HENRI MINEUR
Élève à l'Ecole Normale Supérieure.

Sur les solutions discontinues d'une classe d'équations fonctionnelles.[1]

(O rozwiązaniach osobliwych pewnej klasy równań funkcyjnych).

Nous nous proposons dans ce travail d'étudier les solutions des équations fonctionnelles de la forme

$$f[\varphi(x, y)] = \psi[f(x), f(y)], \tag{1}$$

où $\varphi(x, y)$ et $\psi(x, y)$ possèdent certaines propriétés que nous énonçons; la principale de ces propriétés est la suivante:

La fonction $\varphi[x, \varphi(y, z)]$ est symétrique par rapport à x, y, z. Nous appelons de telles fonctions, fonctions φ.

I. Dans la première partie, nous itérons ces fonctions φ et la notation employée pour ces itérées généralise la notation exponentielle.

II. Nous démontrons ensuite que l'équation (1) admet une infinité de solutions discontinues satisfaisant à la condition suivante:

A une valeur de la variable correspond une valeur et une seule de la fonction et réciproquement.

Dans tout le cours de ce travail, nous ne ferons pas d'autres hypothèses sur les fonctions que nous considérons.

Pour démontrer ce théorème d'existence des solutions de (1) nous supposons que le continu peut être bien ordonné. Nous arrivons à ce résultat

[1]) C. R. Ac. Sc. t. 170 p. 793, séance du 29 Mars 1920.

que l'ensemble des solutions de (1) a même puissance que l'ensemble des fonctions discontinues d'une variable.

III. Nous introduisons de nouvelles itérées des fonctions φ et nous démontrons que ces itérées vérifient l'équation

$$f[\varphi(x, y)] = \varphi[f(x), f(y)]. \tag{2}$$

Nous étudions les solutions de cette équation (2). Cette étude est incomplète, car nous sommes souvent ramenés au problème suivant:

Existe-t-il des solutions communes à deux équations du type (1)? Problème que nous ne savons pas résoudre.

Nous terminons par une application à la théorie des groupes et nous énonçons le théoreme suivant:

Tout groupe commutatif à un paramètre est (moyennant quelques hypothèses d'uniformité) semblable au groupe des translations.

I. Définitions.

Nous appelons fonction une relation entre deux variables x et y et nous poserons:

$$y = f(x);$$

cette notation signifie qu'à une valeur de x correspondent une ou plusieurs valeurs de y.

Nous ne considérerons que des fonctions réelles d'une variable réelle; nous verrons comment ces résultats peuvent s'étendre.

Fonctions inverses. La fonction inverse d'une fonction $y = f(x)$ est la fonction $x = g(y)$ obtenue à partir de la première en échangeant x et y.

Fonctions uniformes. Une fonction est uniforme lorsqu' à une valeur de x ne correspond qu'une valeur de y.

Fonctions complètes. Nous dirons qu'une fonction est complète relativement aux ensembles E et E', lorsque x étant une valeur quelconque faisant partie de l'ensemble E, $f(x)$ a une valeur bien déterminée faisant partie de l'ensemble E' et que réciproquement y étant une valeur quelconque de l'ensemble E' $g(y)$ inverse de $f(x)$ a une valeur bien déterminée faisant partie de l'ensemble E.

Lorsque les ensembles E et E' seront tous deux l'ensemble de tous les nombres de $-\infty$ à $+\infty$, la fonction sera appelée simplement fonction complète.

Le type de la fonction complète est la fonction $y = x$.

Théorème. Soit $y = f(x)$ une fonction complète:

1) Son inverse $x = g(y)$ est une fonction complète;
2) On a les idendités:

$$f[g(x)] = x,$$

$$g[f(x)] = x.$$

Théorème: Si $f_1(x)$ et $f_2(x)$ sont deux fonctions complètes; $f_1[f_2(x)]$ est aussi une fonction complète.

Fonctions φ. Nous appelons fonction φ une fonction $\varphi(x, y)$ de 2 variables satisfaisant aux conditions suivantes:

1) Il existe un nombre α et un seul tel que

$$\varphi(\alpha, x) = x.$$

2) La fonction de 3 variables:

$$\varphi[x, \varphi(y, z)]$$

est une fonction symétrique des 3 variables $x\ y\ z$.

3) En inversant la formule $z = \varphi(x, y)$ on pose: $x = \varphi'(z, x)$. La fonction $\varphi(x, y)$ a pour chaque système de valeurs de x et y une valeur bien déterminée et une seule.

De même à chaque système $z\ y$ la fonction $\varphi'(z, x)$ fait correspondre une valeur et une seule de x.

4) La fonction φ satisfait à une condition que nous énoncerons un peu plus loin.

On voit que la définition des fonctions φ se rapproche beaucoup de la définition des fonctions que C. Bourlet[1] appelle fonctions indéfiniment symétriques. Il y a cependant entre la définition de Bourlet et la nôtre quelques différences; ajoutons d'ailleurs que Bourlet suppose ces fonctions continues et que nous avons été amenés à considérer les fonctions φ par une voie assez différente de celle de Bourlet.

Ces fonctions avaient déjà été considérées par Abel[2].

Théorème. La fonction $\psi(x, y)$ est une fonction symétrique.

Il suffit de remarquer que $\varphi[x, \varphi(\alpha, y)]$ symétrique par rapport à x et y se réduit à $\varphi(x, y)$.

---

[1]) Cf Ann. Ec. Norm. 3 (1897) p. 141 — Sur les opérations en général par C. Bourlet.

[2]) Cf Abel, Recherche des fonctions de 2 variables indépendantes... Oeuvres I p. 61.

icm©

Définitions. Si $\varphi(x, y)$ est une fonction φ nous poserons:

$$\begin{aligned}
\varphi_0(x) &= \alpha \\
\varphi_1(x) &= x \\
\varphi_2(x) &= \varphi[x, x] \\
&\cdots\cdots \\
\varphi_n(x) &= \varphi[x, \varphi_{n-1}(x)].
\end{aligned}$$

Cette dernière formule définit $\varphi_n(x)$ quel que soit n entier positif. Nous pouvons maintenant énoncer la 4ème hypothèse annoncée plus haut:

4ème hypothèse. La fonction $\varphi_n(x)$ est une fonction complète quel que soit n entier positif.

Le but de ce travail est de démontrer l'existence d'une infinité de solutions complètes de l'équation.

$$f[\varphi(x, y)] = \psi[f(x), f(y)],$$

où φ et ψ sont deux fonctions φ et d'étudier les solutions de cette équation.

Signalons pour l'intelligence de ce qui va suivre un exemple de fonction φ:

$$\varphi(x, y) = x + y.$$

La fonction xy n'est pas une fonction φ, car elle ne vérifie pas la 4ème hypothèse, cependant elle vérifie les 3 premières et en appliquant ce qui va suivre à cette fonction xy on retrouverait la notation exponentielle.

Nous allons étudier les propriétés des fonctions φ et définir ces fonctions, lorsque n est un nombre rationnel quelconque.

II. Etude des fonctions φ a indices rationnels.

Théorème. On a quels que soient n et p entiers positifs:

$$\varphi[\varphi_n(x), \varphi_p(x)] = \varphi_{n+p}(x), \tag{1}$$

Nous allons procéder par recurrence.

Remarquons que par définition:

$$\varphi[\varphi_1(x), \varphi_p(x)] = \varphi_{p+1}(x).$$

Il suffit donc de démontrer que si

$$\varphi[\varphi_{n-1}(x), \varphi_p(x)] = \varphi_{n+p-1}(x),$$

on a:

$$\varphi[\varphi_n(x), \varphi_p(x)] = \varphi_{n+p}(x).$$

Nous pouvons écrire en effet:

$$\varphi[\varphi_n(x), \varphi_p(x)] = \varphi\left[\varphi[\varphi_{n-1}(x), x], \varphi_p(x)\right],$$

mais au second membre, nous avons une expression de la forme $\varphi[x, \psi(y)]$ qui par hypothèse est symétrique en $x\ y\ z$; on peut donc écrire:

$$\varphi[\varphi_n(x), \varphi_p(x)] = \varphi\left[\varphi[\varphi_{n-1}(x), \varphi_p(x)], x\right] = \varphi[\varphi_{n+p-1}(x), x],$$

ou finalement:

$$\varphi[\varphi_n(x), \varphi_p(x)] = \varphi_{n+p}(x) \qquad \text{C. q. f. d.}$$

Théorème: On a identiquement quels que soient n et p entiers positifs:

$$\varphi_n[\varphi_p(x)] = \varphi_{np}(x) \tag{2}$$

Dans la relation

$$\varphi[\varphi_n(x), \varphi_p(x)] = \varphi_{n+p}(x), \tag{1}$$

faisons $n = p$, il vient:

$$\varphi[\varphi_n(x), \varphi_n(x)] = \varphi_{2n}(x),$$

mais

$$\varphi[\varphi_n(x), \varphi_2[\varphi_n(x)].$$

On a donc quel que soit n

$$\varphi_2[\varphi_n(x)] = \varphi_{2n}(x).$$

Nous procéderons encore par recurrence; supposons que pour un entier k particulier l'on ait:

$$\varphi_k[\varphi_n(x)] = \varphi_{kn}(x). \tag{3}$$

Je dis que

$$\varphi_{k+1}[\varphi_n(x)] = \varphi_{(k+1)n}(x).$$

En effet, dans relation (1) faisons $n = n$ et $p = nk$, il vient:

$$\varphi[\varphi_n(x), \varphi_{nk}(x)] = \varphi_{k+nk}(x) = \varphi_{(k+1)n}(x).$$

Mais d'après (3),

$$\varphi[\varphi_n(x), \varphi_{nk}(x)] = \varphi\left[\varphi_n(x), \varphi_k\left[\varphi_n(x), \varphi_k[\varphi_n(x)]\right]\right],$$

et par définition

$$\varphi\left[\varphi_n(x), \varphi_k[\varphi_n(x)]\right] = \varphi_{n+1}[\varphi_n(x)],$$

donc

$$\varphi_{k+1}[\varphi_n(x)] = \varphi_{(k+1)n}(x);$$

comme le théorème est vrai pour $k = 2$, il est vrai quel que soit k entier.

icm©

Remarque: Dans les deux théorèmes précédents, nous n'avons pas considéré le cas où un des deux entiers n ou p prendrait une des deux valeurs 0 et 1. On vérifie facilement ces théorèmes dans ce cas en se rappelant que par définition:

$$\varphi_0(x) = \alpha \qquad \varphi_1(x) = x.$$

Définition: Soit n un entier positif, nous désignerons par la notation $\varphi_{\frac{1}{n}}$ la fonction inverse de la fonction $\varphi_n(x)$.

Nous savons par hypothèse que les fonctions $\varphi_{\frac{1}{n}}(x)$ sont complètes.

Théorème: On a quels que soient n et p entiers positifs

$$\varphi_{\frac{1}{n}}[\varphi_{\frac{1}{p}}(x)] = \varphi_{\frac{1}{np}}(x).$$

Posons en effet:

$$y = \varphi_{\frac{1}{p}}(x) \qquad \text{d'où } n = \varphi_p(y)$$

$$z = \varphi_{\frac{1}{n}}(y) \qquad \text{d'où } y = \varphi_n(y).$$

On a:

$$z = \varphi_{\frac{1}{n}}(y) = \varphi_{\frac{1}{n}}[\varphi_{\frac{1}{p}}(x)],$$

et

$$x = \varphi_p(y) = \varphi_p[\varphi_n(z)] = \varphi_{np}(z),$$

donc

$$z = \varphi_{\frac{1}{np}}(x) = \varphi_{\frac{1}{n}}[\varphi_{\frac{1}{p}}(x)].$$

C. q. f. d.

Définition: Nous poserons, p et q étant deux entiers positifs premiers ou non entre eux

$$\varphi_{\frac{p}{q}}(x) = \varphi_p[\varphi_{\frac{1}{q}}(x)].$$

Pour que cette définition soit acceptable, il faut évidemment que l'on ait, k étant un entier quelconque:

$$\varphi_{kp}[\varphi_{\frac{1}{kq}}(x)] = \varphi_p[\varphi_{\frac{1}{q}}(x)].$$

On a, en effet, d'après les théorèmes précédents:

$$\varphi_{kp}[\varphi_{\frac{1}{kq}}(x)] = \varphi_p\left[\varphi_k\left[\varphi_{\frac{1}{k}}[\varphi_{\frac{1}{q}}(x)]\right]\right],$$

mais $\varphi_k(x)$ et $\varphi_{\frac{1}{k}}(x)$ sont inverses, donc:

$$\varphi_{kp}[\varphi_{\frac{1}{kq}}(x)] = \varphi_p[\varphi_{\frac{1}{q}}(x)]$$

C. q. f. d.

Remarque: On a $\varphi_p[\varphi_{\frac{1}{q}}(x)] = \varphi_{\frac{1}{q}}[\varphi_p(x)]$.

Il suffit de répéter la démonstration précédente en posant $k = \frac{1}{pq}$.

Théorème: On a identiquement n et n' étant deux nombres rationnels quelconques positifs:

$$\varphi_n[\varphi_{n'}(x)] = \varphi_{nn'}(x).$$

Posons en effet $n = \frac{p}{q}$ $n' = \frac{p'}{q'}$, p, p', q, q' étant des entiers positifs.

On a par définition:

$$\varphi_n[\varphi_{n'}(x)] = \varphi_p\left[\varphi_{\frac{1}{q}}\left[\varphi_{\frac{1}{q'}}[\varphi_{p'}(x)]\right]\right] = \varphi_p\left[\varphi_{\frac{1}{qq'}}[\varphi_{p'}(x)]\right],$$

d'après le théorème précédent.

D'après la remarque précédente:

$$\varphi_{\frac{1}{qq'}}[\varphi_{p'}(x) = \varphi_{p'}[\varphi_{\frac{1}{qq'}}(x)],$$

donc:

$$\varphi_n[\varphi_{n'}x)] = \varphi_p\left[\varphi_{p'}[\varphi_{\frac{1}{qq'}}(x)]\right] = \varphi_{\frac{p}{q}\times\frac{p'}{q'}}(x).$$

C. q. f. d.

Théorème: On a n et n' étant deux nombres rationnels quelconques positifs:

$$\varphi[\varphi_n(x), \varphi_{n'}(x)] = \varphi_{n+n'}(x),$$

Posons $n = \frac{p}{q}$ $n' = \frac{p'}{q'}$ p, p' q, q' etant des entiers et $x = \varphi_{qq'}(y)$.

On a

$$\varphi[\varphi_{\frac{p}{q}}(x), \varphi_{\frac{p'}{q'}}(x)] = \varphi[\varphi_{pq'}(y), \varphi_{p'q}(y)],$$

mais $p \times q'$, $p' \times q$ étant entiers:

$$\varphi[\varphi_{pq'}(y), \varphi_{qp'}(y)] = \varphi_{pq'+qp'}(y) = \varphi_{pq'+qp'}[\varphi_{\frac{1}{qq'}}(x)],$$

ou

$$\varphi[\varphi_{\frac{p}{q}}(x), \varphi_{\frac{p'}{q'}}(x)] = \varphi_{\frac{p}{q}\times\frac{p'}{q'}}(x).$$

C. q. f. d.

Fonctions à indices négatifs.

Rappelons que les trois variables xyz étant liées par la relation $z=\varphi(x, y)$ nous avons posé $y=\varphi'(z, x)$ et que par hypothèse cette fonction est uniforme.

A partir de $\varphi[x, y]$ en y remplaçant y par x, nous avons obtenu la fonction $\varphi_2(x)$ puis successivement en remplaçant dans $\varphi[x, y]$ y par $\varphi_2(x)$ et par les fonctions que nous obtenions ainsi, nous avons défini les fonctions à indices entiers; en prenant les inverses de ces fonctions et en combinant entre elles par substitution toutes ces fonctions, nous avons obtenu les fonctions à indices rationnels positifs. Nous ne pouvons recommencer ces opérations sur $\varphi'[z x]$, car cette fonction n'est pas une fonction φ. Mais en remplaçant dans $\varphi'[z, x]$ z et x par des fonctions à indices rationnels positifs, nous définirons[1] de nouvelles fonctions auxquelles nous donnerons des indices négatifs et qui, nous le verrons, possèdent les mêmes propriétés substitutives que les fonctions à indices positifs.

