), C] \leqq D[C(t)\, C_i(t)],$$

pour chaque valeur de t. Donc on a

$$D(C\, C_i) \leqq D[C(t)\, C_i(t)],$$

donc

$$\lim_{i=\infty} D(C\, C_i) = 0.$$

2. Nous snpposons maintenant que la suite infinie de courbes (10) est précisément la suite infinie de contours des polygones W_i dont il a été question dans l'Introduction. Les polygones W_{2i+1} éta ient symétriques par rapport à l'axe x et les polygones W_{2i} étaient symétriques par rapport à $\bar{x}$. Comme paramètre t nous choisissons la longueur du périmètre de $C_i(t)$, comptée pour les courbes à indice impair à partir du point A situé sur l'axe positif des x, et pour les $C_i(t)$ à indice pair à partir du point A situé de même sur l'axe positif des x et le plus éloigné du centre O. Nous comptons les arcs dans la direction opposée à la marche de l'aiguille d'une montre, et choisissons pour paramètre la longueur de l'arc $(0, t)$ divisée par la longueur totale L_i de la courbe.

Ainsi pour les polygones symétriques par rapport à l'axe des x aux 4 points P_1, P_2, P_3, P_4 symétriques par rapport aux axes x, y correspondent les 4 valeurs de t t, $\frac{1}{2}-t$, $\frac{1}{2}+t$, $1-t$.

Théorème 10: „Les polygones W_i sont bornés dans leur ensemble".

En effet, ils sont contenus à l'intérieur du cercle qui a son centre au point O et qui contient le polygone W_1 à son intérieur.

Théorème 11: „Les longueurs L_i des polygones $C_i(t)$ forment une suite non croissante de nombres

$$(21) \quad L_{i+1} \leqq L_i \text{ ".}$$

Envisageons le polygone W_i. Symétrisons le par rapport à l'axe $\bar{x}$. Faisons passer des droites l perpendiculaires à l'axe x par tous les sommets du polygone W_1. Envisageons deux droites voisines $\bar{l}$ et $\bar{l}'$.

Soient $l_1, l_2, \ldots l_{2i}$ les côtés du polygone W_1 situés entre ces droites $\bar{l}$ et $\bar{l}'$. Nous avons i quadrilatères $V_1, V_2, \ldots V_i$ limités par l_1, l_2; $_3, l_4; \ldots l_{2i-1}, l_{2i}$ et par les droites l, l'. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_{2i}$ les longueurs des côtés de ces quadrilatères situés sur $l_1, l_2 \ldots l_{2i}$.

Soient $y_1, y_2, \ldots, y_{2i}$ et $y'_1, y'_2, \ldots, y'_{2i}$ les ordonnées des points $P_1, P_2, \ldots, P_{2i}$ et $P'_1, P'_2, \ldots, P'_{2i}$ dans lesquels les droites $\bar{l}$ et $\bar{l}'$ coupent les côtés $l_1, l_2, \ldots l_{2i}$. Posons

$$2S = \sum_{j=1}^{i} (y_{2j} - y_{2j-1}),$$

$$2S = \sum_{j=1}^{i} (y'_{2j} - y'_{2j-1}),$$

$$a_j = \sqrt{d^2 + (y'_j - y_j)^2}$$

d étant la distance des deux droites $\bar{l}, \bar{l}'$,

$$L = \sqrt{d^2 + (S - S')^2} = \sqrt{d^2 + \frac{1}{4}\left[\sum_{j=1}^{i} (y'_{2j} - y_{2j}) - \sum_{j=1}^{i} (y'_{2j-1} - y_{2j-1})\right]^2}.$$

$2S$ et $2S'$ sont les côtés perpendiculaires à l'axe des x du quadrilatère symétrisé que l'on obtient en symétrisant la partie du polygone W_1 située entre l et l'. L est la longueur des deux autres côtés de ce quadrilatère.

Sur les droites l et l' nous pouvons avoir un certain nombre de segments du périmètre $C_1(t)$. Soient sur l Σs la somme des segments qui appartiennent aux côtés des quadrilatères V_i et Σs_1 la somme des segments qui n'appartiennent pas à ces quadrilatères. Si l'on traverse la droite l la somme des côtés des quadrilatères situés entre la droite l et la droite voisine $\bar{l}''$, côtés qui se trouvent sur la droite l augmente de

$$\Sigma s_1 - \Sigma s.$$

Donc, dans le polygone symétrisé W_2 on a deux segments de $C_2(t)$ sur la droite $\bar{l}$, dont la longueur totale est

$$(22) \quad \Sigma s_1 - \Sigma s \leqq \Sigma s + \Sigma s_1.$$

Désignons encore les différences $y'_{2j} - y_{2j}$ et $y'_{2j-1} - y_{2j-1}$ par η_{2j}, η_{2j-1}. Nous avons

$$\left(\sum_{j=1}^{2i} a_j\right)^2 - 4L^2 = 2i\,d^2 + \sum_{j=1}^{2i} \eta_j^2 + \sum_{\substack{j,j'=1 \\ j \neq j'}}^{2i} a_j\, a_{j'}$$

$$- 4d^2 - \left(\sum_{j=1}^{i} \eta_{2j} - \sum_{j=1}^{i} \eta_{2j-1}\right)^2$$

$$= (2i-4)\,d^2 + \sum_{\substack{j,j'=1 \\ j \neq j'}}^{2i} a_j\, a_{j'} + 2\sum_{j=1}^{i} \eta_{2j} \sum_{j=1}^{i} \eta_{2j-1}$$

$$- \sum_{\substack{j,j'=1 \\ j \neq j'}}^{i} \eta_{2j}\, \eta_{2j'} - \sum_{\substack{j,j'= \\ j \neq j'}}^{i} \eta_{2j-1}\, \eta_{2j'-1}.$$

Donc puisque l'on a

$$a_i a_j > |\eta_i \eta_j|,$$

nous avons

$$\left(\sum_{j=1}^{2i} a_j\right)^2 - 4L^2 > (2i-4)\,d.$$

$$(23)\quad \sum_{j=1}^{2i} a_j - 2L > \frac{2(i-2)\,d}{\sum\limits_{j=1}^{2i} a_j + 2L} > \frac{2(i-2)\,d}{L_1 + L_2}$$

Pour $i = 1$ on a

$$(a_1 + a_2)^2 - 4L^2 = -2d^2 + 2a_1 a_2 + 2\eta_1 \eta_2$$

$$= 2(a_1 a_2 + \eta_1 \eta_2 - d^2) = 2\left(\sqrt{d^2 + \eta_1^2}\,\sqrt{d^2 + \eta_2^2} - d^2 + \eta_1 \eta_2\right)$$

$$= 2\frac{(d^2+\eta_1^2)(d^2+\eta_2^2) - (d^2 - \eta_1\eta_2)^2}{\sqrt{d^2+\eta_1^2}\,\sqrt{d^2+\eta_2^2} + (d^2 - \eta_1\eta_2)} = 2\frac{d^2(\eta_1^2 + \eta_2^2 + 2\eta_1\eta_2)}{\sqrt{d^2+\eta_1^2}\,\sqrt{d^2+\eta_2^2} + (d^2 - \eta_1\eta_2)}$$

$$= \frac{2d^2(\eta_1 + \eta_2)^2}{\sqrt{d^2+\eta_1^2}\,\sqrt{d^2+\eta_2^2} + (d^2 - \eta_1\eta_2)}.$$

Les inégalités (22), (23) nous apprennent que la suite des longueurs $L_1, L_2, \ldots$ est non croissante. On ne peut avoir $L_1 = L_2$ que si l'on a $i = 1$, c'est à dire si chaque droite l rencontre le contour du polygone W_1 en deux points seulement. Il faut, de plus, que l'on ait $\eta_1 = \eta_2$, c'est à dire que l'axe des x soit bissectrice de l'angle formé par les côtés l_1, l_2 du polygone W_1, on bien que cet axe soit parallèle à la bissectrice.