Définition: Nous poserons m étant un nombre rationnel positif:

$$\varphi_{-m}(x)=\varphi'[\alpha, \varphi_m(x)].$$

Théorème:

$$\varphi[\varphi'[\alpha, x), \varphi'(\alpha, y)]=\varphi'[\alpha, \varphi(x, y)].$$

Considérons la fonction:

$$\varphi\big[\varphi[\varphi'(\alpha, x), \varphi'(\alpha, x)], \varphi(x, y)\big].$$

Elle est égale à la fonction:

$$\varphi\Big[[\varphi[\varphi'(\alpha, x), x], \varphi[\varphi'(\alpha, y), y)]\Big],$$

car la fonction:

$$\varphi[\varphi(x_1, x_2), \varphi(x_3. x_4)]=\varphi[\varphi[x_1, \varphi(x_3, x_4)], x_2]$$

est une fonction symétrique de $x_1\, x_2\, x_3\, x_4$.

Mais par définition de φ'

$$\varphi[\varphi'[x, y], y]=x,$$

donc la fonction considérée est égale à $\varphi[\alpha, \alpha]=\alpha$

$$\varphi[\varphi[\varphi'(\alpha, x), \varphi'(\alpha, y)], \varphi(x, y)]=\alpha$$

[1]) On comprendra plus facilement ce qui va suivre en taisant $\varphi(x, y)=x y$.

ou par définition de φ'

$$\varphi[\varphi'(\alpha, x), \varphi'(\alpha, y)]=\varphi'[\alpha(x, y)].$$

Théorème: Si p est un entier positif, on a:

$$\varphi'[\alpha, \varphi_p(x)]=\varphi_p[\varphi'(\alpha, x)].$$

Le théorème se vérifie facilement pour $p=1$.
Supposons le vrai pour $q=p$; démontrons-le pour $q=p+1$.
Par définition:

$$\varphi'[\alpha, \varphi_{p+1}(x)]=\varphi'\Big[\alpha, \varphi[x, \varphi_p(x)]\Big],$$

ou d'après le théorème précédent:

$$\varphi'[\alpha, \varphi_{p+1}(x)]=\varphi\Big[\varphi'(\alpha x,), \varphi'[\alpha, \varphi_p(x)]\Big]=\varphi\Big[\varphi'(\alpha, x), \varphi_p[\varphi'(\alpha, x)]\Big]$$
$$=\varphi_{p+1}[\varphi'(\alpha, x)].$$

Le théorème est donc général. C. q. f. d.

Théorème: $\varphi[\varphi_p(x), \varphi_p(y)] = \varphi_p[\varphi(x, y)]$

p étant un entier positif.

Le théorème est vérifié pour $p=1$. Supposons-le vrai pour $p=n$; on a:

$$\varphi[\varphi_{n+1}(x), \varphi_{n+1}(y)]=\varphi\Big[\varphi[x, \varphi_n(x)], \varphi(y, \varphi_n(y)]\Big],$$

ou, comme nous l'avons vu:

$$\varphi[\varphi_{n+1}(x), \varphi_{n+1}(y)]=\varphi\Big[\varphi(x, y), \varphi[\varphi_n(x), \varphi_n(y)]\Big]=\varphi\Big[\varphi(x, y), \varphi_n[\varphi(x, y)]\Big]$$

$$\varphi[\varphi_{n+1}(x), \varphi_{n+1}(y)],=\varphi_{n+1}[\varphi(x, y)].$$ C. q. f. d.

Théorème: $\varphi[\varphi_n(x), \varphi_p(x)]=\varphi_{n+p}(x)$

quels que soient n et p rationnels.

1) $n>0$, $p>0$. Le théorème a été démontré dans ce cas.
2) $n<0$, $p<0$. Posons: $n=-n'$, $p=-p'$.

Par définition:

$$\varphi[\varphi_n(x), \varphi_p(x)]=\varphi\Big[\varphi'[\alpha, \varphi_{n'},(x)], \varphi'[\alpha, \varphi_{p'}(x)]\Big]$$

$$\varphi[\varphi_n(x), \varphi_p(x)]=\varphi'\Big[\alpha, \varphi[\varphi_{n'}(x), \varphi_{p'}(x)]\Big]_1=\varphi'[\alpha, \varphi_{n'+p'}(x)]=\varphi_{n+p}(x).$$

icm©

3) $n > 0$, $p < 0$, nous supposerons d'abord n et p entiers et nous poserons $p = -p'$; supposons pour fixer les idées $n > p'$.

On a successivement en appliquant les théorèmes précédents:

$$\varphi[\varphi_n(x), \varphi_p(x)] = \varphi\left[\varphi_n(x), \varphi'[\alpha, \varphi_{p'}(x)]\right]$$

$$= \varphi\left[\varphi[\varphi_{p'}(x), \varphi_{n-p'}(x)], \varphi_{p'}[\varphi'(\alpha, x]]\right],$$

$$\varphi[\varphi_n(x), \varphi_p(x)] = \varphi\left[\varphi_{n-p'}(x), \varphi[\varphi_{p'}(x), \varphi_{p'}[\varphi'(\alpha, x)]]\right],$$

$$\varphi[\varphi_n(x), \varphi_p(x)] = \varphi\left[\varphi_{n-p'}(x), \varphi_{p'}[\varphi[x, \varphi'(\alpha, x)]]\right],$$

$$\varphi[\varphi_n(x), \varphi_p(x)] = \varphi[\varphi_{n-p'}(x), \alpha] = \varphi_{n-p'}(x) = \varphi_{n+p}(x).$$

Lorsque $n < p'$, on a une démonstration analogue.

4) $n>0$, $p<0$, n et p étant cette fois fractionnaires, posons k, k', q, q' étant entiers: $n = \frac{k}{k'}$ $p = -\frac{q}{q'}$ et soit:

$$z = \varphi[\varphi_{\frac{k}{k'}}(x), \varphi_{\frac{q}{q'}}(x)] \text{ et } y = \varphi_{\frac{1}{k'q'}}(x),$$

$$z = \varphi[\varphi_{k'q'}(y), \varphi_{-k'q}(y)] = \varphi_{kq'-qk'}(y),$$

$$z = \varphi_{\frac{k}{k'}-\frac{q}{q'}}(x) = \varphi_{n+p}(x), \qquad \text{C. q. f. d.}$$

Théorème: $$\varphi'[\alpha, \varphi'(\alpha, x)] = x.$$

Posons: $$z = \varphi'[\alpha, \varphi'(\alpha, x)]$$

et $$\varphi'(\alpha, x) = u,$$

nous avons donc: $z = \varphi'(\alpha, u)$ et $x = \varphi'(\alpha, u)$, donc: $z = x$.

Théorème: $$\varphi_n[\varphi_p(x)] = \varphi_{np}(x),$$

n et p étant deux nombres rationnels quelconques

1) $n > 0$, $p > 0$; le théorème a été démontré dans ce cas.

2) $n < 0$, $p < 0$; posons $n' = -n$ $p' = -p$.

On a successivement:

$$\varphi_n[\varphi_p(x)] = \varphi'\left[\alpha' \varphi_{n'}[\varphi'[\alpha, \varphi_{p'}(x)]]\right] = \varphi'\left[\alpha, \varphi_{n'}[\varphi_{p'}[\varphi'(\alpha, x)]]\right]$$

$$\varphi_n[\varphi_p(x) = \varphi'\left[\alpha, \varphi_{n'p'}[\varphi'(\alpha, x)]\right] = \varphi_{n'p'}\left[\varphi'[\alpha, \varphi'(\alpha, x)]\right] = \varphi_{np}(x)$$

C. q. f. d.

3) $n < 0$, $p > 0$; $n > 0$, $p < 0$; démonstration analogue.

Théorème: $$\varphi'[\varphi_n(x), \varphi_p(x)] = \varphi_{n-p}(x).$$

On a en effet:

$$\varphi_n(x) = \varphi[\varphi_p(x), \varphi_{n-p}(x)]$$

d'où:

$$\varphi_{n-p}(x) = \varphi'[\varphi_n(x), \varphi_p(x)].$$

Remarquons que $\varphi'(x, x) = \alpha$, donc en partant de $z = \varphi(x, y)$ et de $\varphi'[z, x]$, en remplaçant dans ces fonctions x, y, z par x, α et les fonctions ainsi obtenues et en combinant toutes ces fonctions par substitutions, nous n'obtenons jamais que les fonctions $\varphi_n(x)$, où n est un nombre rationnel positif ou négatif.

On voit de plus que ces fonctions se déduisent facilement les unes des autres par les formules:

$$\varphi[\varphi_n(x), \varphi_p(x)] = \varphi_{n+p}(x),$$

$$\varphi_n[\varphi_p(x)] = \varphi_{np}(x), \varphi'[\varphi_n(x), \varphi_p(x)] = \varphi_{n-p}(x).$$

Fonctions à indices multiples.

Définition: Considérons deux nombres quelconques x et y, nous poserons n et n' étant des nombres rationnels

$$\varphi[\varphi_n(x), \varphi_{n'}(y)] = \varphi_{n, n'}(x, y).$$

On voit que:

$$\varphi_{1,1}(x, y) = \varphi(x, y)$$

$$\varphi_{n,0}(x, y) = \varphi_n(x).$$

Théorème:

$$\varphi[\psi_{n,n'}(x, y), (\varphi_{n_1,n'_1}(x, y)] = \varphi_{n+n_1, n_1+n'_1}(x, y).$$

En effet le premier membre de cette équation est égal à

$$\varphi\left[\varphi[\varphi_n(x), \varphi_{n'}(y)], \varphi[\varphi_{n_1}(x), \varphi_{n'_1}(y)]\right]$$

ou, d'après une propriété connue des fonctions φ, à

$$\varphi\left[\varphi[\varphi_n(x), \varphi_{n_1}(x)], \varphi[\varphi_{n'}(y), \varphi_{n'_1}(y)]\right],$$

ou encore:

$$\varphi[\varphi_{n+n_1}(x), \varphi_{n'+n'_1}(y)] = \varphi_{n+n_1, n'+n'_1}(x, y) \qquad \text{C. q. f. d.}$$

Remarque: On en déduit facilement que

$$\varphi_n[\varphi_{n_1, n_2}(x, y)] = \varphi_{n n_1, n n_2}(x, y).$$

Ayant défini les fonctions à 1, puis 2 indices, nous définirons par récurrence les fonctions à p indices.

Supposons définies les fonctions à $p-1$ indices, nous définirons comme suit les fonctions à p indices:

$$\varphi_{n_1, n_2, \ldots, n_{p-1}, n_p}(x_1, x_2, \ldots x_{p-1}, x_p)$$
$$= \varphi[\varphi_{n_1, n_2, \ldots, n_{p-1}}(x_1, x_2, \ldots x_{p-1})], \varphi_{n_p}(x_p)].$$

On voit qu'une fonction à p indices est une fonction de p variables et qu'elle est définie quel que soit p.

Théorème:

$$\varphi[\varphi_{n_1, n_2, \ldots, n_p}(x_1, x_2 \ldots x_p), \varphi_{n'_1, n'_2, \ldots, n'_p}(x_1, x_2, \ldots x_p)]$$
$$= \varphi_{n_1+n'_1, n_2+n'_2, \ldots, n_p+n'_p}(x_1, x_2, \ldots x_p].$$

Démonstration facile.

On voit aussi que:

$$\varphi'[\varphi_{n_1, n_2, \ldots, n_p}(x_1, x_2, \ldots x_p), \varphi_{n'_1, n'_2, \ldots, n'_p}(x_1, x_2, \ldots x_p)]$$
$$= \varphi_{n_1-n'_1, n_2-n'_2, \ldots, n_p-n'_p}(x_1, x_2, \ldots x_p).$$

On voit facilement que en partant de $\varphi(x, y)$ et de $\varphi'(z, x)$, en remplaçant dans ces fonctions, $x\ y$ et z par $x_1, x_2 \ldots x_p$ et en combinant de toutes les façons possibles par substitution les fonctions ainsi obtenues, on obtient précisément les fonctions à indices rationnels multiples:

$$\varphi_{n_1, n_2, \ldots, n_p}(x_1, x_2, \ldots x_p),$$

fait d'une importance capitale qui trouvera son application dans la démonstration du théorème d'existence des équations fonctionnelles. Avant de passer à ce théorème, nous allons démontrer sa réciproque.

III.

Théorème: Si $f(x)$ est une fonction complète, si $g(y)$ est son inverse et si $\psi(x, y)$ est une fonction φ, la fonction

$$\varphi(x, y) = f[\psi[g(x), g(y)]] \qquad (1)$$

est également une fonction φ.

Nous démontrerons successivement que les 4 conditions pour qu'une fonction soit une fonction φ sont vérifiées.

1) Il existe un nombre α tel que

$$\varphi(\alpha, x) = x.$$

tel que

Par hypothèse, il existe un nombre β tel que

$$\psi(\beta, x) = x.$$

Posons $\alpha = f(\beta)$; α est bien défini, puisque $f(x)$ est une fonction complète.

D'après 1) nous avons

$$\varphi(\alpha, x) = f[\psi[g(\alpha), g(x)]].$$

Mais $g(\alpha) = \beta$, puisque g est l'inverse de f, donc

$$\varphi(\alpha, x) = f[\psi[\beta, g(x)]] = f[g(x)] = x,$$

$f(\beta) = \alpha$ est donc le nombre cherché. C. q. f. d.

2) La fonction $\varphi[x, \varphi(y, z)]$ est symétrique par rapport à $x\ y\ z$.

Formons $\varphi[x, \varphi(y, z)]$,

$$\varphi[x, \varphi(y, z)] = f\Big[\psi\Big[g(x), g\big[f[\psi[g(y), g(z)]]\big]\Big]\Big],$$

ou, comme f et g sont inverses,

$$\varphi[x, \varphi(y, z)] = f\Big[\psi[g(x), \psi[g(y), g(z)]]\Big].$$

Comme ψ est une fonction φ, le second membre est symétrique par rapport à $g(x)$, $g(y)$, $g(z)$, par conséquent par rapport à $x\ y\ z$, $\varphi(x, y)$ est donc une fonction φ.

3) A un système x, y correspond une valeur et une seule de $\varphi(x, y)$; en effet, comme g est une fonction complète, à un système $x\ y$ correspond un système $g(x)$, $g(y)$ et un seul, donc une valeur et une seule pour $\psi[g(x), g(y)]$, puisque ψ est une fonction φ et une valeur et une seule pour

$$f[\psi[g(x), g(y)]] = \varphi(x, y),$$

puisque f est une fonction complète.

L'équation 1) donne en posant $z = \varphi(x, y)$ on $y = \varphi'(z, x)$,

$$g(z) = g\Big[f\Big[\psi[g(x), g[\varphi'(z, x)]]\Big]\Big],$$

$$g(z) = \psi[g(x), g[\varphi'(z, x)]],$$

d'où $$g[\varphi'(z, x)] = \psi'[g(z), g(x)],$$
ou $$\varphi'(z, x) = f[\psi'[y(z), g(x)]].$$

Par un raisonnement analogue au précédent, on verrait qu'à un système z, x correspond une valeur et une seule de $\varphi'(z, x)$.

4) Montrons que la dernière condition est vérifiée. Pour cela, nous remarquerons que $\varphi(x, y)$ satisfaisant aux trois premières conditions, nous pouvons, comme au début de ce travail, définir $\varphi_n(x)$ pour n entier positif; il faut montrer que toute fonction $\varphi_n(x)$ ainsi définie est complète. Nous démontrerons, dans la suite, sans nous appuyer sur l'hypothèse que $\varphi_n(x)$ est compléte, que l'on a
$$\varphi_n(x) = f[\psi_n[g(x)]]$$
pour n entier positif, comme ψ_n et g sont complètes, $\varphi_n(x)$ est une fonction complète, car on sait que si $f_1(x)$ et $f_2(x)$ sont 2 fonctions complètes, $f_1[f_2(x)]$ en est une aussi.

Théorème: n étant un nombre entier positif, on a:
$$\varphi_n(x) = f[\psi_n[g(x)]] \tag{2}$$

Le théorème se vérifie facilement pour $n = 1$;

en effet: $$f[\psi_1[g(x)]] = f[g(x)] = x.$$

Il se vérifie aussi facilement pour $n = 2$ en faisant $x = y$ dans (1)
$$\varphi_2(x) = f[\psi_2[g(x)]].$$

Supposons le théorème démontré pou $n = k$,
$$\varphi_k(x) = f[\psi_k[g(x)]],$$
démontrons-le pour $n = k + 1$.

Dans 1) faisons $y = \varphi_k(x)$, il vient
$$\varphi[x, \varphi_k(x)] = f\Big[\psi[g(x), g[\varphi_k(x)]]\Big].$$
Mais
$$g[\varphi_k(x)] = \psi_k[g(x)],$$
donc
$$\varphi_{k+1}(x) = f\Big[\psi[g(x), \psi_k[g(x)]]\Big],$$
ou
$$\varphi_{k+1}(x) = f[\psi_{k+1}[g(x)]].$$ C. q. f. d.

On peut déduire facilement de cette formule les théorèmes
$$\varphi[\varphi_n(x), \varphi_p(x)] = \varphi_{n+p}(x), \qquad \varphi_n[\varphi_p(x)] = \varphi_{np}(x),$$
en supposant ces théorèmes vérifiés par les fonctions $\psi_n(x)$; en effet
$$\varphi[\varphi_n(x), \varphi_p(x)] = f\Big[\psi[g[\varphi_n(x)], g[\varphi_p(x)]]\Big],$$
$$\varphi[\varphi_n(x), \varphi_p(x)] = f\Big[\psi[\psi_n[g(x)], \psi_p[g(x)]]\Big],$$
ou, d'après les hypothèses faites:
$$\varphi[\varphi_n(x), \varphi_p(x)] = f[\psi_{n+p}[g(x)]] = \varphi_{n+p}(x).$$

De même
$$\varphi_n[\varphi_p(x)] = f\Big[\psi_n\Big[g\Big[f_p[\psi_p[g(x)]]\Big]\Big]\Big] = f\Big[\psi_n[\psi_p[g(x)]]\Big],$$
ou
$$\varphi_n[\varphi_p(x)] = f[\psi_{np}[g(x)]] = \varphi_{np}(x).$$

Théorème: p et q etant deux entiers positifs
$$\varphi_{\frac{p}{q}}(x) = f[\psi_{\frac{p}{q}}[g(x)]].$$

Posons en effet $y = \varphi_n(x)$, d'où $x = \varphi_{\frac{1}{n}}(y)$,

on a
$$g(y) = \psi_n[g(x), \quad \text{d'où } x = f[\psi_1[g(x)]],$$

donc $\varphi_{\frac{1}{n}}(x) = f[\psi_{\frac{1}{n}}[g(x)]]$, n étant un entier positif.

Formons
$$\varphi_{\frac{p}{q}}(x) = \varphi_p[\varphi_{\frac{1}{q}}(x)] = f\Big[\psi_p\Big[g\Big[f[\psi_{\frac{1}{q}}[g(x)]]\Big]\Big]\Big],$$
ou
$$\varphi_{\frac{p}{q}}(x) = f\Big[\psi_p[\psi_{\frac{1}{q}}[g(x)]]\Big] = f[\psi_{\frac{p}{q}}[g(x)]].$$
C. q. f. d.

La formule 2) s'étend donc au cas où n'est fractionnaire.

Théorème:
$$\varphi_{-n}(x) = f[\psi_{-n}[g(x)]],$$
n étant un nombre fractionnaire positif.

icm©

Posons en effet $\psi_0(x) = \beta$ et $\alpha = f(\beta)$,

nous avons vu que $\varphi_0(x) = \alpha$.

Dans la formule $\varphi'(z, x) = f[\psi'[g(z), g(x)]]$,

faisons $z = \alpha$, $x = \varphi_n(y)$ et remarquons que $g(\alpha) = \beta$, il vient:

$$\varphi_{-n}(y) = f[\psi_{-n}[g(y)]]. \qquad \text{C. q. f. d.}$$

Ce théorème va nous permettre de donner quelques exemples de fonctions φ. Auparavant, nous ferons quelques remarques:

I. Une fonction continue et complète est monotone. [1]

II. Une fonction complète et monotone est continue.

Théorème: L'ensemble E des fonctions complètes a même puissance que l'ensemble E' des fonctions discontinues d'une variable.

1) Tout élément de E fait partie de E', donc puissance de $E \leqslant$ puissance de E'.

2) Nous allons montrer gue l'ensemble E a une puissance au moins égale à l'ensemble E'' des fonctions qui ne prennent que les valeurs zéro et un, on sait en effet que E' ei E'' ont même puissance. [2]

Séparons l'ensemble E'' en deux parties E''_1 et E''_2; nous mettrons dans E''_1 les fonctions qui ne prennent une des valeurs zéro on un que pour une infinité dénombrable de valeurs de la variable, l'ensemble E''_1 a évidemment même puissance que l'ensemble des ensembles dénombrables c'est-à-dire la puissance du continu. Nous allons montrer que E a une puissance supérieure ou égale à celle de E''_2 et pour cela à tout élément de E''_2 nous ferons correspondre un élément de E de telle sorte qu'à deux éléments différents de E''_2 correspondent deux éléments différents de E.

Séparons l'ensemble des nombres en deux ensembles A_0, A_1 ayant chacun la puissance du continu et sans élément commun. Considérons une fonction $f_1(x)$ de l'ensemble E''_2; soit A'_0 l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles $f_1(x) = 0$ et A'_1 l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles $f_1(x) = 1$; par hypothèse A'_0 et A'_1 ont la puissance du continu. A_0 et A'_0 ayant même puissance, nous pouvons établir, ou du moins, nous pouvons imaginer une correspondance biunivoque entre leurs éléments. Nous pouvons imaginer une correspondance de même nature entre les éléments de A_1 et de A'_1.

[1] On appelle fonction monotone une fonction constamment croissante ou constamment décroissante.

[2] E. Borel-Leçons sur la théorie des fonctions — Note III.

Cela posé, soit x une valeur quelconque de la variable, si x appartient à A'_0 nous prendrons $f_2(x)$ égal à l'élément de A_0 qui correspond à x, de même si x appartient à A'_1, nous prendrons pour valeur de $f_2(x)$ l'élément de A_1 qui correspond à x. On voit facilement que la fonction $f_1(x)$ ainsi définie est complète, car un nombre x quelconque appartient à l'un des deux ensembles A'_0 ou A'_1; il lui correspond donc une valeur de $f_2(x)$; réciproquement, un nombre y quelconque appartient à A_0 ou à A_1 et il lui correspond une seule valeur x telle que $y = f_2(x)$.

À toute fonction $f_1(x)$ correspond un système de deux ensembles A'_0, A'_1; en prenant pour A_0, A_1 toujours les mêmes ensembles, nous faisons correspondre à toute fonction $f_1(x)$ de E''_2 au moins une fonction de E; nous en faisons même correspondre une infinité puisque l'on peut imaginer d'une infinité de manières la correspondance entre A_0 et A'_0, mais cela n'a aucune importance, puisque nous voulons démontrer que puissance $E \geqslant$ puissance E''_2.

Je dis que de cette façon nous n'obtenons pas deux fois la même fonction $f_2(x)$, car si nous considérons deux fonctions différentes $f_1^1(x)$ $f_1^2(x)$ et les ensemble A_0^1, A_0^2 qui leur correspondent, ces deux ensembles A_0^1 A_0^2 sont différents, soit par exemple x un élement de A_0^1 qui n'appartient pas à A_0^2, la valeur de $f_2^1(x)$ sera un élement de A_0 et celle de $f_2^2(x)$ un élément de A_1; ces deux fonctions f_1^2 et f_2^2 seront donc distinctes au moins pour cette valeur x.

L'ensemble E des fonctions complètes a donc une puissance au plus égale à celle de l'ensemble E''_2 des fonctions $f_1(x)$ pour lesquelles A'_0, A'_1 ne sont pas dénombrables ou à celle de l'ensemble des ensembles non dénombrables. Je dis que E''_2 a même puissance que E'. L'ensemble E''_1 ayant la puissance du continu et l'ensemble $E'' = E''_1 + E''_2$ ayant même puissance que E'' tout revient à démontrer que si de l'ensemble E' des fonctions discontinues on retranche un ensemble A ayant la puissance du continu, on a un ensemble B ayant même puissance que E'.

En effet comme

$$\begin{aligned} &\text{puissance } E' > \text{puissance } A \\ &\text{et comme } E' = A + B, \\ &\text{on a puissance } B > \text{puissance } A, \\ &\text{car si on avait puissance } B = \text{puissance } A \\ &\text{on aurait puissance } E' = \text{puissance } A. \end{aligned}$$

Donc de B nous pouvons retirer un ensemble A' ayant la puissance du continu et écrire : $B = A' + C$

Or les égalités:

$$E' = (A + A') + C$$
$$E = A' + C$$

montrent que E' et B ont même puissance puisque A et $A + A'$ ont même puissance.

C. q. f. d.

Dans la suite, pour abréger le langage, nous emploierons les notations suivantes:

Noús dirons qu'un ensemble est de puissance D s'il est dénombrable, de puissance C s'il a la puissance du continu, de puissance F s'il a même puissance que l'ensemble des fonctions discontinues d'une variable.

Exemples de fonctions φ.

La fonction φ la plus simple est $x+y$, on voit que:

$$\varphi_p(x) = nx, \quad \varphi_{\frac{1}{n}}(x) = \frac{x}{n}, \quad \varphi_{\frac{p}{q}}(x) = \frac{p}{q}x \quad \varphi_{-n}(x) = -nx;$$

on vérifie bien que:

$$\varphi_n[\varphi_p(x)] = n[px] = npx = \varphi_{np}(x),$$

$$\varphi[\varphi_n(x), \varphi_p(x)] = nx + px = (n+p)x = \varphi_{n+p}(x),$$

grâce au théorème précédemment énoncé, nous pouvons en former d'autres à partir de $x+y$.

La fonction $y = \dfrac{1+x}{1-x}$ est complète [1], son inverse est $x = \dfrac{y-1}{y+1}$,

donc la fonction: $\dfrac{1 + \dfrac{y-1}{y+1} + \dfrac{x-1}{x+1}}{1 - \dfrac{y-1}{y+1} - \dfrac{x-1}{x+1}} = \dfrac{3xy + x + y - 1}{3 + x + - xy}$.

L'équation $\varphi_n(x) = y$ considérée comme une équation en x est une équation de degré n qui admet la racine fixe -1 à l'ordre $n-1$.

La fonction $xy + y + x = (x-1)(x-1) + 1$ est une fonction φ.

La fonction $y = \operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ est complète,

son inverse est $$x = \log[y + \sqrt{1+y^2}],$$

d'où une nouvelle fonction φ:

$$\log\left[\frac{e^x + e^y - e^{-x} - e^{-y}}{2} + \sqrt{1 + \frac{[e^x + e^y - e^{-x} - e^{-y}]^2}{4}}\right].$$

[1]) On considère $-\infty$ et $+\infty$ comme deux valeurs identiques faisant partie du champ de variation.

Si nous nous bornons *aux valeurs positives* de la variable, xy est une fonction φ et nous retrouvons la notation exponentielle comme cas particulier de la notation par indices: $\alpha = 1$

$$\varphi_{\frac{p}{q}}(x) = x^{\frac{p}{q}} \qquad \varphi_{-n}(x) = \varphi'[\alpha, \varphi_n(x)] = \frac{1}{x^n};$$

on vérifie que:

$$\varphi_n[\varphi_p(x)] = (x^p)^n = x^{np} = \varphi_{np}(x),$$

$$\varphi[\varphi_n(x), \varphi_p(x)] = x^n . x^p = x^{n+p} = \varphi_{n+p}(x).$$

En nous bornant aux valeurs positives des variables, on voit que:

$$\sqrt[m]{x^m + y^m}, \qquad x^{\log y}$$

et en faisant abstraction de la 4ème hypothêse

$$\frac{x+y}{1-xy} = \operatorname{tg}[\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y],$$

sont des fonctions φ.

Nous allons maintenant démontrer le théorème d'existence annoncé. Nous nous appuierons pour le démontrer sur le théorème énoncé par G. Cantor et démontré pour la première fois par M. Zermelo: le continu peut être bien ordonné. On sait que la démonstration de M. Zermelo ne fut pas universellement admise, car elle s'appuyait sur un axiome que chacun est libre d'admettre ou de rejeter; mais M. P. Jourdain a donné de ce théorème une démonstration indépendante de l'axiome de M. Zermelo. [1])

Malgré cela, on pourra faire à notre démonstration plusieurs reproches. Nous raisonnons sur des suites transfinies non dénombrables et beaucoup de mathématiciens doutent de la validité de tels raisonnements; [2]) aussi, donnerons-nous de ce théorème un deuxième énoncé suivi d'une deuxième démonstration. Dans cette démonstration, nous ne raisonnons que sur des ensembles dénombrables (même énumérables). Nous montrons du reste que les deux énoncés sont en somme identiques.

Nous ferons pour établir l'existence de certains ensembles une infinité non dénombrable de choix. Disons une fois pour toutes que nous voulons

[1]) Cf. C. r. Acad. Sc 2 Avril 1918—17 Juin 1918.

[2]) Cf. E. Borel - Leçons sur la Théorie des fonctions. Note III.

icm©

simplement démontrer l'existence de ces ensembles sans affirmer la possibilité de leur formation effective. [1]

IV. Théorème d'existence.

Théorème: Si φ et ψ sont deux fonctions φ, il existe une infinité de fonctions complètes telles que:

$$f[\varphi(x, y)] = \psi[f(x), f(y)], \tag{1}$$

quels que soient x et y et l'ensemble de ces fonctions a pour puissance f.

Pour démontrer ce théorème, à chaque valeur de x nous ferons correspondre une valeur de y de façon que la fonction $y = f(x)$ ainsi définie soit complète et vérifie (1) (1)

Soient α et β les nombres tels que:

$$\varphi(\alpha, x) = x, \qquad \psi(\beta, x) = x.$$

Nous poserons: $f(\alpha) = \beta$.

Soit a_1 un nombre quelconque différent de α et A_1 un nombre quelconque différent de β.

Nous prendrons $f(a_1) = A_1$ et

$$f[\varphi_n(a_1)] = \psi_n(A_1) = \psi_n[f(a_1)],$$

n étant un nombre rationnel positif ou négatif.

Soit maintenant a_2 un nombre différent de tous les nombres $\varphi_n(a_1)$, où n est rationnel, et A_2 un nombre différent de tous les nombres $\psi_n(A_1)$, nous prendrons:

$$f[\varphi_{n_1, n_2}(a_1, a_2)] = \psi_{n_1, n_2}(A_1, A_2);$$

nous pouvons remarquer qu'en faisant $n_2 = 0$ nous retombons sur la définition précédemment donnée de $f[\varphi_n(a_1)]$.

Comme n_1 et n_2 sont rationnels, on voit que l'ensemble des valeurs $\varphi_{n_1, n_2}(a_1, a_2)$ est dénombrable, il ne peut donc être identique à l'ensemble de tous les nombres.

---

[1] Cf. L'axiome de M. Zermelo et son rôle dans la théorie des ensembles et l'Analyse, par Sierpiński — Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie — Avril, mai 1918.