Théorème 12: „On peut extraire de la suite infinie de courbes $C_i(t)$ une autre suite infinie de courbes $C'_i(t)$ qui tendent uniformément vers une courbe limite $C(t)$ continue et rectifiable".

3. Nous avons maintenant deux cas à distinguer.

I. À la suite infinie de courbes $C'_i(t)$ appartient une suite infinie de courbes symétriques par rapport à l'axe des x et une suite infinie de courbes symétriques par rapport à l'axe des x.

II. À la suite infinie de courbes $C'_i(t)$ n'appartient qu'une suite infinie de courbes symétriques par rapport à un des axes x ou x.

Dans ce dernier cas on peut toujours supposer qne la suite infinie convergente de courbes $C_i(t)$ se compose uniquement de polygones symétriques par rapport à l'axe x.

Envisageons, dans les deux cas, le suite infinie convergente de polygones $C'_i(t)$ symétriques par rapport a l'axe x.

Théorème 13: „La courbe limite $C(t)$ est symétrique par rapport à l'axe x et satisfait à la condition

$$(24)\quad \Phi(t_2) \leqq \Phi(t_1)$$

si l'on a

$$\frac{1}{2} \geqq t_2 > t_1 \geqq 0,$$

et à la condition

$$\Phi(t_2) \geqq \Phi(t_1),$$

si l'on a

$$\frac{1}{2} \leqq t_1 < t_2 \leqq 1."$$

En effet, si l'on avait l'inégalité

$$\Phi(t_2) > \Phi(t_1)$$

pour

$$\frac{1}{2} \geqq t_2 > t_1 \geqq 0,$$

on aurait pour i suffisamment grand l'inégalité

$$\varphi_i(t_2) > \varphi_i(t_1),$$

ce qui ne peut arriver. Il en est de même pour $\frac{1}{2} \leqq t_1 < t_2 \leqq 1$,

On a d'ailleurs

$$\Psi(t) \geqq 0 \quad \text{pour} \quad \frac{1}{2} \geqq t \geqq 0,$$

$$\Psi(t) \leqq 0 \quad \text{pour} \quad \frac{1}{2} \leqq t \leqq 1.$$

Théorème 14: „Si l'on a pour $\frac{1}{2} \geqq t_2 > t_1 \geqq 0$ l'égalité

$$\Phi(t_2) = \Phi(t_1),$$

alors tout le segment $P(t_1)\,P(t_2)$ de droite perpendiculaire à l'axe x appartient à l'arc de la courbe $C(t)$ entre $P(t_1)$ et $P(t_2)$".

En effet, on ne peut avoir pour t situé entre t_1 et t_2 l'inégalité

$$\Phi(t) \neq \Phi(t_1) = \Phi(t_2),$$

car pour i suffisamment grand on aurait les inégalités

$$|\varphi_i(t) - \Phi(t)| < \varepsilon,$$
$$|\varphi_i(t_1) - \Phi(t_1)| < \varepsilon,$$
$$|\varphi_i(t_2) - \Phi(t_2)| < \varepsilon,$$

ε étant arbitrairement petit, donc si l'on avait l'inégalité

$$\Phi(t) > \Phi(t_1) = \Phi(t_2),$$

on aurait les inégalités

$$\varphi_i(t) > \varphi_i(t_1), \quad \varphi_i(t) > \varphi_i(t_2),$$

et si l'on avait

$$\Phi(t) < \Phi(t_1) < \Phi(t_2),$$

on aurait

$$\varphi_i(t) < \varphi_i(t_1), \quad \varphi_i(t) < \varphi_i(t_2).$$

Donc l'arc (t_1, t_2) de la courbe $C(t)$ est situé tout entier sur la droite l perpendiculaire à x passant par $P(t_1)$ et $P(t_2)$. Donc tout point P situé sur cette droite l entre $P(t_1)$ et $P(t_2)$ appartient à cet arc.

Théorème 15: „L'ensemble des points de l'arc (t_1, t_2) de $C(t)$ forme un segment s situé sur la droite l et contenant les points $P(t_1)$ et $P(t_2)$".

Théorème 16: „La courbe $C(t)$ n'a pas de points doubles $P(t_1) = P(t_2)$ pour $\frac{1}{2} \geqq t_2 > t_1 \geqq 0$ tels que l'on n'ait pas constamment l'égalité

$$\Phi(t_1) = \Phi(t) = \Phi(t_2)$$

pour

$$t_1 \leqq t \leqq t_2."$$

Envisageons le segment $(0, 1)$ de la variable t. Envisageons les deux segments $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ et $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$. Nous pouvons partager l'ensemble E de points $0 \leqq t \leqq \frac{1}{2}$ en deux ensembles E_1 et E_2.

E_1 sera formé d'un nombre dénombrable de segments $p_1 = (t_1 t_2)$, $t_1 < t_2$ tels que les points correspondant à t tel que l'on a $t_1 \leqq t \leqq t_2$ sont situés sur une même droite perpendiculaire à l'axe des x et qu'aucun autre point de la courbe $C(t)$ pour $0 \leqq t \leqq \frac{1}{2}$ n'est situé sur cette droite.

Les segments p_i sont donc sans points communs, E_2 sera l'ensemble résidu de l'ensemble E_1 dans le segment $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ de t.

Envisageons maintenant l'ensemble de points $P(t)$ qui correspond au valeurs de t de l'ensemble E_2. On a toujours

$$\Phi(t_2) < \Phi(t_1), \quad t_2 > t_1.$$

Envisageons un segment p_i. Supposons que sur ce segment se trouvent deux valeurs t' et t'' $t' < t''$ telles que l'on a l'égalité $P(t') = P(t'')$. Il y a alors un segment q bien déterminé dont les extrémités correspondent aux valeurs $\bar{t}'$ et $\bar{t}''$ de t telles que l'on a

$$t_1 \leqq \bar{t}' \leqq t' \leqq t'' \leqq \bar{t}'' \leqq t_2,$$

que l'on a $P(\bar{t}') = P(t') = P(t'') = P(\bar{t}'')$, et qu'à l'intérieur des segments $(t_1, \bar{t}')$ et $(\bar{t}'', t_2)$ il n'y a pas de valeur de t pour laquelle on ait $P(t) = P(t') = P(t'')$. Les points $P(\bar{t}')$ et $P(\bar{t}'')$ peuvent d'ailleurs se confondre avec les points $P(t_1)$ et $P(t_2)$.

Envisageons l'ensemble résidu du segment p_i par rapport à la somme Σq des intérieurs des segments q. Cet ensemble est fermé. Il est dense en lui même, à l'exception, peut être, des valeurs t_1 et t_2 qui peuvent être isolées.

Envisageons maintenant l'ensemble E' résiduel du segment $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ par rapport à la somme des intérieurs des segments q qui appartiennent aux segments p de l'intervalle $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Cet ensemble est le résiduel de l'intervalle $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ par rapport à une somme dénombrable d'intérieurs d'intervalles sans points communs. Il est parfait sauf qu'il peut contenir les deux points isolés 0 et 1. Pour $t' \neq t''$ on a $P(t') \neq P(t'')$.

Théorème 17: „On peut représenter l'ensemble E' uniunivoquement et avec conservation de l'ordre sur l'intervalle $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ d'une variable τ de telle manière qu'aux valeurs $t = 0$, $t = \frac{1}{2}$ correspondent les valeurs $\tau = 0$, $\tau = \frac{1}{2}$."

Les deux extrémités t_1, t_2 d'un intervalle sont envisagés comme représentant un „point" abstrait. Nous avons donc un ensemble abstrait $E^{*\prime}$ fermé et partout dense. On peut extraire de cet ensemble $E^{*\prime}$ un sous-ensemble $E^{**\prime}$ dénombrable et partout dense dans l'ensemble $E^{*\prime}$. Il suffit d'envisager l'ensemble composé de l'infinité dénombrable de paires t_1, t_2

d'extrémités des segments q et des ensembles dénombrables partout denses quelconques situés à l'intérieur des intervalles r appartenant à l'ensemble $E^{**\prime}$.