Nous continuerons à appliquer ce procédé de définition après avoir pris.

$$f[\varphi_{n_1, n_2, \ldots, n_p}(a_1, a_2, \ldots a_p)] = \psi_{n_1, n_2, \ldots, n_p}(A_1, A_2, \ldots A_p),$$

nous prendrons un nombre a_{p+1} différent de tous les nombres de la forme

$$\varphi_{n_1, n_2, \ldots, n_p}(a_1, a_2, \ldots, a_p),$$

ce qui est toujours possible puisque l'ensemble de ces nombres est dénombrable, et A_{p+1} différent des nombres

$$\psi_{n_1, n_2, \ldots, n_p}(A_1, A_2, \ldots, A_p),$$

ce qui est égalemenf possible pour la même raison. Et nous poserons

$$f[\varphi_{n_1, n_2, \ldots, n_p, n_{p+1}}(a_1, a_2, \ldots, a_p, a_{p+1})] = \psi_{n_1, n_2, \ldots, n_p, n_{p+1}}(A_1, A_2, \ldots, A_{p+1}).$$

Si nous arrêtons au bout de p de ces opérations, nous n'aurons défini f que sur un ensemble dénombrable. Nous continuerons donc cette opération indéfiniment, c'est-à-dire que nous considérerons une suite indéfinie de nombres

$$a_1 . a_2 \ldots\ldots a_p \ldots\ldots$$

telle que un nombre quelconque a_{p+1} de cette suite est différent de tous les nombres

$$\varphi_{n_1, n_2, \ldots, n_p}(a_1, a_2, \ldots, a_p),$$

$a_1\, a_2 \ldots a_p$ étant les nombres de la suite qui le précèdent.

L'existence d'une telle suite est établie par récurrence.

Nous considérerons de même une suite indéfinie

$$A_1, A_2 \ldots\ldots A_p \ldots\ldots$$

telle que tout élément A_{p+1} de cette suite est différent des nombres

$$\varphi_{n_1, n_2, \ldots, n_p}(A_1, A_2, \ldots, A_p)$$

L'existence d'une telle suite est établie de le même façon.

Nous poserons quel que soit p:

$$f[\varphi_{n_1, n_2, \ldots, n_p}(a_1, a_2, \ldots, a_p)] = \psi_{n_1, n_2, \ldots, n_p}(A_1, A_2, \ldots, A_p).$$

Comme la suite $a_1, a_2, \ldots\ldots a_p \ldots\ldots$ est dénombrable, nous n'avons encore défini $f(x)$ que sur un ensemble dénombrable.

Nous considérons alors un nombre a_ω différent de tous les nombres

$$\varphi_{n_1, n_2, \ldots, n_p}(a_1\, a_2 \ldots a_p)$$

où les n sont rationnels et p un entier quelconque, et A_ω différent des nombres

$$\psi_{n_1, n_2, \ldots, n_p}(A_1, A_2, \ldots, A_p)$$

et nous poserons

$$f[\varphi_{n_1, n_2, \ldots, n_p, n_\omega}(a_1, a_2, \ldots, a_p, a_\omega)] = \psi_{n_1, n_2, \ldots, n_p, n_\omega}(A_1, A_2, \ldots, A_p, A_\omega).$$

Puis nous prendrons $a_{\omega+1}$, $A_{\omega+1}$ etc... On voit que tant que nous appliquerons ce procédé indéfiniment nous ne définirons $f(x)$ que sur un ensemble dénombrable. Il nous faudra donc l'appliquer transfiniment, c'est-à-dire autant de fois qu'il y a d'éléments dans un ensemble de puissance C. En d'autres termes après avoir considéré a_p et A_p p étant un nombre ordinal transfini, nous prendrons a_{p+1} différent de tous les nombres

$$\varphi_{n_{u_1}, n_{u_2}, \ldots, n_{u_p}}(a_{u_1}, a_{u_2}, \ldots, a_{u_p}),$$

$n_{u_1}\, n_{u_2} \ldots\ldots n_{u_p}$ étant des nombres rationnels et

$n_1\, n_2 \ldots\ldots n_p$ étant des nombres ordinaux transfinis de rang $\leqslant p$.

Nous prendrons de même A_{p+1} différent des nombres

$$\psi_{n_{u_1}, n_{u_2}, \ldots, n_{u_p}}(A_{u_1}, A_{u_2}, \ldots, A_{u_p}).$$

Ces opérations sont possibles puisque les ensembles considérés sont dénombrables, et nous prendrons,

$$f[\varphi_{n_{u_1}, n_{u_2}, \ldots, n_{u_p}, n_{p+1}}(a_{u_1}, a_{u_2}, \ldots, a_{u_p}, a_{p+1})]$$
$$= \psi_{n_{u_1}, n_{u_2}, \ldots, n_{u_p}, n_{p+1}}(A_{u_1}, A_{u_2}, \ldots, A_{u_p}, A_{p+1})$$

les n et les u ayant la même signification que précédemment

Après avoir considéré une suite dénombrable

$$a_u\, a_{u+1} \ldots\ldots a_{u+n} \ldots\ldots$$

$u, u+1, \ldots, u+n, \ldots$ étant une suite fondamentale [1]) ayant pour limite $u+\omega$, nous prendrons pour a_{u+w} un nombre différent de tous les nombres

$$\varphi_{n_{u_1}, \ldots, n_{u_p}}(a_{u_1}, \ldots, a_{u_p})$$

$u_1, \ldots, u_p$ étant des nombres transfinis quelconques de rang $< u+\omega$, nous prendrons de même A_{u+w} différent des nombres

---

[1]) Cf. Baire Leçons sur les fonctions discontinues Chap. II.

$$\psi_{n_{u_1}, \ldots\, n_{u_p}}(A_{u_1}, \ldots, A_{u_p})$$

et nous poserons

$$f[\varphi_{n_{u_1}, \ldots, n_{u_p}, n_{u+\omega}}(a_{u_1}, \ldots, a_{u_p}, a_{u+\omega})]$$
$$= \psi_{n_{u_1}, \ldots, n_{u_p}, n_{u+\omega}}(A_{u_1}, \ldots A_{u_p}, A_{u+\omega}).$$

En appliquant ainsi transfinement ces deux principes de formation, nous définirons $f(x)$ sur un ensemble non dénombrable.

Je dis que l'on peut choisir la suite transfinie des a de façon que $f(x$ soit définie pour toute valeur de x.

En effet, on peut ranger l'ensemble de tous les nombres différents de α en une suite transfinie c'est-à-dire bien ordonnée, prendre a_1 égal au premier de ces nombres; a_2 égal au premier nombre après a_1 qui n'est pas compris dans les $\varphi_{n_1}(a_1)$ et ainsi de suite; un nombre x finira par être parmi les $\varphi_{n_{1u}, \ldots, n_{u_p}}(a_{u_1}, \ldots, a_{u_p})$ ou bien par être pris comme a_p.

On peut de même choisir la suite transfinie des A de façon que tout nombre soit ou bien dans cette suite ou de la forme

$$\psi_{n_{u_1}, \ldots\, n_{u_p}}(A_{u_1}, \ldots, A_{u_p}).$$

Je dis de plus qu'à une valeur de x correspond une seule valeur de y. Supposons en effet qu'une même valeur de x puisse se mettre de deux façons différentes sous la forme

$$x = \varphi_{n_{1u}, n_{u_2}, \ldots, n_{u_p}}(a_{u_1}\ a_{u_2}, \ldots, a_{u_p})$$
$$x = \varphi_{n_{u'_1}, n_{u'_2}, \ldots, n_{u'_p}}(a_{u'_1}\ a_{u'_2}, \ldots, a_{u'_p}).$$

Les deux valeurs correspondantes de $f(x)$ pourraient ne pas être égales. Un pareil cas ne peut pas se présenter. Soit en effet u'_m le nombre ordinal de la suite $u_1, u_2, \ldots, u_p, u'_1, \ldots, u'_p$ qui a le rang le plus élevé, la relation supposée:

$$\varphi_{n_{u_1}, n_{u_2}, \ldots, n_{u_p}}(a_{u_1}, a_{u_2}, \ldots, a_{u_p})$$
$$= \varphi_{n_{u'_1}, n_{u'_2}, \ldots, n_{u'_m}, \ldots, n_{u'_p}}(a_{u'_1}, a_{u'_2}, \ldots, a_{u'_m}, \ldots, a_{u'_p}),$$

peut s'écrire:

$$\varphi_{n_{u_1}\, n_{u_2}, \ldots, n_{u_p}, n'_{u'_1}\, n_{u'} \ldots, n'_{u'_m}, \ldots, n'_{u'_p}}(a_{u_1}, a_{u_2}, \ldots, a_{u_p}, a_{u'_1}, a_{u'_2}, \ldots,$$
$$a_{u_m}, \ldots, a_{u'_p}) = \varphi_{n'_{u_1}, n'_{u_2}, \ldots, n'_{u_p}, n_{u'_1}, n_{u'_2}, \ldots, n_{u'_m}, \ldots, n_{u'_p}}(a_{u_1}, a_{u_2}, \ldots,$$
$$a_{u_p}, a_{u'_1}, a_{u'_2}, \ldots, a_{u_m}, \ldots, a_{u'_p})$$

icm©

certains des indices n pouvant être nuls et certains des nombres a pouvant être égaux, cette égalité s'écrit:

$$\varphi\,[\varphi_{n_{u_1},\ldots,\,n_{u_p},\,n'_{u'_1},\ldots,\,n'_{u'_p}}\,(a_{u_1},\ldots,a_{u_p},a_{n'_1},\ldots,a_{u_p}),\ \varphi_{n'_{u'_m}}\,(a_{u_m})]$$
$$=\varphi\,[\varphi_{n'_{u'_1},\ldots,\,n'_{u_p},\,n_{u'},\ldots,\,n_{u'_p}}\,(a_{u_1},\ldots,a_{u_p},a_{u'_1},\ldots,a_{u'_p}),\ \varphi_{n'_{u_m}}\,(a_{u'_m})]$$

ou d'après les propriétés das fonctions φ

$$\varphi_{n_{u'_m}-n'_{u'_m}}\,(a_{u'_m})=\varphi_{n_{u'_1}-n'_{u'_1},\ldots,\,n_{u_p}-n'_{u_p},\,n'_{u'_1}-n_{u'_1},\ldots,\,n'_{u'}-u,n_p}$$
$$(a_{n'},\ldots,a_{n_p},\ a_{n'_1},\ldots,a_{n'_p})$$

ou

$$a_m=\varphi_{\frac{n_{u_1}-n'_{u_1}}{n_{u'_m}-n'_{u'_m}},\ldots,}\,(a_{n_1},\ldots);$$

mais u'_m est d'ordre $> u_1\ldots u_p\ u'_2\ldots u'_p$ et

les indices $\dfrac{n_{u_1}-n'_{u_1}}{n_{u'_m}-n'_{u'_m}}$ sont rationnels; cette égalité ne peut donc avoir lieu d'après la façon dont nous avons choisi la suite des a.

On verrait de même qu'à une valeur y ne correspond qu'une valeur de x telle que $y=f\,(x)$.

La fonction ainsi définie est donc complète. Ileste à démontrer qu'elle satisfait à l'équation. (1)

Considérons deux quantités quelconques x et y; comme nous l'avons vu, ces quantités sont de la forme

$$x=\varphi_{n_{u_1},\,n_{u_2},\ldots,\,n_{u_p}}\,(a_{u_1},\ldots,a_{u_p}),$$
$$y=\varphi_{n'_{u_1},\,n'_{u_2},\ldots,\,n'_{u_p}}\,(a_{u_1},\ldots,a_{u_p}),$$

un certain nombre de ces indices pouvant être nuls. Nous avons vu que

$$f\,(x)=\psi_{n_{u_1},\,n_{u_2},\ldots,\,n'_{u_p}}\,(A_{u_1},\ A_{n_2},\ldots,\ A_{u_p}),$$
$$f\,(y)=\psi_{n'_{u_1},\,n'_{u_2},\ldots,\,n'_{u_p}}\,(A_{u_1},\ A_{u_2},\ldots,\ A_{u_p});$$

vérifions que $$f\,[\,\varphi\,(x,y)]=\psi\,[f\,(x),f\,(y)].$$

Nous avons en effet:

$$f\,[\varphi\,(x,y)]=f\,[\varphi\,[\varphi_{n_{u_1},\,n'_{u_2},\ldots,\,n_{u_p}}\,(a_{u_1},a_{u_2},\ldots,a_{u_p}),$$
$$\varphi_{n'_{u_1},\,n'_{u_2},\ldots,\,n'_{u_p}}\,(a_{u_1},a_{u_2},\ldots a_{u_p})]]$$

ou d'après les propriétés des fonctions φ

$$f\,[\varphi\,(x,y)]=f\,[\varphi\,[\varphi_{n_{u_1}+n'_{u_1},\,n_{u_2}+n'_{u_2},\ldots,\,n_{u_p}+n'_{n_p}}\,(a_{u_1},a_{u_2},\ldots,a_{u_p})]].$$

Mais par définition

$$f\,[\varphi_{n_{u_1}+n'_{u_1},\,n_{u_2}+n'_{u_2},\ldots,\,n_{u_p}+n'_{u_p}}\,(a_{u_1},a_{u_2},\ldots,a_{u_p})]$$
$$=\psi_{n_{u_1}+n'_{u_1},\,n_{u_2}+n'_{u_2},\ldots,\,n_{u_p}+n'_{u_p}}\,(A_{u_1},A_{u_2},\ldots,A_{u_p})$$

ou encore

$$f\,[\varphi\,(x.\,y)]=\psi\,[\psi_{n_{u_1},\,n_{u_2},\ldots,\,n_{u_p}}\,(A_{u_1},A_{u_2},\ldots,A_{u_p}),$$
$$\psi_{n'_{u_1},\,n'_{u_2},\ldots,\,n'_{u_p}}\,(A_{u_1},A_{u_2},\ldots,A_{u_p})]$$

ou

$$f\,[\varphi\,(x,y)]=\psi\,[f\,(x),f\,(y)].\qquad \text{C. q. f. d.}$$

Il reste à démontrer que nous pouvons ainsi définir une infinité de puissance f de fonctions.

Définition: Nous appellerons ensemble relatif à φ une suite transfinie de nombres réels $a_0\ a_1\ldots.\ a_p\ldots$ telle que $a_0=\alpha$, que tout nombre a_p de cette suite soit différent des nombre

$$\varphi_{n_{u_1}.\,n_{u_2},\ldots,\,n_{u_p}}\,(a_{u_1},a_{u_2},\ldots,a_{u_p})$$

$u_1, u_2\ldots, u_p$ étant des nombres transfinis de rang inférieur on égal à p et que tout nombre réel x soit de la forme

$$x=\varphi_{n_{u_1},\,n_{u_2},\ldots,\,n_{u_p}}\,(a_{u_1},a_{u_2},\ldots,a_{u_p})$$

$n_{u_1},\ldots.\ n_{u_p}$ étant des nombres rationnels et $u_1,\ldots,u_p$ des nombres ordinaux transfinis convenablement choisis. Nous avons établi l'existence d'au moins une pareille suite.

Théorème: Un ensemble relatif à φ se change en un ensemble relatif à φ lorsqu'on échange ses termes d'une façon quelconque.

Ce théorème résulte de ce que la relation

$$a_1=\varphi_{m_1,\ldots,\,n_p}\,(a_{u_1},\ldots,a_{u_p})$$

résolue par rapport à a_{u_k} donne une relation de même forme; on ne peut donc avoir une telle relation entre un élément a_j et les éléments qui le précèdent dans le second ensemble.

Nous voyons que pour définir une solution de l'équation (1) il suffif de faire correspondre entre eux, élément par élément, un ensemble a relatit

icm©

à φ et un ensemble A relatif à ψ, les termes de même rang se correspondant dans les deux ensembles, et de poser:

$$f\,[\varphi_{n_1,\ldots\, n_p}\,(a_{u_1},\ldots,a_{u_p})] = \psi_{n_1,\,n_2,\ldots,\,n_p}\,(A_{u_1},\ldots,A_{u_p}).$$

Choisissons une fois pour toutes l'ensemble relatif à φ et remarquons qu'à deux ensembles différents relatifs à ψ la méthode précédente fera correspondre deux solutions différentes de (1). L'ensemble des solutions de (1) a donc même puissance que l'ensemble des ensembles relatifs à ψ. Parmi les ensembles relatifs à ψ prenons tous ceux qui se déduisent de l'un d'eux en échangeant les éléments, ces ensembles forment un ensemble E qui a même puissance que l'ensemble des fonctions complètes, c'est-à-dire qui a pour puissance f.

En effet, nous pouvons établir entre les nombres ordinaux transfinis et l'ensemble des nombres réels une correspondance biunivoque et on voit que E a même puissance que l'ensemble de tous les ensembles de nombres.

En général, étant donné deux ensembles relatifs à φ on ne peut passer de l'un à l'autre par échange des éléments ainsi que le montre le théorème suivant que nous nous contenterons d'énoncer:

Théorème: Un ensemble E_1 relatif à φ se transforme en un ensemble E_2 relatif à φ lorsqu'on remplace chaque élément de E_1 par

$$\varphi_{n_{u_1},\,n_{u_2},\ldots,\,n_{u_p}}\,(a_{u_1},\ a_{u_2},\ldots,a_{u_p})$$

de sorte que tout élément a_1 de E_1 se trouve au moins une fois introduit pour définir un élément de E_2 et que si l'on prend p éléments quelconques de E_2 le nombre des valeurs distinctes de u soit $\geqslant p$ et s'il est égal à p le déterminant des n est différent de zéro; en outre on peut passer de la même façon de E_2 à E_1.

Comme je l'ai annoncé, ce théorème d'existence a un second énoncé, très voisin du premier du reste et qui peut être accepté par ceux qui contestent le droit de raisonner sur des suites non dénombrables.

Théorème: *Si φ et ψ sont deux fonctions φ et E un ensemble dénombrable quelconque, il existe deux ensembles dénombrables E'_1, E'_2, l'ensemble E'_1 contenant E, et une fonction complète relativement à ces deux ensembles, définie, uniquement sur E'_1 et vérifiant sur E'_1 l'équation*

$$f\,[\varphi\,(x,y)] = \psi\,[f\,(x),\ f\,(y)]. \tag{1}$$

Il existe même une infinité de systèmes formés de deux ensembles E'_1, E'_2 dénombrables et d'une fonction satisfaisant à ces conditions; *l'ensemble de ces systèmes a pour puissance C.*

De plus si nous ne raisonnons que sur un ensemble dénombrable de valeurs d'une fonction, cet énoncé doit suffire; nous pouvons même aller plus loin et dire que comme nous ne considérerons jamais en fait qu'un nombre fini de valeurs d'une fonction nous pouvons nous contenter de la définir sur un ensemble formé d'un nombre fini d'éléments. Cet énoncé n'enlève rién à la généralité du premier, *puisque l'ensemble dénombrable E est quelconque.*

La démonstration est analogue à celle du premier énoncé: Rangeons les éléments de l'ensemble E en une suite

$$a_1,\ a_2,\ldots,a_n,\ldots$$

Si un des éléments $a = \alpha$, nous poserons $f\,(a_n) = \beta$.

Nous prendrons arbitrairement $A_1 = f\,(a_1)$ et nous poserons

$$f\,[\varphi_{n_1}\,(a_1)] = \psi_{n_1}\,(A_1)$$

puis, si a_2 est différent des nombres de la forme $\varphi_{n_1}\,(a_1)$, nous prendrons

$$f\,[\varphi_{n_1,\,n_2}\,(a_1,\,a_2)] = \psi_{n_1,\,n_2}\,(A_1,\,A_2)$$

A_2 étant différent des nombres $\psi_{n_1}\,(A_1)$ et ainsi de suite.

Nous prendrons pour ensembles E'_1, E'_2 les ensembles

$$\varphi_{n_1}\,(a_1),\ \ \varphi_{n_1,\,n_2}\,(a_1,\,a_2),\ldots.\ \varphi_{n_1,\,n_2,\ldots,\,n_p}\,(a_1,\,a_2,\ldots,a_p)\ldots..$$

$$\text{et}\ \ \varphi_{n_1}\,(A_1),\ \ \varphi_{n_1,\,n_2}\,(A_1,\,A_2),\ldots.\ \varphi_{n_1,\,n_2,\ldots\, n_p}\,(A_1,A_2,\ldots,A_p)\ldots..$$

on voit que E'_1 contient E et que la fonction définie sur E'_1 est complète relativement à $(E'_1\ E'_2)$ et vérifie (1).

C. q. f. d.

Terminons en remarquant que si nous prenons pour définir une solution de (1) un ensemble E_1 relatif à φ choisi une fois pour toutes et un ensemble E_2 relatif à ψ, nous pouvons toujours choisir E_2 de façon à définir une solution complète quelconque de (1).

En d'autres termes, la méthode employée dans la démonstration du théorème d'éxistence nous donne toutes les solutions complètes de l'équation (1).

En effet, soit $f(x)$ une solution complète de (1) et soit

$$a_1,\ a_2, \ldots \text{ l'ensemble } E_1,$$

$$\text{l'ensemble } E_2\ f(a),\ f(a_2)\ldots$$

est un ensemble relatif à ψ; cela résulte du fait que f est une solution de (1) ce qui entraîne la relation,

$$f[(\varphi_{n_1, n_2, \ldots, n_p}(x_1, x_2, \ldots, x_p)] = \psi_{n_1, n_2, \ldots, n_p}[f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_p)].$$

V. Fonctions φ à indices incommensurables.

Nous avons vu que l'ensemble des solutions de (1) avait pour puissance f_1 ou encore avait même puissance que l'ensemble des fonctions complètes. Nous pouvons donc désigner ces solutions par la notation:

$$f^{k'(z)}(x)$$

$k'(z)$ étant une fonction complète arbitraire prise comme indice.

Par abréviation, nous poserons

$$f^{k'}(x)$$

en nous rappelant que l'indice supérieur est une fonction.

Nous avons vu que si $f(x)$ est une solution de

$$f[\varphi(x, y)] = \psi[f(x), f(y)]$$

on avait $\qquad f[\varphi_n(x)] = \psi_n[f(x)] \qquad n$ étant rationnel.

Nous avons vu de plus que si $\psi(x, y) = x + y$, $\psi_n(x) = n\, x$, ceci nous conduit naturellement à la définition suivante:

Définition: Soit $f^{k'}(x)$ une solution complète de l'equation

$$f[\varphi(x, y)] = f(x) + f(y), \tag{2}$$

nous poserons, k étant un nombre quelconque et $g^{k'}$ la fonction inverse de $f^{k'}$,

$$\varphi^{k'}_k(x) = g^{k'}[k\, f^{k'}(x)].$$

Cette fonction est une fonction complète de x.

D'après ce que nous avons vu, si k est rationnel, $\varphi^{k'}_k(x)$ se réduit à $\varphi_k(x)$ défini au début de ce travail. Mais, si k est irrationnel, $\varphi^{k'}_k(x)$ dépend de k'.

En effet, soit a un nombre quelconque différent de α, la fonction $g[k\, f(a)]$ de k est une fonction complète, puisque g et $k\, f(a)$ sont des fonctions complètes. Si donc les fonctions $\varphi^{k'}_k(x)$ ne dépendaient pas de k', on aurait par définition quel que soit k'

$$f^{k'}[\varphi_k(x)] = k\, f^{k'}(x),$$

en posant $f(a) = A$ et en faisant varier k de $-\infty$ á $+\infty$ on définirait $f^{k'}(x)$ pour toute valeur de x par $f^{k'}[\varphi_k(a)] = k\, A$. On voit que la fonction ainsi définie serait complète et solution de (1) et elle ne dépendrait que d'une constante arbitraire A, ce qui est impossible puisque $f^{k'}(x)$ dépend d'une fonction arbitraire.

Nous allons voir que ces fonctions possèdent les propriétés des fonctions à indices rationnels.

Théorème: On a quels que soient k, k_1 et x:

$$\varphi[\varphi^{k'}_k(x), \varphi^{k'}_{k_1}(x)] = \varphi^{k'}_{k+k_1}(x).$$

En effet, l'équation (2) nous donne

$$\varphi(x, y) = g^{k'}[f^{k'}(x) + f^{k'}(y)]$$

$$\varphi[\varphi^{k'}_k(x), \varphi^{k'}_{k_1}(x)] = g^{k'}\left[f^{k'}[\varphi^{k'}_k(x)] + f^{k'}[\varphi^{k'}_{k_1}(x)]\right].$$

Mais

$$f^{k'}[\varphi^{k'}_k(x)] = k\, f^{k'}(x),$$

$$f^{k'}[\varphi^{k'}_{k_1}(x)] = k_1 f^{k'}(x),$$

donc

$$\varphi[\varphi^{k'}_k(x), \varphi^{k'}_{k_1}(x)] = g^{k'}[(k + k_1)\, f^{k'}(x)] = \varphi^{k,}_{k+k_1'}(x).$$

C. q. f. d.

Théorème: $\qquad \varphi^{k'}_k[\varphi^{k'}_{k_1}(x)] = \varphi^{k'}_{k k_1}(x).$

En effet:

$$\varphi^{k'}_k[\varphi^{k'}_{k_1}(x)] = g^{k'}\left[k\, f^{k'}\left[g^{k'}[k_1 f^{k'}(x)]\right]\right]$$

$$\varphi^{k'}_k[\varphi^{k'}_{k_1}(x)] = g^{k'}[k\, k_1 f^{k'}(x)] = \varphi^{k'}_{k k_1}(x).$$

Théorème: $\varphi' [\varphi_k^{k'}(x), \varphi_{k_1}^{k'}(x)] = \varphi_{k-k_1}^{k'}(x)$.

Théorème: Les fonctions $\varphi_k^{k'}(x)$ et $\varphi_{\frac{1}{k}}^{k'}$ sont inverses.

On a en effet $\varphi_{\frac{1}{k}}^{k'} [\varphi_k^{k'}(x)] = x = \varphi_1^{k'}(x)$.

De même le calcul des fonctions à plusieurs indices s'étend au cas où ces indices sont quelconques.

La considération de ces fonctions va nous permettre de définir plus commodément les solutions de l'équation (1). Nous avons vu que pour définir une solution de (1) il fallait en plus de l'équation (1) se donner les valeurs de la fonction sur un ensemble de puissance C; la seule donnée de l'équation (1) nous définit des fonctions dépendant d'une fonction arbitraire, l'étude de ces fonctions ne peut donc se faire d'une façon précise sur l'équation (1).

Les deux théorèmes qui vont suivre nous permettront d'isoler un ensemble de solutions de puissance C.

Définition: Nous appellerons groupe $\varphi_k^{k'}(x)$ l'ensemble des fonctions de x $\varphi_k^{k'}(x)$ où k' a une valeur fixe et où k est variable.

Nous verrons plus loin la raison de cette dénomination.

Théorème: Soient $\varphi_k^{k''}(x)$ et $\varphi_k^{k'''}(x)$ deux groupes, l'équation,

$$f [\varphi_k^{k''}(x)] = \psi_k^{k'''} [f(x)] \tag{3}$$

où k et x sont variables admet une infinité de solutions de puissance C; et ces solutions satisfont toutes à l'équation:

$$f [\varphi(x, y)] = \psi [f(x), f(y)]. \tag{1}$$

Soit a un nombre différent de α et A un nombre différent de β.
Pour définir une solution de (3), il suffit de se donner

$$f(a) = A.$$

En effet dans l'équation (3) faisons $x = a$, il vient

$$f [\varphi_k^{k''}(x)] = \psi_k^{k'''}(A).$$

Mais nous savons que lorsque k prend toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$, $\varphi_k^{k''}(x)$ et $f_k^{k'''}(A)$ prennent également toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$; l'équation (4) où k est quelconque définit donc quel que soit x $f(x)$ qui est une fonction complète.

1°. Démontrons que cette fonction vérifie l'équation (3).

Soit en effet $x = \varphi_{k'}^{k''}(a)$.

Formons $f [\varphi_k^{k''}(x)] = f [\varphi_k^{k''} [\varphi_{k_1}^{k''}(a)]] = f [\varphi_{kk_1}^{k''}(a)]$,

$$f [\varphi_k^{k''}(x)] = \psi_{kk_1}^{k'''}(A) = \psi_k^{k'''} [\psi_{k_1}^{k'''}(A)] = \psi_k^{k'''} [f(x)].$$

2°. Démontrons que $f(x)$ satisfait à (1).

Soient $x = \varphi_{k_1}^{k''}(a)$, $y = \varphi_{k_2}^{k''}(a)$;

formons

$$f [\varphi(x, y)] = f [\varphi [\varphi_{k_1}^{k''}(a), \varphi_{k_2}^{k''}(a)]] = f [\varphi_{k_1+k_2}^{k''}(a)]$$

$$f [\varphi(x, y)] = \psi_{k_1+k_2}^{k'''}(A) = \psi [\psi_{k_1}^{k'''}(A), \psi_{k_2}^{k'''}(A)] = \psi [f(x), f(y)].$$

En laissant a fixe et en faisant prendre à A toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$ on voit que l'on définit une infinité de puissance C de fonctions solutions de (3) et de (1). De plus toute solution de (3) est obtenue ainsi, car étant donné une solution quelconque $f(x)$ de $f(a)$ a une valeur bien déterminée A et on a vu que la condition

$$f(a) = A$$

ne définit qu'une solution de (1).

Démontrons maintenant la réciproque de ce théorème.

Rappelons la définition des fonctions $\varphi_k^{k''}(x)$.

Nous prenons une solution quelconque $f^{k''}(x)$ de

$$f^{k''} [\varphi(x, y)] = \psi [f^{k''}(x), f^{k''}(y)]$$

et nous définissons $\varphi_k^{k''}(x)$ par

$$f^{k''} [\varphi_k^{k''}(x)] = k f^{k''}(x).$$

Théorème: Si on considère une solution $f^{k'}(x)$ de

$$f [\varphi(x, y)] = \psi [f(x), f(y)] \tag{1}$$

et un groupe $\varphi_k^{k''}(x)$ quelconque, il existe un autre groupe $\psi_k^{k'''}(x)$

tel qu'on ait quels que soient k et x.

$$f^{k'} [\varphi_k^{k''}(x)] = \psi_k^{k'''} [f^{k'}(x)]:$$

Par définition il existe $u^{k''}$ et $v^{k''}$ inverses telles que

$$\varphi_k^{k''}(x) = u^{k''}[k\, v^{k''}(x)]$$

$$v^{k''}[\varphi(x, y)] = v^{k''}(x) + v^{k''}(y).$$

Cherchons à déterminer $w^{k'''}$ et $t^{k'''}$ inverses telles que

$$\psi_k^{k'''}(x) = w^{k'''}[k\, t^{k'''}(x)]$$

$$t^{k'''}[\psi(x, y)] = t^{k'''}(x) + t^{k'''}(y)$$

$$f^{k'}[\varphi_k^{k''}(x)] = \psi_k^{k'''}[f(x)].$$

Pour le moment posons simplement:

$$\psi_k^{k'''}(x) = w^{k'''}[k\, t^{k'''}(x)] \tag{3}$$

et montrons qu' on définit une fonction $w^{k'''}$ telle que son inverse $t^{k'''}$ vérifie

$$t[\psi(x, y)] = t(x) + t(y), \tag{4}$$

et que

$$f^{k'}[\varphi_k^{k''}(x)] = \psi_k^{k'''}[f^{k'}(x)]; \tag{2}$$

cette dernière condition s'écrit en désignant par g l'inverse de f

$$f^{k'}[u^{k''}[k\, v^{k''}(x)]] = w^{k'''}[k\, t^{k'''}[f^{k'}(x)]]. \tag{5}$$

Définissons $w^{k'''}$ par (5) et montrons qu'il existe une infinité de solutions en w de cette équation.

On peut écrire (5):

$$t^{k'''}\left[f^{k'}[u^{k''}[k\, v^{k''}(x)]]\right] = k\, t^{k'''}[f^{k'}(x)]. \tag{5}$$

Donnons nous arbitrairement $t^{k'''}[f^{k'}(a_1)] = A_1$; on en déduit:

$$t^{k'''}\left[f^{k'}[u^{k''}[k v^{k''}(a_1)]]\right],$$

en faisant varier k de $-\infty$ à $+\infty$. Comme toutes ces fonctions sont complètes, on a ainsi défini $t^{k'''}(x)$ quelque soit x

$t^{k'''}(x)$ ainsi défini satisfait à (4) et à (5).