On peut ensuite représenter uniunivoquement et avec conservation de l'ordre l'ensemble $E^{**\prime}$ sur l'ensemble des nombres rationnels du segment $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ de τ. Cette correspondance permet de définir une correspondance uniunivoque et avec conservation de l'ordre entre l'ensemble $E^{*\prime}$ et le segment $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ de τ.

Nous pouvons donc représenter le courbe $C(t)$ au moyen du paramètre τ par les fonctions

$$x = f(\tau), \quad y = g(\tau), \quad 0 \leqq \tau \leqq 1$$

telles que l'on ait

$$f(\tau'') < f(\tau') \quad \text{pour } \tau'' > \tau', \quad 0 \leqq \tau' < \tau'' \leqq \frac{1}{2},$$

et qu'à chaque point de la courbe corresponde une valeur unique de τ.

Les fonctions $f(\tau)$, $g(\tau)$ sont continues, à variation bornée. La courbe $C(\tau)$ est rectifiable et de longueur pas plus grande que la longueur de la courbe $C(t)$.

4. Nous supposerons maintenant que nous nous trouvons dans le premier des deux cas énumérés au N° précédent. Nous avons alors le

Théorème 18: „Si un point P appartient à $C(\tau)$, alors le point $\bar{P}$ symétrique du point P par rapport à l'axe x appartient aussi à $C(t)$".

Envisageons la suite $C_i(t)$ de polygones symétriques par rapport à l'axe x et qui appartiennent à la suite convergente $C(t)$. Les points $P_i'(t)$ convergent vers le point $P(t)$. Donc les points $\bar{P}_i'$ symétriques des points $P_i'(t)$ par rapport à l'axe $\bar{x}$ convergent de même vers le point $\bar{P}$ symétrique du point $P(t)$ par rapport à l'axe $\bar{x}$. Ce point $\bar{P}$ appartient à la courbe $C(t)$, car (Théorème 8) tout point limite de la suite $\bar{P}_i'$ appartient a cette courbe.

Théorème 19: „Tout point Q de la circonférence du cercle Γ qui a son centre au centre O et qui passe par un point P de la courbe $C(t)$ appartient à $C(t)$".

Nous pouvons trouver une suite finie de points $P^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots n$ de la circonférence Γ telle que l'on ait $p^{(i)} = P$, que $P^{(i+1)}$ soit le symétrique du points $P^{(i)}$ par rapport à l'axe x, si i est impair et par rapport à l'axe $\bar{x}$, si i est pair, et que la distance $P^{(i)}\,Q$ soit plus petite que ε.

Nous pouvons ainsi trouver une suite infinie de points $P^{(k_n)}$, $n = 1, 2, \ldots$ qui tendent vers le point Q. Donc le point Q appartient à la courbe $C(t)$.

Théorème 20: „Le courbe $C(t)$ ne contient qu'un seul cercle de centre Q".

En effet, supposons qu'à la courbe $C(t)$ appartiennent deux circonférences de cercles Γ et Γ'. Envisageons deux points $P(t)$ et $P'(t')$ de ces cercles. Il existe un arc de la courbe $C(t)$ qui lie le point $P(t)$ au point $P'(t')$; t, t' sont deux valeurs quelconques de t qui correspondent aux points P et P'. L'arc (t, t') coupe chaque circonférence de cercle Γ de centre O et située entre les circonférences de cercles Γ et Γ' au moins en un point P. Donc toute la circonférence Γ de centre O et passant par P devrait appartenir à $C(t)$. Donc toute la couronne circulaire (Γ, Γ') située entre les cercles Γ et Γ' devrait appartenir à $C(t)$ ce qui n'est pas possible.

Théorème 21: „La courbe $C(t)$ est identique à la circonférence Γ de cercle de centre O parcourue dans le même sens".

5. Supposons maintenant que nous nous trouvons dans le cas, où la circonstance II. du № 3. a lieu. Nous avons tout d'abord les théorèmes:

Théorème 22: „La longueur L de la courbe $C(t)$ n'est pas plus grande que $\lim\limits_{i=\infty} L_i = \Lambda$. On a donc l'inégalité

$$(24) \quad L \leqq \Lambda."$$

On peut trouver un nombre n assez grand pour que l'on ait l'inégalitè

$$L - \sum_{k=1}^{n} P^{(k)}\,P^{(k+1)} < \frac{\varepsilon}{2},$$

$P^{(k)}$ étant le point $P(t^k)$, puis un nombre N assez grand pour que l'on ait pour $i > N$ les inégalités

$$P_i(t^k)\,P(t^k) < \frac{\varepsilon}{4n}.$$

Mais on a les inégalités

$$P_i(t^k)\,P_i(t^{k+1}) < P(t^k)\,P(t^{k+1}) + P_i(t^k)\,P(t^k) + P_i(t^{k+1})\,P(t^{k+1})$$

$$P(t^k)\,P(t^{k+1}) < P_i(t^k)\,P_i(t^{k+1}) + P_i(t^k)\,P(t^k) + P_i(t^{k+1})\,P(t^{k+1}).$$

Donc on a

$$\left| \sum_{k=1}^{n} P^{(k)}\,P^{(k+1)} - \sum_{k=1}^{n} P_i(t^k)\,P_i(t^{k+1}) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

donc comme

$$L_i \geqq \sum_{k=1}^{n} P_i^1(t^k)\, P_i(t^{k+1}),$$

on a, puisque l'on a

$$\left| L - \sum_{k=1}^{n} P_i(t^k)\, P_i(t^{k+1}) \right| < \varepsilon,$$

$$\sum_{k=1}^{n} P_i(t^k)\, P_i(t^{k+1}) < L - \varepsilon,$$

l'inégalité

$$L_i \geqq L - \varepsilon$$

pour toutes les valeurs $i > N$, donc

$$\Lambda \geqq L - \varepsilon,$$

donc

$$\Lambda \geqq L.$$

Théorème 23: „Envisageons une suite infinie de polygones $C_i(t)$ tendant vers une courbe limite $C(t)$. On peut trouver, pour chaque nombre $\eta > 0$ un nombre fini de cercles $\Gamma^{(k)}$ $k = 1, 2, \ldots n$ tels que la surface de ces cercles soit $< \eta$ et que la courbe $C(t)$ soit à l'intérieur de ces cercles".

Envisageons le segment 0, 1 de t. Nous pouvons partager 0, 1 en segments $t_k\, t_{k+1}$ tels que l'arc $P^{(k)}\, P^{(k+1)}$ soit plus petit que ε en longueur. Entourons les points $P^{(k)}$ de cercles Γ^k de rayons 2ε. Alors l'arc $P^{(k)}\, P^{(k+1)}$ se trouve à l'intérieur des cercles $\Gamma^{(k)}$ et $\Gamma^{(k+1)}$.

Nous pouvons, de plus, entourer les points $P^{(k)}$ de cercles Γ^k de rayons ε. La courbe $C(t)$ sera à l'intérieur de ces cercles. Donc la distance des points de la courbe $C(t)$ des points du plan extérieurs aux cercles $\Gamma^{(k)}$ est $> \varepsilon$.

Le nombre n des cercles $\Gamma^{(k)}$ est égal à $\frac{1}{\varepsilon'}$, si l'on a partagé (0, 1) en des segments égaux de longueur $\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{L}$, et telle que ε' soit l'inverse d'un nombre entier. Donc l'aire totale a des cercles $\Gamma^{(k)}$ n'est pas plus grande que $\frac{1}{\varepsilon'}(2\varepsilon)^2\pi$

$$a \leqq \frac{1}{\varepsilon'}(2\varepsilon)^2\pi.$$

Donc si $K > 1$ est un nombre tel que l'on ait $K\varepsilon' > \frac{\varepsilon}{L}$ on a

$$a < \frac{KL}{\varepsilon}(2\varepsilon)^2\pi = 4KL\pi\varepsilon.$$

Donc pourvu que l'on ait

$$\varepsilon < \frac{\eta}{4\pi KL},$$

on aura

$$a < \eta.$$

Donc l'aire des polygones W_i contenue dans les cercles $\Gamma^{(k)}$ est plus petite que η. Si l'on dénote par A_i^* la partie du polygone W_i extérieure à a

$$(25) \quad A_i^* = A_i - (A_i, a),$$

on a

$$(26) \quad m(A_i^*) < A - \eta$$

A étant la mesure des aires des polygones W_i.

Donc on a le

Théorème 24: „L'aire de la partie des polygones W_i extérieure à l'aire des cercles $\Gamma^{(k)}$ diffère de la mesure A des aires des polygones W_i de moins de η".

On a le

Théorème 25: „On peut trouver un nombre J entier suffisamment grand pour que pour $i > J$ les polygones $P_i(t)$ soient contenus à l'intérieur de l'aire a et que la distance de $P_i(t)$ de l'extérieur des cercles $\Gamma^{(k)}$ soit $> \varepsilon - \varepsilon'$, ε' étant un nombre arbitrairement petit".

Car on peut choisir J assez grand pour que l'on ait l'inégalité

$$P_i(t)\, P(t) < \varepsilon'.$$

Mais alors on a

$$P_i(t)\, P^k < P_i(t)\, P(t) + P(t)\, P^k < \varepsilon + \varepsilon',$$

si t est situé entre t^k et t^{k+1}. Donc on a

$$\Gamma^k P_i(t) < 2\varepsilon - (\varepsilon + \varepsilon') = \varepsilon - \varepsilon',$$

si $\Gamma^k P_i(t)$ dénote la distance du point $P_i(t)$ de la circonférence du cercle Γ^k, à l'intérieur duquel se trouve $P_i(t)$.

Envisageons les droites l perpendiculaires à l'axe x. Nous avons, sur un ensemble dénombrable de ces droites, des segments s de la courbe $C(t)$, et de même, sur un ensemble dénombrable de ces droites, des segments des polygones $C_i(t)$. Nous pouvons supposer l'aire a des cercles $\Gamma^{(k)}$ symétrique par rapport à l'axe des x et en formant ces cercles de manière à avoir

des paires de deux cercles symétriques par rapport à l'axe des x. Les aires $A_i - (A_i, a)$ des polygones W_i extérieures aux cercles $\Gamma^{(k)}$ seront alors de même symétriques par rapport à l'axe des x.

Envisageons l'ensemble des droites l perpendiculaires à l'axe x. Si J est assez grand, alors les courbes $C_i(t)$ se trouvent à l'intérieur de l'aire a qui correspond à un nombre ε et la distance de $C_i(t)$ de l'extérieur de a est $> \varepsilon - \varepsilon'$. Donc les points P_i, P_i où la droite l coupe le polygone $C_i(t)$ sont à l'intérieur de a.

Nous définirons maintenant ce qu'on doit entendre par l'aire intérieure à la courbe fermée $C(t)$. Cette courbe divise le plan en un ensemble dénombrable de domaines intérieurs à la courbe et en un domaine extérieur. Les domaines $D_1, D_2, \ldots$ intérieurs à la courbe $C(t)$ sont symétriques par rapport à l'axe des x.

Si A et B sont les points de l'axe des x qui correspondent aux valeurs $t = 0$ et $t = \frac{1}{2}$, alors l'ensemble E des points de $C(t)$ situés sur l'axe des x est un ensemble fermé. Donc il est résiduel par rapport à un ensemble dénombrable de segments p_i situés sur cet axe. Envisageons une droite l perpendiculaire à x et passant par un point C intérieur à un segment p_i. Cette droite a avec $C(t)$ un point P commun situé au dessus de l'axe x et d'ordonnée y plus petite que les autres points de $C(t)$ situés sur cette droite. Au point P correspond un point $\overline{P}$ symétrique par rapport à l'axe x. Le segment $P\overline{P}$ est situé dans le domaine D_i formé par l'ensemble de ces segments qui correspondent aux points C de l'intervalle p^i.

Nous avons donc un ensemble dénombrable de domaines $D_1, D_2, \ldots$ Les aires de ces domaines sont intégrables au sens de Riemann. En effet, $P\overline{P}$ envisagé comme fonction de x a un ensemble dénombrable de points de discontinuité. Cette intégrale

$$\int P\overline{P}\, dx$$

est l'aire de la courbe $C(t)$.

Envisageons maintenant les segments de l'aire $A_i' = A_i - (A_i, a)$, les droites l qui n'appartiennent pas à l'ensemble dénombrable de droites dont il a été question. Si sur cette droite se trouve un segment s unique, ce segment appartient à l'intérieur de la courbe $C(t)$, c'est à dire est situé entre les deux points P et $\overline{P}$, où l coupe $C(t)$. Si sur la droite l on a plusieurs segments s, envisageons les deux segments s, s extrêmes sur cette droite. Entourons ces segments de deux rectangles Π et $\overline{\Pi}$ concentriques à ces segments et tels que les bases parallèles à l'axe des x aient la longueur $2\varepsilon''$ et que la hauteur soit égale à $s + 2\varepsilon''$.

Si l'on choisit $\varepsilon'' = \frac{\varepsilon - \varepsilon'}{2\sqrt{2}}$, alors la plus petite distance du contour $P_i(t)$ du polygone W_i du contour R du rectangle Π n'est pas plus petite que la différence entre la plus petite distance au sens de la définition 6. des courbes R et s:

$$\min [P_i(t)\, R] \geqq \min [P_i(t)\, Q] - D(a\, R)$$

$$> \varepsilon - \varepsilon' - \sqrt{2}\, \frac{\varepsilon - \varepsilon'}{2\sqrt{2}} = \frac{\varepsilon - \varepsilon'}{2} = \sqrt{2}\, \varepsilon''.$$

Envisageons maintenant le rectangle Π^* que l'on obtient en entourant le segment de la droite l qui se trouve entre l'extrémité supérieure A du segment s et l'extrémité inférieure $\overline{A}$ du segment $\overline{s}$ par un rectangle de base $2\varepsilon''$, parallèle à l'axe x et de hauteur égale à $A\overline{A} + 2\varepsilon''$, rectangle concentrique à $A\overline{A}$.

Dans le rectangle Π^* il n'y a pas de point du contour $C_i(t)$. Car les deux points $P_i, \overline{P}_i$ où la droite l coupe $C_i(t)$ sont extérieurs au rectangle Π^* et il n'y a pas de points de $C_i(t)$ dans les deux rectangles Π et $\overline{\Pi}$.

Sur la droite l il n'y a pas à l'intérieur du rectangle Π^* des points de $C(t)$. En effet, si $P(t)$ etait un point de $C(t)$ situé à l'intérieur de Π^* sur la droite l', alors il y aurait un point $P_i(t)$ de $C_i(t)$ tel que l'on aurait

$$P(t)\, P_i(t) < \varepsilon',$$

donc $P_i(t)$ serait intérieur à Π^*, pourvu que l'on aurait l'inégalité

$$\varepsilon'' > \varepsilon',$$

c'est à dire l'inégalité

$$\frac{\varepsilon - \varepsilon'}{2\sqrt{2}} > \varepsilon',$$

$$\varepsilon > (2\sqrt{2} + 1)\, \varepsilon',$$

inégalité qui est remplie si l'on a choisi $\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}$ suffisamment petit.

Nous avons donc le

Théorème 26: „Tous les segments de droites l situés dans l'aire A_i^* appartiennent à l'intérieur de la courbe $C(t)$, à l'exception peut être d'un ensemble de segments s qui se trouvent sur un ensemble dénombrable de droites".