Montrons d'abord que (5) est vérifiée: $t^{k'''}$ est défini par:

$$t^{k'''}\left[f^{k'}[u^{k''}[k\, v^{k''}(a_1)]]\right] = k\, t^{k'''}[f^{k'}(a_1)] \tag{6}$$

où k est variable. Considérons une valeur quelconque x et démontrons que

$$t^{k'''}\left[f^{k'}[u^{k''}[k v^{k''}(x)]]\right] = k\, t^{k'''}[f^{k'}(x)].$$

Posons $$k_1\, v^{k''}(a_1) = k\, v^{k''}(x);$$

cette équation définit k, on a alors

$$t^{k''}\left[f^{k'}[u^{k''}[k\, v^{k''}(x)]]\right] = k_1\, t^{k'''}[f^{k'}(a_1)] = k\, \frac{v^{k''}(x)}{v^{k''}(a_1)}\, t^{k'''}[f^{k'}(a_1)].$$

Il faut démontrer que:

$$\frac{v^{k''}(x)}{v^{k''}(a_1)}\, t^{k'''}[f^{k'}(a_1)] = t^{k''}[f^{k'}(x)]$$

ou que:

$$\frac{v^{k''}(x)}{t^{k'''}[f^{k'}(x)]} = \frac{v^{k''}(a_1)}{t^{k'''}[f^{k'}(a_1)]}$$

est indépendant de x; dans (6) posons

$$y = u^{k''}[k\, v^{k''}(a_1)], \quad \text{il vient}$$

$$t^{k'''}[f^{k'}(y)] = k\, t^{k'''}[f^{k'}(a_1)],$$

mais $v^{k''}(y) = k\, v^{k''}(a_1)]$, donc en formant $\dfrac{t^{k'''}[f^{k'}(y)]}{v^{k''}(y)}$

$$\frac{t^{k'''}[f^{k'}(y)]}{v^{k''}(y)} = \frac{t^{k'''}[f^{k'}(a_1)]}{v^{k''}(a_1)}$$

comme on a $y = u^{k''}[k\, v^{k''}(a_1)$ et que k varie de $-\infty$ à $+\infty$, cette égalité a lieu quelque soit y.

Démontrons maintenant que (4) est vérifié.

Considérons 2 valeurs quelconques k_1, k_2, on a quelque soit x

$$t^{k'''}\left[f^{k'}[u^{k''}[k_1\, v^{k''}(x)]]\right] = k_1\, t^{k'''}[f^{k'}(x)]$$

et une relation analogue pour k_2.

Formons

$$t^{k'''}\left[\psi\left(f^{k'}[u^{k''}[k_1\, v^{k''}(x)]],\ f^{k'}[u^{k''}[k_2\, v^{k''}(x)]]\right)\right]$$

$$= t^{k'''}\left[f^{k'}\left(\varphi[u^{k''}[k_1\, v^{k''}(x)],\ u^{k''}[k_2\, v^{k''}(x)]]\right)\right]$$

icm©

$$= t^{k'''}\left[f^{k'}\left[u^{k''}\left[(k_1+k_2)\, v^{k''}(x)\right]\right]\right]$$

$$= (k_2+k_2)\; t^{k'''}\left[f^{k'}(x)\right]$$

$$= t^{k'''}\left[f^{k'}\left[u^{k''}\left[k_1\, v^{k''}(x)\right]\right]\right] + t^{k'''}\left[f^{k'}\left[u^{k''}\left[k_2\, v^{k''}(x)\right]\right]\right].$$

Comme k_1, k_2 sont qnelconques, (4) est vérifié. C. q. f. d.

VI. Application à la théorie des groupes.

Tout ce qui précède s'applique à des fonctions d'une variable. Mais il faut remarquer que nous n'avons fait intervenir que les notions suivantes:

1°. Correspondance entre les éléments de 2 ensembles ayant la puissance du continu, la fonction et la variable,

2°. Les éléments, la fonction et la variable sont de même nature;

3°. Notion d'égalité de 2 éléments.

Tout ce que nous venons de dire et ce que nous dirons par la suite s'applique donc à des correspondances plus générales que des correspondances entre 2 variables.

Nous pouvons répéter ces raisonnements en remplaçant la variable x par un ensemble de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et y par $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ou même par une infinité de variables.

Etant donné l'ensemble $x_1, x_2, \ldots, x_n$ il lui correspondra un ensemble bien déterminé $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

$y = f(x)$ sera remplacé par

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &\;\vdots \\ y_n &= f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

À la place de $x = y$, nous écrirons $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2, \ldots, x_n = y_n$, c'est ici qu'apparaissent les deux dernières notions auxquelles nous avons fait appel. Pour que nous puissions effectuer la substitution $f_1[f_2(x)]$ il faut que x et $f_2(x)$ soient des éléments de même nature et pour pouvoir itérer les fonctions il faut définir l'égalité $x = y$.

De même nous pouvons recommencer les raisonnements en remplaçant le mot fonction par le mot transformation ponctuelle, le mot valeur ou variable par le mot point.

Au lieu de dire $y = x$, nous dirons le point x est confondu avec le point y.

Du reste, il suffit de remarquer qu'à un point du plan correspond un système de 2 nombres x, y et réciproquement: à toute transformation ponctuelle nous pouvons donc faire correspondre une relation entre 2 ensembles de 2 variables, relation que nous pouvons désigner comme plus haut par $y = f(x)$.

La notion de fonction s'étend donc à toute relation entre les éléments de 2 ensembles d'êtres mathématiques variables, de même nature, dont nous avons défini l'égalité et qui peuvent prendre un ensemble de valeurs de puissance C.

On en déduit rapidement quelques théorèmes sur les transformations ponctuelles.

Définitions: Nous appellerons *transformation* sur une fonction l'opération qui consiste à faire sur cette fonction simultanément le changement de variable:

$$x' = u(x)$$

et le changement de fonction

$$y' = u(y).$$

$y' = g'(x')$ sera la fonction transformée. Soit v la fonction inverse de u; on voit que

$$y' = g(x') = u\left[f\left[v(x)\right]\right].$$

Si l'on considère x et y comme des points d'un plan et $y = f(x)$ comme une transformation ponctuelle, la transformation précédente revient à former la transformée de f par u ou encore à effectuer un même changement de coordonnées sur le point variable et le point fonction. La transformation sera complète si la fonction u est complète.

Nous appellerons *groupe de fonctions* un ensemble de fonctions tel que, $f_1(x)$ et $f_2(x)$ étant deux fonctions quelconques du groupe, $f_1[f_2(x)]$ est encore une fonction du groupe.

Nous nous occuperons des groupes de puissance C; nous désignerons les fonctions d'un tel groupe par $f_n(x)$ n, étant un nombre quelconque, et nous supposerons que ces fonctions $y = f_n(x)$ considérées comme fonctions de x, n étant constant, ou comme fonctions de n, x étant constant, sont complètes.

Nous appelerons *groupe complet* un groupe de puissance C tel qu'étant donné un nombre entier p quelconque et une fonction $f_n(x)$ quelconque du groupe, il existe une fonction $f_{n'}(x)$ et une seule appartenant au groupe et telle que l'on ait:

$$\underbrace{f_{n'}[f_{n'}[\ldots\ldots f_{n'}(x)\ldots)]]}_{p \text{ fois}} = f_n(x)$$

Théoréme: Soit un groupe complet $f_n(x)$ commutatif et comprenant la fonction $y = x$; posons, n, n' étant 2 nombres quelconques:

$$f_n[f_{n'}(x)] = f_{\varphi(n, n')}(x).$$

La fonction $\varphi(n, n')$ ainsi définie est une fonction φ.

Nous supposerons, ce qui peut toujours être réalisé, qu'á une fonction $f_n(x)$ du groupe correspond une seule valeur de l'indice et réciproquement.

Nous allons vérifier successivement les 4 hypothèses.

1°. Soit α la valeur de l'indice qui correspond à $f_\alpha(x) = x$; on a

$$f_{\varphi(n_1 \alpha)}(x) = f_n[f_\alpha(x)] = f^n(x),$$

comme à une fonction correspond un seul indice: $\varphi(n_1\, \alpha) = n$

2°. Formons

$$f_{\varphi[n, \varphi(n', n'')]}(x)$$

$$f_{\varphi[n, \varphi(n', n'')]}(x) = f_n[f_{\varphi(n', n'')}(x)] = f_n[f_{n'}[f_{n''}(x)]],$$

mais le groupe étant commutatif, nous pouvons échanger entre eux les indices n, n', n'' sans changer $f_n[f_{n'}[f_{n''}(x)]]$.

La fonction $\varphi[n, \varphi(n', n'')]$ est donc symétrique par rapport aux variables n, n', n''.

3°. À un système de valeurs de n, n' correspond une valeur et une seule de $\varphi(n_1, n')$, puisque les fonctions forment un groupe et qu'il y a correspondance biunivoque entre les fonctions du groupe et les indices.

On verrait de même qu'à un système n, n' correspond une seule valeur de $\varphi'(n, n')$, puisque l'inverse d'une fonction du groupe est encore une fonction du groupe.

4°. On voit aisément que

$$f_{\varphi_p(n)}(x) = \underbrace{f_n[f_n[\ldots\ldots f_n(x)\ldots)]]}_{p \text{ fois}}$$

comme le groupe est complet, à une valeur de $\varphi_p(x)$ correspond une valeur de n et une seule.

Définition: Nous dirons que deux groupes de fonctions sont semblables si l'on peut amener l'un d'eux à être identique à l'autre par un changement complet d'indice suivi d'une même transformation complète sur les fonctions du groupe.

Nous appellerons groupe des translations le groupe:

$$y = f_n(x) = x + n.$$

Théoréme: [1] Tout groupe complet commutatif de puissance C est semblable au groupe des translations; et l'on peut passer de l'un à l'autre d'une infinité de puissance f de façons.

Soit $f_k(x)$ un tel groupe, soit

$$f_k[f_{k'}(x)] = f_{\varphi(k, k')}(x).$$

1°. Nous allons faire un changement d'indice, c'est-à-dire, poser u étant une fonction complète:

$$k = u(h), \quad h = v(k)$$

et
$$f_k(x) = f_{u(h)}(x) = f'_h(x).$$

Nous allons chercher à déterminer la fonction u de manière que la nouvelle notation des fonctions du groupe vérifie:

$$f'_h[f'_{h'}(x)] = f_{h+h'}(x).$$

Mais nous avons:

$$f_k[f_{k'}(x)] = f_{\varphi(k, k')}(x)$$

et
$$f_k[_{k'}(x)] = f'_h[f'_{h'}(x)] = f'_{h+h'}(x) = f_{u(h+h')}(x).$$

D'où la condition nécessaire et suffisante:

$$u(h + h') = \varphi[u(h), u(h')];$$

comme $h + h'$ et φ sont des fonctions φ, il existe une infinité de fonctions complètes u satisfaisant à la condition demandée.

Nous pouvons donc supposer que

$$f_k[f_{n'}(x)] = f_{k+k'}(x).$$

2°. Effectuons sur les fonctions du groupe la transformation définie par les équations:

$$x' = u(x), \qquad x = v(x')$$

$$y' = u(y), \qquad y = v(y')$$

u étant une fonction complète.

Soit $y' = p_k(x')$ la transformée de $f_k(x)$.

On a $y' = p_k(x') = u[f_k[v(x')]]$.

Cherchons à déterminer u de façon que

[1] Ce théorème a été demontré par Sophus Lie dans le cas des groupes de fonctions continues.

icm©

$$p_k(x') = x' + k$$

d'où la condition:

$$u\,[f_k\,[v\,(x')]] = x' + k,$$

qui s'écrit:

$$f_k\,[v\,(x')] = v\,(x+k). \tag{2}$$

Donnons nous arbitrairement deux valeurs x'_0, y'_0 et posons:

$$y'_0 = v\,(x'_0),$$

l'équation (2) nous donne:

$$f_k\,(y'^0) = f_k\,[v\,(x'_0)] = v\,(x'_0 + k).$$

Cette équation définit entièrement v, car k variant de $-\infty$ à $+\infty$ $x'_0 + k$ varie de $-\infty$ à $+\infty$, de plus la fonction $v\,(x)$ ainsi définie est complète, car $f_k\,(y'_0)$ est une fonction complète de k.

Je dis que v ainsi défini satisfait à (2) quels que soient k et x'.

En effet, on voit que si l'on pose $x' = x'_0 + k'$

$$f_k\,[v\,(x')] = f_k\,[v\,(x'_0 + k')] = f_k\,[f_{k'}\,[v\,(x'_0)]],$$

$$f_k\,[v\,(x')], = f_k\,[f_{k'}\,(y'_0)] = f_{k+k'}\,(y'_0) = v\,(x'_0 + k + k').$$

$$f_k\,[v\,(x')] = v\,(x'+k). \qquad \text{C. q. f. d.}$$

VII. Relations entre les solutions de deux équations fonctionnelles.

Nous savons qu'étant donné deux équations fonctionnelles de la forme (1)

$$f\,[\varphi\,(x, y)] = \psi\,[f\,(x), f\,(y)] \tag{1}$$

l'ensemble des solutions de chacune d'elles a pour puissance f, nous pouvons donc imaginer entre leurs solutions une correspondance biunivoque. Nous nous proposons de définir effectivement une telle correspondance et nous trouverons un covariant de cette correspondance.

Recherche des changements de fonction qui laissent invariante une équation donnée.

Soit l'équation:

$$f\,[\varphi\,(x, y)] = \psi\,[f\,(x), f\,(y)]. \tag{1}$$

Nous allons chercher une fonction $p\,(x)$ telle que si $f\,(x)$ est une solutions quelconque de (1), $p\,[f\,(x)]$ en soit une aussi.

Nous avons immédiatement les deux conditions:

$$f\,[\varphi\,(x, y)] = \psi\,[f\,(x), f\,(y)],$$

$$p\,[f\,[\varphi\,(x, y)]] = f\,[p\,[f\,(x)], p\,[f\,(y)]],$$

Tirons $f\,[\varphi\,(x, y)]$ de la première équation, portons dans la seconde et posons:

$$u = f\,(x), \quad v = f\,(y),$$

la seconde équation s'écrit:

$$p\,[\psi\,(u, v)] = \psi\,[p\,(u), p\,(v)]; \tag{2}$$

comme f est une fonction complète, u et v prennent toutes les valeurs possibles de $-\infty$ à $+\infty$.

p doit donc être une solution de (2), il est facile de voir en faisant le calcul précédent à l'envers que si p est une solution quelconque de (2) et f une solution quelconque de (1), $p\,[f\,(x)]$ est une solution de (1). Étant donné deux solutions particulières f_1, f_2 quelconques de (1), il existe une solution p de (2) telle que: $p\,[f_1\,(x)] = f_2\,(x)$,

car la fonction: $p\,(x) = f_2\,[g_1\,(x)]$

est parfaitement déterminée et nous vérifions facilement que c'est une solution de (2).

Remarque: L'équation qui définit p est indépendante, non seulemen de la fonction choisie f, mais de la fonction $\varphi\,(x, y)$.

Nous en déduisons que si l'on connaît une solution particulière f_1 de (1) et si l'on désigne par p la solution générale de (2), la solution générale de (1) est

$$f\,(x) = p\,[f_1\,(x)].$$

Recherche des changements de variable qui laissent invariante une équation.

Soit l'équation (1)

$$f\,[\varphi\,(x, y) = \psi\,[f\,(x), f\,(y)]$$

faire le changement de variable $x = r\,(x')$ sur f revient à faire sur la fonction g inverse de f le changement de fonction $z = r\,(z')$, or g satisfait à l'équation:

$$g\,[\psi\,(x, y)] = \varphi\,[g\,(x), g\,(y)]$$

r satisfait donc à

$$r\,[\varphi\,(x, y)] = \varphi\,[r\,(x), r\,(y)].$$

Les remarques faites au paragraphe précédent s'appliquent.

Relation entre les solutions de deux équations quelconques.