L'aire a_ε des cercles Γ_ε^k tend vers zéro avec ε, donc l'aire (A_i, a_ε) tend vers zéro avec ε. Donc l'aire de $A_i^* = A_i - (A_i, a_\varepsilon)$ tend vers A, la me-

sure de l'aire des polygones A_i, si ε tend vers zéro. Donc l'on choisit i assez grand l'aire de A_i^* est située, à l'exception d'un ensemble de mesure nulle peut être, à l'intérieur de l'aire A^{**} de $C(t)$, donc nous avons l'inégalité

$$(27) \quad m(A) \geqq \lim_{\varepsilon=0} m(A_i^*) = \lim_{\varepsilon=0} m[A_i - (A_i, a_\varepsilon)] = A.$$

Nous avons donc le

Théorème 27: „L'aire de la courbe $C(t)$ n'est pas plus petite que l'aire des polygones W_i".

Envisageons maintenant un segment $P\overline{P}$ de l'intérieur de $C(t)$, non situé sur une des droites l sur lesquelles se trouvent des segments s perpendiculaires à l'axe x.

Les points P et P se trouvent à l'intérieur de deux cercles Γ de rayon 2ε. Les points $P_i(t)$, $\overline{P}_i(\overline{t})$ du contour $C_i(t)$ qui correspondent aux valeurs t, $\overline{t}$ des paramètres des points P et $\overline{P}$ se trouvent à l'intérieur de deux cercles Γ_ε, de rayon ε' et de centres P et $\overline{P}$.

Nous affirmons que $P\overline{P}$ se trouve à l'intérieur de $A_i + a_\varepsilon$.

En effet, si $P\overline{P}$ ne se trouve pas à l'intérieur de A_i, alors on a sur la droite l deux points $P_i^*\overline{P}_i$, où la droite l (sur laquelle il n'y a pas de segments de $C(t)$) coupe $C_i(t)$.

Joignons P_i^* à P_i par l'arc de la courbe $C_i(t)$.

Chaque point de cet arc a une distance de la droite l plus petite que ε'. Il s'en suit que le segment PP_i^* ainsi quele segment $\overline{P}\,\overline{P}_i^*$ de la droite l appartienent à a_ε.

Donc tous les segments de $C(t)$ se trouvent à l'exception peut être de segments situés sur un ensemble dénombrable de droites l à l'intérieur de $A_i + a_\varepsilon$, i etant suffisamment grand.

On a donc le théorème.

Théorème 28: „L'aire de $C(t)$ n'est pas plus grande que l'aire A constante des polygones W_i".

Donc nous avons le

Théorème 29: „L'aire de la courbe $C(t)$ est égale à l'aire des polygones W^i".

Nous envisagerons maintenant les potentiels logarithmiques des polygones W_i. Le potentiel logarithmique d'une ensemble E mesurable au sens de M. Lebesgue est par définition la valeur de l'intégrale.

$$(28) \quad J = \frac{1}{2} \int dx\, dy \int dx'\, dy' \log \frac{1}{r},$$

$$r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y)^2},$$

étendue à l'ensemble E. La fonction $\log \frac{1}{r}$ est sommable dans un ensemble mesurable E.

Théorème 30: „Les potentiels logarithmiques J_i des polygones W_i forment une suite non décroissante:

$$(29) \quad J_{i+1} \geqq J_i.$$

On ne peut avoir le signe d'égalité que si W_i est symétrique par rapport à l'axe, par rapport à laquelle la symétrisation donne le polygone W_{i+1}.

Ce théorème résulte immédiatement des considérations tout à fait analogues à celles que j'ai dévelloppées au premier chapitre de mon Mémoire „Sur un théorème de Liapounoff", dont il a été question dans l'Introduction.

Envisageons un cercle Γ et le potentiel au centre O. Ce potentiel est égal à

$$(30) \quad V = \int_0^{2\pi}\int_0^R r\, dr\, d\varphi \log \frac{1}{r} = 2\pi \int_0^R r\, dr \log \frac{1}{r}$$

$$= 2\pi \left(\frac{r^2 \log \frac{1}{r}}{2} + \frac{r^2}{4} \right)_0^R = 2\pi \left(\frac{k^2 \log \frac{1}{R}}{2} + \frac{R^2}{4} \right).$$

Donc le potentiel logarithmique de l'aire a_ε est plus petit que n^2 fois le potentiel logarithmique de la surface d'un cercle de rayon 2ε, n étant le nombre de cercles. On a $n = \frac{L}{\varepsilon}$,

$$J(\Gamma) < K\varepsilon^2 \log \frac{1}{\varepsilon} . \varepsilon^2 = K\varepsilon^4 \log \frac{1}{\varepsilon},$$

on a d'ailleurs la formule exacte

$$(31) \quad J(\Gamma) = \frac{\pi^2 R^4}{2} \left(\log \frac{1}{R} + \frac{1}{4} \right).$$

Donc nous avons l'inégalité

$$(32) \quad J(a_\varepsilon) < \frac{L^2}{\varepsilon^2} . K\varepsilon^4 \log \frac{1}{\varepsilon} = K'\varepsilon^2 \log \frac{1}{\varepsilon}.$$

Envisageons ensuite le potentiel des cercles Γ et de l'aire A_i du polygone W_i extérieure à a_ε. Ce potentiel est plus petit que

$$J(a_\varepsilon, A_i^*) < K\varepsilon^2 \log \frac{1}{\varepsilon} . n = K'\varepsilon \log \frac{1}{\varepsilon},$$

K, K' étant des constantes fixes.

Donc le potentiel logarithmique de l'aire A_i^* diffère du potentiel logarithmique de l'aire A_i aussi peu que l'on veut si ε est suffisamment petit

$$(33) \quad \lim_{\varepsilon=0} J(A_i) = J(A_i).$$

De même le potentiel $J(A^{**})$ de l'aire de la courbe $C(t)$ diffère aussi peu que l'on veut du potentiel $J(A_i^*)$, pour que i soit suffisamment grand

$$(34) \quad \lim_{i=\infty} J(A_i^*) = J(A_i^{**}).$$

Donc

$$(35) \quad J(A^{**}) = \lim_{i=\infty} J(A_i).$$

Nous obtenons donc le

Théorème 31: „Le potentiel logarithmique de l'aire A de la courbe $C(t)$ est égal à la limite des valeurs $J(A_i)$ des potentiels des polygones W_i".

Envisageons maintenant la suite $\overline{C}_i(t)$ de polygones symétriques par rapport à l'axe $\overline{x}$ des polygones $C_i(t)$ qui convergent vers la courbe $C(t)$. Ces polygones appartiennent à la suite de polygones $C_i(t)$ et correspondent à des valeurs paires de i.

Nous avons les inégalités.

$$(36) \quad J(\overline{W}_i') \geqq J(W_i').$$

$$(37) \quad \lim_{i=\infty} J(\overline{W}_i') = \lim_{i=\infty} J(W_i') = \lim_{i=\infty} J(W_i).$$

Envisageons la suite infinie de polygones $\overline{W}_i'$. De cette suite on peut extraire une autre suite infinie $\overline{W}_i''$ de polygones qui sont les symétriques des polygones W_i'' par rapport à l'axe x, suite qui converge vers une courbe $\overline{C}(t)$.

Soit maintenant $\overline{A}$ l'aire de cette courbe. Nous avons

$$\overline{A}^{**} = \lim \overline{A}_i'' = \overline{A} = A$$

$\overline{A}$ étant l'aire des polygones $\overline{W}_i$.

Nous avons

$$(38) \quad J(\overline{A}^{**}) = \lim_{i=\infty} J(\overline{A}_i'') = \lim_{i=\infty} J(A_i) = J(A^{**}).$$

Envisageons maintenant les droites $\overline{l}$ perpendiculaires à l'axe des $\overline{x}$. Pour i assez grand diffère l'aire commune $\overline{A}_i''$ des polygones $\overline{W}_i''$ et de l'intérieur de la courbe $C(t)$ aussi peu que l'on veut de l'aire A_i'' de W_i'' et de l'aire A^{**} de l'intérieur de $C(t)$. Donc les segments $\overline{s}_i''$ situés sur les droites $\overline{l}$ et appartenant à l'aire $\overline{A}_i''$ ne diffèrent que par un ensemble de points de mesure arbitrairement petite de l'ensemble des segments s_i'' découpés par les droites $\overline{l}$ sur W_i'' et de l'ensemble des segments s qui sont à l'intérieur de $C(t)$.

Mais la somme des segments $\Sigma s''_i$ de W_i'' situés sur une droite $\overline{l}$ est égale au segment unique $\overline{s}_i$ de $\overline{l}$ situé sur le polygone $\overline{W}_i''$. On peut d'ailleurs entourer la courbe $C(t)$ d'un nombre fini de cercles $\Gamma^{(k)}$ d'aire totale $\mathfrak{A}_1$ arbitrairement petite, de sorte que les segments situés sur les droites $\overline{l}$ et situés dans l'aire $A_i^{*''} = A_i'' - (A_i'', \mathfrak{A}_1) = A^{**} - (A^{**}, \mathfrak{A}_1)$ diffèrent par un ensemble de segments de mesure arbitrairement petite de l'ensemble de segments contenus dans A_i'' et de l'ensemble de segments contenus dans l'aire A^{**}. On peut d'autre part entourer la courbe $\overline{C}(t)$ d'un nombre fini de cercles $\Gamma^{(k)}$ d'aire totale arbitrairement petite $\overline{\mathfrak{A}}_2$. On peut supposer i choisi assez grand pour que l'aire $\overline{A}_i^* = \overline{A}_i'' - (\overline{A}_i'', \overline{\mathfrak{A}}_2)$ diffère aussi peu que l'on le veut de l'aire $\overline{A}_i''$ et de l'aire $\overline{A}^{**}$ intérieure à la courbe $\overline{C}(t)$. On a d'ailleurs

$$\overline{A}_i'' - (\overline{A}_i'', \overline{\mathfrak{A}}_2) = \overline{A}^{**} - (\overline{A}^{**}, \overline{\mathfrak{A}}_2).$$

Donc l'aire $\overline{A}^{**}$ de la courbe $\overline{C}(t)$ diffère d'un nombre arbitrairement petit de l'aire des polygones $\overline{W}_i''$ qui sont composés de segments $\overline{s}''$ symmétriques des sommes des segments $\Sigma s''$. Or l'aire A^{**} de la courbe $C(t)$ diffère par un ensemble de mesure arbitrairement petite de l'aire du polygone W_i''.

Or nous avons le théorème suivant:

Théorème 32: „Soit donné un ensemble mesurable E de points qui forme une figure F. Remplaçons cet ensemble par une figure $\overline{F}$ formée de la manière suivante. Sur chaque droite $\overline{l}$ perpendiculaire à l'axe des $\overline{x}$ on remplace, à un ensemble de droites de mesure nulle près, l'ensemble de points de E situé sur cette droite par un segment $\overline{s}$ de longueur égale à la mesure de l'ensemble E situé sur l et symétrique par rapport à l'axe des x. Le potentiel $J(\overline{F})$ de la figure $\overline{F}$ est plus grand que le potentiel $J(F)$ de F, s'il existe un ensemble de droites $\overline{l}$ de mesure positive (c'est à dire que sur l'axe $\overline{x}$ à ces droites correspond un ensemble de mesure positive de

points, où ces droites $\overline{l}$ percent l'axe $\overline{x}$), sur lesquelles les ensembles de points de E ne sont pas déjà des segments symétriques par rapport à l'axe des $\overline{x}$, à un ensemble des points de mesure nulle près".

Nous ne donnerons pas la démonstration de ce théorème, qui est analogue à la démonstration donnée pour le potentiel newtonien dans notre Mémoire cité.

Nous avons vu que l'on doit avoir

$$\lim J(A_i'') = J(A^{**}),$$

$$\lim J(A_i'') = J(A^{**}),$$

$$\lim J(\overline{A}_i'') = \lim J(A_i'') = \lim J(A_i).$$

Donc on a l'égalité

$$(39) \quad J(F) = J(\overline{F}).$$

Il s'en suit d'après le théorème énoncé que l'on a le

Théorème 33: „La figure $\overline{F}$ est symétrique, à un ensemble de points de mesure nulle, près de la figure F par rapport à l'axe des $\overline{x}$".

L'ensemble composé par l'intérieur de la courbe $C(t)$ et par cette courbe elle même est donc tel, qu'à un ensemble de points de mesure nulle près chaque point $\overline{P}$ symétrique d'un point P de cet ensemble appartient à cet ensemble.

Il s'en suit facilement qu'à un ensemble de points de mesure nulle près la surface et la circonférence d'un cercle Γ de centre O et d'aire égale à l'aire A des polygones W_i appartiennent à F et constituent la figure F.

Il s'en suit que la courbe $C(\tau)$ du № 4. est précisément la circonférence du cercle Γ. Tout point de la circonférence de Γ appartient donc à la courbe $C(t)$.

7. Supposons maintenant qu'il y ait un point P de la courbe $C(t)$ et non situé sur la circonférence Γ. Supposons ce point intérieur à Γ. Alors le segment PQ, Q étant le point de Γ situé sur la même perpendiculaire à l'axe des x appartient à $C(t)$.

Si ce segment appartient à une droite l perpendiculaire à l'axe des x qui rencontre l'intérieur du cercle Γ, et si nous envisageons deux points Q' et Q'' arbitrairement voisins du point Q, appartenant à la circonférence du cercle Γ et situés des deux côtés de la droite l, il y a une suite infinie de polygones W_i'' dont les contours $C_i''(t)$ tendent vers les points P, Q', Q''.

Envisageons les arcs $P_i\breve{Q}_i'$ et $P_i\breve{Q}_i''$ de ces polygones. Envisageons deux points P_1, P_2 situés sur le segment PQ et intérieurs à ce segment, tels que l'on ait p. ex. $P_1P_2 = \frac{s}{2}$. Menons par ces deux points deux droites $\overline{l}_1, \overline{l}_2$ perpendiculaires à l'axe $\overline{x}$. Si $Q'Q''$ sont suffisamment voisins du point Q et si i est assez grand, les droites l_1, l_2 coupent les deux arcs $P_i\breve{\mathfrak{A}}_i$ et $P_i\breve{\mathfrak{A}}_i$. Soient $R_1'R_2'$ et $R_1''R_2''$ deux arcs que découpent les droites $\overline{l}_1, \overline{l}_2$ sur $P_i\breve{\mathfrak{A}}_i'$ et sur $P_i\breve{Q}_i'$ tels qu'aucun point de l'intérieur de l'arc $R_1''R_2''$ ne soit situé sur une des deux droites l_1 et l_2.

Si l'on symétrise le polygone W_i'' par rapport à l'axe des $\overline{x}$, qui n'est pas perpendiculaire à l'axe des x ni parallèle à cet axe, on peut facilement démontrer qne le polygone symétrisé $\overline{W}_i''$ a un contour $\overline{C}_i''(t)$ dont la longueur $\overline{L}_i''$ diffère de la longueur L_i'' du contour $C_i''(t)$ d'au moins $\overline{\alpha}$

$$\overline{L}_i'' \leqq L_i'' - \alpha,$$

$\overline{\alpha}$ étant un nombre positif indépendant de i.

Donc comme les polygones W_i'' et $\overline{W}_i''$ appartiennent à la même suite infinie de polygones symétriques alternativement par rapport aux deux axes x et $\overline{x}$, on a pour k assez grand.

$$L''_{i+k} \leqq L_i'' - m\alpha,$$

m étant un nombre positif arbitrairement grand et k étant fonction de m, ce qui est absurde.

En effet, si i est assez grand, et si Q', Q'' sont suffisamment voisins du point Q de la circonférence du cercle Γ, les deux arcs $R_1'R_2'$ et $R_1''R_2''$ sont situés entre deux droites parallèles à PQ et situées des deux côtés de PQ. Il s'en suit que la longueur des arcs $R_1'R_2'$ et $R_1''R_2''$ est au moins égale à $P_1P_2 - \varepsilon = \frac{s}{2} - \varepsilon$.