Soit l'équation

$$f[\varphi(x, y)] = \psi[f(x), f(y)]. \tag{1}$$

Désignons par $f_1(x)$ une solution, particulière de cette équation, par g_1 l'inverse de f_1. Nous avons vu qu'en designant par p la solution générale de

$$p[\psi(x, y)] = \psi[p(x), p(y)] \tag{1}$$

la solution générale de (1) est

$$f(x) = p[f_1(x)]. \tag{α}$$

Considérons de même l'équation:

$$w[\theta(x, y)] = \psi[w(x), w(y)]; \tag{2}$$

désignons par t l'inverse de w, par w_1 une solution particulière de (2), la solution générale de (2) est

$$w(x) = p[w_1(x)]. \tag{β}$$

En éliminant p, il résulte de (α) et (β) qu'il y a entre les solutions générales de (1) et (2) la relation

$$w[t_1(x)] = f[g_1(x)] \tag{γ}$$

qu'il faut interpréter de la façon suivante: Si f est une solution quelconque de (1), la fonction w définie par (γ) est une solution de (2) et réciproquement.

On voit en écrivant (γ) sous la forme

$$(\gamma) \quad w(x) = f[g_1[w_1(x)]]$$

que (1) et (2) se ramènent l'une à l'autre par changement de variable.

Considérons de même l'équation (3)

$$u[\theta(x, y)] = n[u(x), u(y)]; \tag{3}$$

soit v l'inverse de u, (2) et (3) ont en commun leurs premiers membres; elles se ramènent donc l'une à l'autre par changement de fonction. Pour le montrer il suffit de considérer les équations aux inverses; entre les solutions générales des équations (2) et (3) on a la relation

$$(\delta) \quad u(x) = u_1[t_1[w(x)]].$$

Relation qu'il faut interpréter comme (γ).

Eliminons maintenant w entre les équations γ et δ, il vient:

$$w_1[v_1[u(x)]] = f[g_1[w_1(x)]]$$

ou

$$u(x) = u_1\Big[t_1\big(f[g_1[w_1(x)]]\big)\Big].$$

D'où le théorème suivant:

Thèoréme: Etant donné deux équations de la forme

$$f[\varphi(x, y)] = \psi[f(x), f(y)]$$

on peut passer de l'une à l'autre par un changement simultané de fonction et de variable et cette transformation peut se faire d'une infinité de puissance f de façons.

Il faut comprendre cet énoncé de la façon suivante: Si l'on désigne par f la solution générale de (1), par u_1, f_1, w_1 des solutions particulières de (3) (1) (2),

$$u(x) = u_1\Big[t_1\big(f[g_1[w_1(x)]]\big)\Big]$$

est la solution générale de (3).

Ce résultat est du reste facile à vérifier par substitution.

Imaginons qu'à chaque équation fonctionnelle du type (1) nous fassions correspondre une solution particulière de cette même équation et considérons une équation fonctionnelle type, par exemple

$$(3') \quad u(x+y) = u(x) + u(y).$$

Le changement simultané de fonction et de variable qui nous permet de passer à l'équation

$$(1) \quad f[\varphi(x, y)] = \psi[f(x), f(y)]$$

sera parfaitement déterminé si nous prenons pour f_1 la solution particulière choisie de (1), pour w_1 la solution particulière de

$$w(x+y) = f[w(x), w(y)]$$

et pour u_1 la solution de (3').

Nous avons donc réalisé une relation bien déterminée entre les solutions de (1) qui est quelconque et de (3'); nous obtenons une notation des solutions d'une équation quelconque, les indices étant les solutions de (3').

icm©

Covariant d'une correspondance. Considérons les trois équations:

$$(1) \quad f[\varphi(x, y)] = \psi[f(x), f(y)],$$

$$(2) \quad w[\theta(x, y)] = \psi[w(x), w(y)]$$

$$(3) \quad u[\theta(x, y)] = u[u(x), \eta(y)].$$

En désignant par f_1, w_1, u_1 des solutions particulières quelconques de (1) (2) (3), par g_1, t_1, v_1 leurs inverses, nous avons vu que l'on avait entre les solutions générales des équations (1) et (3) la relation

$$w_1[v_1[u(x)]] = f[g_1[w_1(x)]]. \qquad (4)$$

Ainsi étant donnés f_1, w_1, u_1 nous établissons entre les solutions de (1) et (3) une correspondance; nous appellerons fonctions correspondantes des solutions de ces équations liées l'une à l'autre par la relation (4).

Posons nous la question suivante:

La fonction w_1 étant fixée une fois pour toutes, la correspondance définie par f_1 et u_1 ne peut-elle être définie par un autre système de solutions f_2, u_2?

Une remarque limitera le champ des recherches:

Dans la correspondance définie par f_1 et u_1, f_1 et u_1 se correspondent car

$$w_1[v_1[u_1(x)]] = f_2[g_1[w_1(x)]].$$

Ainsi pour définir une correspondance identique à (4), c'est-à-dire qui à une même fonction f fera correspondre une même fonction u, une condition nécessaire est de la définir par un systéme f_2, u_2 de fonctions correspondantes par la relation (4).

Soit donc f_2, u_2 un couple de fonctions correspondantes par (4); considérons la correspondance

$$(5) \quad w_1[v_2[u'(x)]] = f'[g_2[w_1(x)]].$$

Nous mettons u' ert f' pour distinguer ces fonctions de celles qui s'introduisent dans (4). Remarquons en passant que f_1 et u_1 se correspondent par (5); la vérification est chose facile.

Voyons si les relations qui traduisent nos hypothèses c'est-à-dire:

$$(4) \quad w_1[v_1[u(x)]] = f[g_1[w_1(x)]],$$

$$(4') \quad w_1[v_1[u_2(x)]] = f_2[g_1[w_1(x)]]$$

entraînent la relation

$$(5) \quad w_1[v_2[u(x)]] = f[g_2[w_1(x)]]$$

qui traduit la conclusion.

Nous allons montrer que si l'on suppose (4), (4′), (5) vérifiés simultanément, on aboutit à une formule qui, en général, n'est pas vérifiée.

En effet, de (4′) nous tirons

$$w_1[v_1(x)] = f_2\left[g_1\left[w_1[v_2(x)]\right]\right]$$

et

$$w_1[v_1[u(x)]] = f_2\left[g_1\left[w_1[v_2(x)]\right]\right]$$

Mais d'après (4)

$$w_1[v_1[u(x)]] = f[g_1[w_1(x)]],$$

et d'après (5′)

$$w_1[v_1[u(x)]] = f[g_2[w_1(x)]]$$

d'où

$$f[g_1[w(x)]] = f_2\left[g_1\left[f[g_2[w_1(x)]]\right]\right]$$

ou, comme $w(x)$ est une fonction complète:

$$(6) \quad f_1[g[f_2(x)]] = f_2[g[f_1(x)]]$$

cette relation (6) ne contient plus que des solutions de l'équation (1) et dans cette formule g est l'inverse de la solution générale f de (1).

On voit donc que si les correspondances (4) et (5) étaient identiques, la relation (6) en résulterait.

Nous allons montrer qu'il existe des fonctions g qui ne vérifient pas (6).

Remarquons auparavant que si 3 fonctions particulières f, f_1, f_2 vérifient la relation (6), si de plus on considère la correspondance définie par (4) et si on désigne par u, u_1, u_2 les fonctions qui correspondent à f, f_1, f_2, des relations (4) (4′) (6) on peut déduire la relation (5) en faisant les calculs précédents en sens contraire.

Or de (4) (4′) et (5) en procédant comme précédement mais en opérani sur les fonctions u au lieu d'opérer sur les fonctions f_1, on dédnit la relation:

$$(7) \quad u_1[v[u_2(x)]] = u_2[v[u_1(x)]]$$

que l'on déduit de (6) en remplaçant les fonctions f par les fonctions u qui leur correspondent.

On voit donc que l'equation (6) est covariante par rapport à une correspondance quelconque.

Pour démontrer que toutes les solutions de (1) ne vérifient pas (6) il suffit donc de prendre pour (3) l'équation particulière:

$$u'[\theta(x, y)] = \theta[u'(x), u'(y)] \qquad (3')$$

Cette fonction admet la solution particulière $y = x$, prenons donc $u_2(x) = x$; l'équation (7) s'écrit alors:

$$u'_1[v'(x)] = v'[u'_1(x)],$$

ou encore: (8') $\qquad u'[u'_1(x)] = u'_1[u'(x)].$

Tout revient donc à trouver combien de solutions de (3) sont commutatives avec la solution particulière u'_1. C'est un problème que nous poserons plus loin; nous pouvons indiquer les résultats suivants:

1°. Il existe une infinité dénombrable de fonctions f'_2 telles que toute solution de (3') vérifie (8'). Il existe donc une infinité dénombrable de fonctions f_2 telle que (6) soit vérifiée par toute solution f de (1) et une infinité dénombrable de couples qui définissent la même correspondance que f_1, u_1.

2°. Pour les autres solutions $u'_1(x)$ de l'équation, (8') n'est pas vérifiée pour toutes les solutions u' de (3), mais elle est vérifiée pour une infinité de solutions de cette équation.

Les correspondances définies par f_1, u_1 et f_2, u_2 ont donc une infinité de couples correspondants communs.

VIII. Etude de l'équation particulière: $f[\varphi(x, y)] = \varphi[f(x), f(y)]$.

Nous allons étudier maintenant les équations plus particulières

$$(1) \quad f[\varphi(x, y)] = \varphi[f(x), f(y)].$$

On voit immédiatement que les solutions de cette équation (1) forment un groupe qui contient la fonction $y = x$.

Nous chercherons principalement les sous-groupes de solutions de cette équation.

Théorème: La fonction $\varphi_k^{k'}(x)$ où k et k' ont des valeurs fixes quelconques est une solution de (1). Rappelons que par définition

$$(2) \quad \varphi_k^{k'}(x) = g^{k'}[k f^{k'}(x)]$$

$f^{k'}$ étant une solution quelconque de

$$(3) \quad f[\varphi(x, y)] = f(x) + f(y).$$

Il faut démontrer que

$$\varphi_k^{k'}[\varphi(x, y)] = \varphi[\varphi_k^{k'}(x), \varphi_k^{k'}(x)].$$

Des équations (2) et (3) tirons

$$\varphi_k^{k'}(x) = g^{k'}[k f^{k'}(x),$$
$$\varphi(x, y) = g^{k'}[f^{k'}(x) + f^{k'}(y)].$$

Nous avons donc

$$\varphi_k^{k'}[\varphi(x, y)] = g^{k'}\Big[k f^{k'}\big[g^{k'}[f^{k'}(x) + f^{k'}(y)]\big]\Big],$$

$$\varphi_k^{k'}[\varphi(x, y)] = g^{k'}[k f^{k'}(x) + k f^{k'}(y)] = g^{k'}\big[f^{k'}[\varphi_k^{k'}(x)] + f^{k'}[\varphi_k^{k'}(y)]\big]$$

$$\varphi_k^{k'}[\varphi(x, y)] = \varphi[\varphi_k^{k'}(x), \varphi_k^{k'}(y)]. \qquad \text{C. q. f. d.}$$

Nous allons démontrer que la réciproque n'existe pas c'est-à-dire qu'il y a des solutions de (1) qui ne sont pas de la forme $\varphi_k^{k'}(x)$; pour cela nous allons former une de ces solutions.

Soient
$$a_1, a_2, \ldots\ldots, a_i, \ldots\ldots$$
$$A_1, A_2, \ldots\ldots, A_i, \ldots\ldots$$

deux ensembles relatifs à φ, il existe une solution de (1) et une seule telle que

$$A_i = f(a_i)$$

quel que soit i. Prenons pour second ensemble relatif à φ un ensemble dont les deux premiers termes sont $\varphi_{k_2}(a_1)$ et $\varphi_{k_3}(a_2)$, k_2, k_3 étant deux nombres rationnels différents.

On voit aisément qu'on peut former un ensemble relatif à φ satisfaisant à cette condition, puisque la relation

$$\varphi_{k_2}(a_1) = \varphi_k[\varphi_{k_3}(a_2)]$$

où k serait rationnel, entraînerait:

$$a_2 = \varphi_{\frac{k_2}{k k_3}}(a_1)$$

ce qui est impossible, puisque a_1, a_2 font partie tous deux du premier ensemble relatif à φ.

Nous aurons donc

$$f(a_1) = \varphi_{k_2}(a_1),$$
$$f(a_2) = \varphi_{k_3}(a_2).$$

icm©

Supposons un instant qu'il existe k_1 et k' tels que

$$f(x) = \varphi_k^{k'}(x)$$

et considérons une fonction $f_1(x)$ solution de (3) telle que

$$(4) \quad f_1[\varphi_k^{k'}(x)] = k f_1(x),$$

quels que soient k et x, et soient

$$f_1(a_1) = A_1,$$
$$f_1(a_2) = A_1$$

les valeurs que prend cette fonction pour a_1 et a_2; on aura simultanément:

$$f_1[\varphi_{k_2}(a_1)] = k_2 f_1(a_1) = k_2 A_1,$$
$$f_1[\varphi_{k_3}(a_1)] = k_3 f_1(a_2) = k_3 A_2,$$

puisque k_2, k_3 sont rationnels et que f_1 satisfait à (3) et

$$f_1[\varphi_k^{k'}(a_1)] = k_1 f(a_1) = k_1 A_1,$$

$$f_1[\varphi_k^{k'}(a_2)] = k_1 f(a_2) = k_1 A_2,$$

qu' en outre f_1 satisfait à (4).

On devrait donc avoir simultanément $k_1 = k_2$ et $k_1 = k_2$, ce qui est impossible, puisque k_2 et k_3 sont différents par hypothèse.

Remarque: On peut traiter le cas où l'on aurait $A_2 = 0$ par exemple en recommençant le raisonnement avec les ensembles.

$$a_1,\ a_2,\ a_3 \ldots\ldots$$

$$\varphi_{k_2}(a_1),\ \varphi_{k_3}(a_2),\ \varphi_{k_4}(a_3).$$

La solution ainsi définie ne peut donc être de la forme $\varphi_k^{k'}(x)$.

Nous allons même généraliser cet énoncé:

Soit $u^{k'}(x)$ une solution quelconque de l'équation

$$(5) \quad u(x) + u(y) = u(x+y),$$

$v^{k'}$ son inverse, si l'on considère d'une part les fonctions $u_k^{k'}(x)$ définies par

$$u_k^{k'}(x) = v^{k'}[k\, u^{k'}(x)],$$

et d'autre part une solution particulière quelconque f_1 de l'équation (3) on voit facilement que les fonctions

$$(6) \quad p(x) = g_1\left[u_k^{k'}[f_1(x)]\right]$$

où k_1 et k' sont fixes mais quelconques satisfont à (1).

On démontrerait comme précédemment qu'il existe des solutions de (1) qui ne sont pas de la forme (6). Mais on obtient une proposition plus précise en démontrant que toute fonction de la forme (6) peut se mettre sous la forme

$$g_2[k_1 f_2(x)],$$

où f_2 est une solution de (3).

En effet, on sait d'après un théorème précédent qu'étant donnée une solution quelconque $f_1(x)$ de l'équation

$$(3) \quad f_1[\varphi(x, y)] = f_1(x) + f_1(y)$$

et un groupe $u_k^{k'}(x)$ obtenu à partir de $x+y$ il existe un groupe $\varphi_k^{k'}(x)$ tel que

$$f_1[\varphi_k^{k''}(x)] = u_k^{k'}[f_1(x)],$$

quel que soit k et on voit que

$$p(x) = g_1\left[u_k^{k''}[f_1(x)]\right] = \varphi_k^{k''}(x);$$

toute fonction de la forme (6) est donc de la forme $\varphi_k^{k''}(x)$.

Ainsi les solutions de l'équation (1) se classent en deux catégories:

1°. Les fonctions $\varphi_k^{k'}(x)$ solutions de *première catégorie*.

2°. Les autres solutions que nous désignerons sous le nom de solutions de *deuxième catégorie*.

Nous allons étudier ces deux sortes de solutions.