Or la distance des deux droites l_1 et l_2 est égale à $d = \frac{s}{2}\sin\alpha$, α étant l'angle des deux axes x et $\overline{x}$. Si l'on symétrise la partie du polygone W_i'' qui est située entre ces deux droites, alors les côtés des quadrilatères symétriques par rapport à l'axe des $\overline{x}$ situés entre $\overline{l}_1$ et $\overline{l}_2$ du polygone $\overline{W}_i''$ ont une longueur totale plus petite que la longueur de côtés des quadrilatères du polygone W_i'' situés entre $\overline{l}_1$ et $\overline{l}_2$. On a d'après les résultats du № 2:

$$\left(\sum_{j=1}^{2i} a_j\right)^2 - 4L^2 \geqq (2i-4)\,d^2 + \sum_{\substack{j,j'=1\\ j\neq j'}}^{2i} \left[a_j a_j' - |\eta_j \eta_j'|\right]$$

$$\geqq \sum_{\substack{j,j'=1\\ j\neq j'}}^{2i} \left[\sqrt{d^2+\eta_j^2}\,\sqrt{d^2+\eta_{j'}^2} - |\eta_j \eta_{j'}|\right]$$

$$= \sum_{\substack{j,j'=1\\ j\neq j}}^{2i} \frac{d^2\,(d^2+\eta_j+\eta_{j'}^2)}{\sqrt{d^2+\eta_j^2}\,\sqrt{d^2+\eta_{j'}^2} + |\eta_j \eta_{j'}|} > K d^2 \sum_{\substack{j,j'=1\\ j\neq j}}^{2i} (d^2+\eta_j+\eta_{j'}),$$

K étant un nombre positif fixe. et i étant supposé $\geqq 2$. Pour $i=1$ on a

$$(a_1+a_2)^2 - 4L^2 \geqq 2d^2 K (\eta_1+\eta_2)^2.$$

Si le point P est à l'intérieur de cercle Γ on a $i \geqq 2$, mais si P est à l'extérieur du cercle Γ il peut arriver que l'on a $i=1$ pour certains paires de droites l, l' parallèles aux droites $\bar{l}_1, \bar{l}_2$ et situées entre ces droites

Envisageons la partie du polygone W_i'' située entre $\bar{l}_1$ et $\bar{l}_2$. À cette partie appartient le polygone situé entre $\bar{l}_1, \bar{l}_2$ et les deux arcs $R_1' R_2'$ et $R_1'' R_2''$, et peut être encore d'autres polygones. Menons par tous les sommets de cette partie du polygone W_i'' des droites parallèles aux droites $\bar{l}_1, \bar{l}_2$. Soient $a_j, j=1,2,\ldots 2i$ les côtés des quadrilatères qui appartiennent à $R_1' R_2' R_1'' R_2''$ et $\bar{a}_j, j=1,2,\ldots 2\bar{i}$ les côtés qui appartiennent aux autres polygones situés entre $\bar{l}_1$ et $\bar{l}_2$. Désignons de même par η_{2j}, $\bar{\eta}_{2j}$, η_{2j-1}, $\bar{\eta}_{2j-1}$ les différences

$$\eta_{2j} = y'_{2j} - y_{2j}, \quad \eta_{2j-1} = y'_{2j-1} - y_{2j-1},$$

$$\bar{\eta}_{2j} = \bar{y}'_{2j} - \bar{y}_{2j}, \quad \bar{\eta}_{2j-1} = \bar{y}'_{2j-1} - \bar{y}_{2j-1},$$

y' étant les ordonnées sur la droite $\bar{l}'$ et y étant les ordonnées sur la droite $\bar{l}'$ des sommets des quadrilatères.

Désignons par L les côtés du quadrilatère symétrisé que l'on obtient en symétrisant les polygones situés entre $\bar{l}$ et $\bar{l}'$ par rapport à l'axe $\bar{x}$. Désignons de même par Λ les côtés du quadrilatère symétrisé que l'on obtient en symétrisant le polygone $R_1' R_2' R_2'' R_1''$ par rapport à l'axe $\bar{x}$. On a

$$\sum_{j=1}^{2i} a_j + \sum_{j=1}^{2\bar{i}} \bar{a}_j - 2\sqrt{d^2 + \frac{1}{4}\left[\sum_{j=1}^{i}(y'_{2j}-y'_{2j-1}) - \sum_{j=1}^{i}(y_{2j}-y_{2j-1})\right.}$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{\bar{i}}(\bar{y}'_{2j}-\bar{y}'_{2j-1}) - \sum_{j=1}^{\bar{i}}(\bar{y}_{2j}-\bar{y}_{2j-1})\right]^2$$

$$= \sum_{j=1}^{2i} a_j + \sum_{j=1}^{2\bar{i}} \bar{a}_j - 2\sqrt{d^2 + \frac{1}{4}\left[\sum_{j=1}^{i}(\eta_{2j}-\eta_{2j-1}) + \sum_{j=1}^{\bar{i}}(\bar{\eta}_{2j}-\bar{\eta}_{2j-1})\right]^2}$$

$$= \sum_{j=1}^{2i} a_j + \sum_{j=1}^{2\bar{i}} \bar{a}_j - 2\sqrt{d^2 + \frac{1}{4}\left[\sum_{j=1}^{i} h_j - \sum_{j=1}^{\bar{i}} \bar{h}_j\right]^2},$$

$$h_j = \eta_{2j} - \eta_{2j-1}, \quad \bar{h}_j = \bar{\eta}_{2j} - \bar{\eta}_{2j-1}.$$

On a aussi

$$\sum_{j=1}^{2i} a_j - 2\sqrt{d^2 + \frac{1}{4}\left[\sum_{j=1}^{i}(y'_{2j}-y'_{2j-1}) - \sum_{j=1}^{i}(y_{2j}-y_{2j-1})\right]^2}$$

$$= \sum_{j=1}^{2i} a_j - 2\sqrt{d^2 + \frac{1}{4}\left[\sum_{j=1}^{i}(\eta_{2j}-\eta_{2j-1})\right]^2} = \sum_{j=1}^{2i} a_j - 2\sqrt{d^2 + \frac{1}{4}\left(\sum_{j=1}^{i} h_j\right)^2}.$$

Nous prouverons que la différence

$$\sum_{i=1}^{2\bar{i}} \bar{a}_j - 2L + 2\Lambda = \sum_{j=1}^{2\bar{i}} \bar{a}_j + 2\sqrt{d^2 + \frac{1}{4}\left(\sum_{j=1}^{i} h_j\right)^2}$$

$$- 2\sqrt{d^2 + \frac{1}{4}\left[\sum_{j=1}^{i} h_j - \sum_{j=1}^{\bar{i}} \bar{h}_j\right]^2}$$

est positive

Envisageons la différence des carrés

$$\left[\sum_{j=1}^{2\bar{i}} \bar{a}_j + 2\sqrt{d^2 + \frac{1}{4}\left(\sum_{j=1}^{i} h_j\right)^2}\right]^2 - 4\left\{d^2 + \frac{1}{4}\left[\sum_{j=1}^{i} h_j - \sum_{j=1}^{\bar{i}} \bar{h}_j\right]^2\right\}$$

$$= \sum_{j=1}^{2i} \overline{a}_j^2 + \sum_{\substack{j,j'=1\\ j\neq j'}}^{2i} \overline{a}_j\,\overline{a}_{j'} + 4d^2 + \Big(\sum_{j=1}^{i} h_j\Big)^2 +$$

$$+ 4\sum_{j=1}^{2i} \overline{a}_j \cdot \sqrt{d^2 + \frac{1}{4}\Big(\sum_{j=1}^{i} h_j\Big)^2} - 4d^2 - \Big(\sum_{j=1}^{i} h_j\Big)^2 - \Big(\sum_{j=1}^{i} \overline{h}_j\Big)^2$$

$$+ 2\sum_{j=1}^{i} h_{j'} \cdot \sum_{j=1}^{i} \overline{h}_j = \sum_{j=1}^{2i} \overline{a}_j^2 + \sum_{\substack{j,j'=1\\ j\neq j'}}^{2i} \overline{a}_j\,\overline{a}_{j'} + 4\sum_{j=1}^{2i} \overline{a}_j \cdot \sqrt{d^2 + \frac{1}{4}\Big(\sum_{j=1}^{i} h_j\Big)^2}$$

$$- \Big(\sum_{j=1}^{2i} \overline{h}_j\Big)^2 + 2\sum_{j=1}^{i} \overline{h}_j \cdot \sum_{j=1}^{i} h_j .$$

Nous avons

$$\sum_{j=1}^{2i} \overline{a}_j^2 + \sum_{\substack{j,j'=1\\ j\neq j'}}^{2i} \overline{a}_j\,\overline{a}_{j'} > \sum_{j=1}^{i} (\overline{h}_j)^2 = \sum_{j=1}^{i} \overline{\eta}_{2j}^{\,2} + \sum_{j=1}^{i} \overline{\eta}^2_{2j-1}$$

$$2\sum_{j=1}^{i} \overline{\eta}_{2j} \cdot \sum_{j=1}^{i} \overline{\eta}_{2j-1} + \sum_{\substack{j,j'=1\\ j\neq j'}}^{i} \overline{\eta}_{2j}\,\overline{\eta}_{2j} + \sum_{\substack{j,j'=1\\ j\neq j'}}^{i} \overline{\eta}_{2j-1}\,\overline{\eta}_{2j'-1} ,$$

et

$$\Big(2\sum_{j=1}^{2i} \overline{a}_j\Big)^2 \Big[d^2 + \frac{1}{4}\Big(\sum_{j=1}^{i} h_j\Big)^2\Big] - \Big(\sum_{j=1}^{i} h_j\Big)^2 \cdot \Big(\sum_{j=1}^{i} \overline{h}_j\Big)^2$$

$$> \Big(\sum_{j=1}^{2i} \overline{a}_j\Big)^2 \cdot \Big(\sum_{j=1}^{i} h_j\Big)^2 - \Big(\sum_{j=1}^{i} \overline{h}_j\Big)^2 \cdot \Big(\sum_{j=1}^{i} h_j\Big)^2 .$$

Mais on a

$$\Big(\sum_{j=1}^{2i} \overline{a}_j\Big)^2 - \Big(\sum_{=1}^{i} \overline{h}_j\Big)^2 = \sum_{j=1}^{2i} \overline{a}_j^2 + \sum_{\substack{j,j'=1\\ j\neq j'}}^{2i} \overline{a}_j\,\overline{a}_{j'} - \sum_{j=1}^{i} \overline{\eta}_{2j}^{\,2} - \sum_{j=1}^{i} \overline{\eta}_{2j-1}$$

$$- \sum_{\substack{j,j'=1\\ j\neq j'}}^{i} \overline{\eta}_{2j}\,\overline{\eta}_{2j'} - \sum_{\substack{j,j'=1\\ j\neq j'}}^{i} \overline{\eta}_{2j-1}\,\overline{\eta}_{2j'-1} + 2\sum_{j=1}^{i} \overline{\eta}_{2j} \sum_{j=1}^{i} \overline{\eta}_{2j-1} > 0.$$

Donc on a

$$(40) \qquad \sum_{j=1}^{2i} \overline{a}_j - 2L + 2\Lambda > 0.$$

Nous prouverons maintenant que la différence

$$(41) \qquad \sum_{j=1}^{2i} a_j - 2\Lambda$$

est supérieure à un nombre positif fixe indépendant du polygone W_i'', si l'index i du polygone est suffisamment grand. Envisageons le polygone $R_1'\,R_2'\,R_1''\,R_2''$. Envisageons les droites $\overline{l}$ parallèles aux deux droites $\overline{l}_1, \overline{l}_2$ qui passent par les sommets du polygone $R_1'\,R_2'\,R_1''\,R_2''$. Supposons les points Q, P_1, P_2, P tels qu'ils se suivent dans cet ordre sur le segment s. Supposons P extérieur au cercle Γ d'ordonnée plus grande que celle du point Q. Envisageons deux droites $\overline{l}, \overline{l}'$ parallèles aux droites $\overline{l}_1, \overline{l}_2$, situées entre ces deux droites. Si la droite $\overline{l}'$ est plus voisine de la droite $\overline{l}_2$ que la droite $\overline{l}$, alors la somme des segments découpés per la droite $\overline{l}'$ sur le polygone $R_1'\,R_2'\,R_1''\,R_2''$ est plus petite que la somme des segments découpés par la droite $\overline{l}$ sur $R_1'\,R_2'\,R_1''\,R_2''$. De même, si P est intérieur au cercle, et si $Q\,P_1\,P_2\,P$ se suivent sur s dans cet ordre, la droite $\overline{l}'$ plus voisine de $\overline{l}_2$ que la droite $\overline{l}$ découpe sur $R_1'\,R_2'\,R_1''\,R_2'$ des segments de longueur totale plus petite que la longueur des segments découpés par la droite $\overline{l}$.

Il s'en suit, que si l'on symétrise $R_1'\,R_2'\,R_1''\,R_2''$ par rapport à l'axe $\overline{x}$, on obtient un polygone composé de quadrilatères dont les côtés Λ forment deux lignes brisées qui s'approchent constamment de l'axe des $\overline{x}$ lorsque la droite $\overline{l}$ perpendiculaire à $\overline{x}$ s'approche de la droite $\overline{l}_2$.

Il s'en suit que la longueur $\Sigma\Lambda$ de chaque ligne brisée est plus petite que la somme

$$\frac{R_1'\,R_1''}{2} + d.$$

Donc si l'indice i de W_i'' est assez grand, on a

$$|\Sigma \Lambda - d| < \varepsilon.$$

D'autre part, la somme $\sum_{j=1}^{2i} a_j$, c'est à dire la somme des arcs $R_1' R_2'$ et $R_1'' R_2''$ n'est pas plus petite que deux fois $\frac{1}{2} - \varepsilon$, ε étant un nombre arbitrairement petit.

Nous parvenons donc à l'inégalité

$$(42) \quad \sum_{j=1}^{2i} a_j - 2\Lambda \geqq s - 2d - 2\varepsilon.$$

Mais nous avons

$$s = \frac{2d}{\sin \alpha}$$

Donc nous parvenons à une inégalité

$$(43) \quad \sum_{j=1}^{2i} a_j + \sum_{j=1}^{2\bar{i}} \bar{a}_j - 2L \geqq \bar{\alpha},$$

$\bar{\alpha}$ étant un nombre indépendant du polygone W_i'', si l'index de ce polygone est suffisamment grand. Donc on parvient à une conclusion absurde.

Si le point P est situé sur une droite tangente au cercle Γ, on parvient à une même conclusion absurde. Nous pouvons donc, enfin, énoncer le

Théorème 34: „La courbe $C(t)$ ne contient aucun point qui ne soit pas situé sur la circonférence Γ du cercle dont il a été question. Elle est donc identique à cette circonférence de cercle".

Nous voyons donc que l'on peut extraire de chaque suite infinie de polygones W_i contenue dans la suite infinie de polygones W_i une autre suite infinie de polygones W_i'' qui convergent uniformément vers la même circonférence Γ de cercle.

Il s'en suit que la suite infinie W_i converge elle même vers la courbe $C(t)$, autrement il y aurait un certain nombre $\varepsilon > 0$ tel qu'il existerait une suite infinie de valeurs t_i telles que les inégalités

$$C''_i(t_i)\ C(t_i) > \varepsilon$$

auraient lieu pour une suite infinie de contours de polygones W_i'. Mais

alors on ne pourrait pas tirer de la suite W_i' une suite infinie convergente vers la courbe $C(t)$, car cette convergence a lieu uniformément.

Donc on obtient finalement le

Théorème 35: „La suite de contours $C_i(t)$ des polygones W_i symétriques alternativement par rapport à deux axes contenant un angle incommensurable avec π, tend uniformément vers la circonférence d'un cercle Γ de même aire A que celle des polygones et d'un potentiel logarithmique plus grand et égal à la limite des potentiels croissants des polygones".