Soit $p_h(x)$ un *groupe commutatif de solutions de puissance* C, comprenant la fonction $y = x$, est isomorphe holoédriquement au groupe des similitudes hx; cherchons á démontrer que les *fonctions de ce groupe sont de première catégorie et que ce groupe est identique à un groupe* $\varphi_k^{k'}(x)$.

Soit $$p_k[p_{h'}(x)] = p_{\theta(h_1, h')}(x)$$

Le groupe $p^h(x)$ étant holoédriquement isomorphe au groupe hx pour lequel $\theta(h_1, h') = h\,h'$, l'équation

icm©

$$f(x) f(y) = f[\theta(x, y)]$$

admet au moins une solution $f_1(x)$ complète; nous poserons alors

$$p_h(x) = q_{f_1(h)}(x) = q_k(x),$$

ce qui revient à noter autrement les fonctions du groupe et on voit que

$$q_k[q_{k'}(x)] = q_{kk'}(x).$$

Soit x_0 une valeur particulière de x, posons

$$\varphi[q_k(x_0), \; q_{k'}(x_0)] = q_{u(k, k')}(x_0);$$

cette égalité définit la fonction u.

I — Je dis que cette fonction u est une fonction φ.

1°. Soit α la valeur de k telle que

$$q_\alpha(x) = x, \quad \text{on a} \quad u(\alpha, x) = x.$$

2°. On a

$$\varphi[q_k(x_0), \; \varphi[q_{k'}(x_0), \; q_{k''}(x_0)]] = q_{u[k, u(k', k'')]}(x_0),$$

ce qui prouve que $u[k, u(k', k'')]$ est une fonction symétrique des k, puisque nous supposons naturellement que la correspondance entre les fonctions du groupe et les indices est biunivoque.

3°. Àun système k_1, k' correspond une valeur et une seule de $u(k_1 k')$, puisque $q_k(x)$ est une fonction complète de k.

De même $u'(z, x)$ est uniforme.

4°. On a $$\varphi_h[q_k(x_0)] = q_{u_h(k)}(x_0),$$

ce qui prouve que $u_h(k)$ est une fonction complète.

II — Je dis maintenant que l'on a

$$\varphi[q_k(x), \; q_{k'}(x)] = q_{u(k, k')}(x),$$

quel que soit x. Pour cela je vais d'abord démontrer que

$$z\, u(x, y) = u(zx, zy),$$

quels que soient x, y, z.

On a en effet $\varphi[q_k(x), \; q_k(y)] = q_k[\varphi(x, y)],$

quel que soit k; posons $x = q_{k_1}(x_0)$, $y = q_{k_2}(x_0)$.

il vient: $$z = \varphi[q_k[q_{k_1}(x_0)], \; q_k[q_{k_2}(x_0)]]$$

$$z = q_k[\varphi[q_{k_1}(x_0), q_{k_2}(x_0)]] = q_k[q_{u(k_1, k_2)}(x_0)]$$

ou encore: $$z = q_{ku(k_1, k_2)}(x_0).$$

Mais on peut écrire aussi

$$z = \varphi[q_k[q_{k_1}(x_0)], \; q_k(q_{k_2}(x_0))] = \varphi[q_{kk_1}(x_0), q_{kk_2}(x_0)]$$

$$z = q_{u(kk_1, kk_2)}(x_0)$$

donc $$z u(x, y) = u(zx, zy)$$

Nous pouvons alors écrire en posant $x = q_{k_1}(x_0)$

$$\varphi[q_k(x), q_{k'}(x)] = \varphi[q_k[q_{k_1}(x_0)], q_{k'}[q_{k_1}(x_0)]] = q_{u(kk_1, kk_2)}(x_0)$$

donc $$\varphi[q_k(x), q_{k'}(x)] = q_{u(k, k')}(x)$$

Cherchons un changement d'indice $k_1 = f_1(k)$ tel qu'avec le nouvel indice k_1 on ait toujours $q_{k_1}[q'_{_1}(x)] = q_{k_1 k'_1}(x)$ et que cette fois $u(k, k') = k + k'$. On devra avoir:

$$S \begin{cases} f_1[u(x, y)] = f_1(x) + f_1(y), \\ f_1(xy) = f_1(x) f_1(y) \end{cases}$$

avec $$z u(x, y) = u(zx, zy).$$

Supposons un instant que ce système S admette une solution compléte $f_1(x)$.

On voit en posant

$$q_h(x) = t_{f_1(h)}(x) = t_k(x)$$

c'est-à-dire en changeant la notation des fonctions du groupe que l'on a

$$(\alpha) \begin{cases} t_k[t_{k'}(x)] = t_{kk'}(x), \\ \varphi[t_k(x), t_{k'}(x)] = t_{k+k'}(x), \end{cases}$$

Considérons alors la fonction définie par

$$t[t_k(a)] = kA$$

icm©

et $$q_{u(k,k')}(x) = q_{u(k,k')}[q_{k_1}(x_0)] = q_{k_1 u(k,k')}(x_0),$$

où a et A sont des valeurs fixes quelconques; on vérifie en s'appuyant sur les équations (α) que la fonction ainsi définie est solution de

$$f[t_k(x)] = kf(u),$$

$$(3) \quad f[\varphi(x, y)] = f(x) + f(y).$$

On a donc $t_k(x) = g[kf(x)$, f étant une solution de (3); le groupe $t_k(x)$ est donc identique à un groupe $\varphi_k^{k'}(x)$.

Le question posée est donc identique à la suivante: Le systéme S admet-il une solution? Nous n'avons pas pu résoudre cette question.

On peut se demander si, etant donnés deux groupes $\varphi_k^{k'}(x)$ et $\varphi_k^{k''}(x)$, on peut passer de l'un à l'autre par un changement d'indice, en d'autres termes si ces groupes sont composés des mêmes fonctions et ne diffèrent l'un de l'autre que par la notation des fonctions qui les composent.

Supposons un instant que le système

$$(1) \quad \begin{cases} v(x+y) = v(x) + v(y), \\ v(xy) = v(x)\, v(y) \end{cases}$$

admette une solution compléte $v(x)$ différente de x; soit un groupe $\varphi_k^{k'}(x)$; posons

$$p_k(x) = \varphi_{v(k)}^{k'}(x)$$

On vérifie facilement en s'appuyant sur le systeme (1) que:

$$p_k[p_{k'}(x)] = p_{kk'}(x)$$

$$\varphi[p_k(x), p_{k'}(x)] = p_{k+k'}(x).$$

Une fonction définie par l'équation

$$(2) \quad f[p_k(x)] = kf(x)$$

est donc une solution de

$$(3) \quad f[\varphi(x, y)] = f(x) + f(y)$$

et il existe un groupe $\varphi_k^{k''}(x)$ tel que $\varphi_k^{k''}(x) = p_k(x)$.

D'où

$$\varphi_k^{k''}(x) = \varphi_{v(k)}^{k}(x),$$

les groupes $\varphi_k^{k'}$ et $\varphi_k^{k''}(x)$ ne diffèrent que pas la notation des fonctions qui les composent et les fonctions sont identiques deux à deux.

Mais nous montrerons que le système (1) n'admet pas d'autre solution que $v(x) = x$ ce qui va nous permettre de démontrer le théorème suivant:

Théorème: E t a n t d o n n é s d e u x g r o u p e s $\varphi_k^{k'}(x)$, $\varphi_k^{k''}(x)$, o n n e p e u t p a s p a s s e r d e l'u n à l'a u t r e p a r c h a n g e m e n t d'i n d i c e.

Soient deux groupes $\varphi_k^{k'}(x)$, $\varphi_k^{k''}(x)$ quelconques, soit x_0 une valeur quelconque de x; posons

$$\varphi_k^{k'}(x_0) = \varphi_{v_1(k)}^{k''}(x_0);$$

cette relation définit une fonction $v_1(k)$ complète. Si l'on pouvait passer du groupe k' au groupe k'' par changement d'indice, on devrait avoir quel que soit x

$$\varphi_{k_1}^{k'}(x) = \varphi_{v_1(k)}^{k''}(x).$$

Nons allons présenter la question autrement:

Soit $x = \varphi_k^{k'}(x_0)$, posons

$$(2) \quad \varphi_{k_1}^{k'}(x) = \varphi_{v_k(k_1)}^{k''}(x);$$

cette équation (2) définit une fonction complète $v_k(k_1)$. Nous démontrerons qu'en général $v_k(k_1)$ dépend de k_1. Auparavant, nous allons établir une formule qui sera très utile.

La relation

$$\varphi[\varphi_{k_1}^{k'}(x), \varphi_{k_2}^{k'}(x)] = \varphi_{k_1+k_2}^{k'}(x)$$

s'écrit

$$\varphi[\varphi_{v_k(k_1)}^{k''}(x), \varphi_{v_k(k_2)}^{k''}(x)] = \varphi_{v_k(k_1+k_2)}^{k''}(x)$$

en vertu de l'équation (2)

Mais

$$\varphi[\varphi_{v_k(k_1)}^{k''}(x), \varphi_{v_k(k_2)}^{k''}(x)] = \varphi_{v_k(k_1)+v_k(k_2)}^{k''}(x)$$

d'où

$$(3) \quad v_k(k_1+k_2) = v_k(k_1) + v_k(k_2).$$

Formons de même

$$\varphi^{k'}_{k_1}\,[\varphi^{k'}_{k_2}\,(x)] = \varphi^{k'}_{k_1 k_2}\,(x) = \varphi^{k''}_{v_k(k_1 k_2)}\,(x),$$

$$\varphi^{k'}_{k_1}\,[\varphi^{k'}_{k_2}\,(x)] = \varphi^{k'}_{k_1}[\varphi^{k'}_{k k_2}\,(x_0)] = \varphi^{k''}_{v_{k k_2}(k_1)}\,[\varphi^{k'}_{k_2}\,(x)] = \varphi^{k''}_{v_{k' k_2}(k_1)\; v_k(k_2)}\,(x),$$

d'où

$$(4) \quad v_k\,(k_1 k_2) = v_{k\,k_2}(k_1) + v_k\,(k_2)$$

quels que soient k_1, k_1 k_2.

On voit donc que si toutes les fonctions $v_k(x)$ étaient identiques à $v_1(x)$ on aurait

$$v_1\,(x y) = v_1\,(x)\; v_1\,(y).$$

et réciproquement en faisant $k = 1$ dans (4) que si

$$\begin{cases} v_1\,(x+y) = v_1\,(x) + v_1\,(y), \\ v_1\,(x y) \quad = v_1\,(x)\,.\,v_1\,(y) \end{cases}$$

on a $v_k(x) = v_1(x)$ quelque soit k.

Nous allons démontrer qu'étant donné un groupe $\varphi^{k'}_k(x)$ et une solution quelconque $v(x)$ complète de l'équation

$$(3) \quad v\,(x+y) = v\,(x) + v\,(y)$$

il existe un groupe $\varphi^{k''}_k(x)$ tel que

$$\varphi^{k'}_k\,(x_0) = \varphi^{k''}_{v(k)}\,(x_0)\,; \qquad (6)$$

comme une solution $v(x)$ de (3) ne vérifie pas (5)

$$(5) \quad v\,(xy) = v\,(x)\,.\,v\,(y), \qquad \text{sauf si} \quad v\,(x) = x;$$

il en résulte que l'on n'a pas

$$\varphi^{k'}_k\,(x) = \varphi^{k''}_{v(k)}\,(x)$$

quel que soit x.

Considérons en effet une fonction f définie par

$$g\,[v\,(k)\,f\,(x_0)] = \varphi^{k'}_k\,(x_0);$$

en prenant arbitrairement $f(x_0) = A$, on voit que cette équation définit $f(x)$ sans ambiguité, en faisant varier k.

Je dis que $\qquad f\,[\varphi\,(x, y)] = f\,(x) + f\,(y);$

soient en effet $\qquad x = \varphi^{k'}_{k_1}(x_0) \quad y = \varphi^{k'}_{k_2}(x_0),$

formons $f\,[\varphi\,(x, y)]$

$$f\,[\varphi\,(x, y)] = f\,[\varphi^{k'}_{k_2+k_2}(x_0)] = v(k_1+k_2)\,A = v\,(k_1)\,A + v\,(k_2)\,A = f(x)+f(y).$$

Il en résulte que les fonctions

$\varphi^{k''}_k(x) = g\,[k\,f\,(x)]$ sont de première catégorie et forment un groupe tel que

$$\varphi^{k'}_k\,(x_0) = \varphi^{k''}_{v(k)}\,(x^0) \qquad \text{C. q. f. d.}$$

Démontrons quelques propriétés des fonctions de première catégorie.

Théorème: Toute solution de

$$f\,[\varphi^{k'}_k\,(x)] = \varphi^{k'}_k\,[f\,(x)]$$

est une fonction de première catégorie.

Soit en effet

$$\varphi^{k'}_k\,(x) = v\,[k\,u\,(x)]$$

u étant une solution de

$$u\,[\varphi\,(x, y)] = u\,(x) + u\,(y)$$

et v étant son inverse.

On a par hypothèse

$$f\,[v\,[k\,u\,(x)]] = v\,[k\,u\,[f\,(x)]]$$

ou

$$u\,[f\,[v\,[(k y)]] = k\,u\,[f\,[v\,(y)]]$$

ou en posant $\qquad p\,(x) = u[f\,[v\,(y)]],$

$$p\,(kx) = k\,p\,(x), \qquad \text{ce qui donne} \qquad p\,(x) = A x$$

A étant une constante arbitraire.

On a donc

$$f\,(x) = v\,[A\,u\,(x)],$$

$f(x)$ coïncide donc avec la fonction $\varphi^{k'}_A(x)$. En d'autres termes, les seules solutions commutatives avec toutes les fonctions d'un groupe sont les fonctions de ce groupe.

On voit que réciproquement toute fonction de première catégorie satisfait à une équation de cette forme.

On en déduit que si pour une valeur particulière a de la variable une fonction de première catégorie est égale à $\varphi_k(a)$, k étant rationnel, elle est identique à $\varphi_k(x)$.

On peut le voir plus simplement en remarquant que si

$$\varphi^{k'}_{k_1}(a) = \varphi_k(a)$$

on a quel que soit k_2

$$\varphi^{k'}_{k_2}[\varphi^{k'}_{k_1}(a)] = \varphi^{k'}_{k_2}[\varphi_k(a)],$$

mais $\varphi^{k'}_{k_2}, \varphi^{k'}_{k_1}, \varphi_k$ sont commutatives, donc

$$\varphi^{k'}_{k_1}[\varphi^{k'}_{k_2}(a)] = \varphi_k[\varphi^{k'}_{k_2}(a)]$$

et on sait que quel que soit x on peut poser

$$x = \varphi^{k'}_{k_2}(a).$$

Si on considère un groupe $\varphi^{k'}_k(x)$ et si on effectue sur ce groupe une transformation définie par une solution quelconque f_1 de l'équation (1) on obtient le groupe

$$p_k(x) = f_1[\varphi^{k'}_k[g_1(x)]]$$

qui vérifie

$$p_k[p_{k'}(x)] = p_{kk'}(x),$$

$$\varphi[p_{k_1}(x), p_{k'}(x)] = p_{k+k'}(x):$$

ce groupe $p_k(x)$ est donc identique à un groupe $\varphi^{k''}_k(x)$.

Théorème: L'ensemble des fonctions de deuxième catégorie est de puissance f.

Nous avons vu qu'il suffisait qu'une solution vérifie

$$\varphi_{k_1}(a_1) = f(a_1), \qquad \varphi_{k_2}(a_2) = f(a_2)$$

pour deux valeurs particulières de x pour qu'elle soit de deuxième catégorie. Une solution de

$$(1) \quad f[\varphi(x, y)] = \varphi[f(x), f(y)]$$

satisfaisant á ces conditions sera définie en faisant correspondre à la suite transfinie de valeurs de x:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots.$$

la suite

$$\varphi_{k_1}(a_1), \ \varphi_{k_2}(a_2), \ A_3 \ldots.$$

des valeurs de $f(x)$; on voit que $A_3 \ldots.$ peuvent être choisis d'une infinité de façons et que l'ensemble des choix est de puissance f.

Théorème: Une fonction de deuxième catégorie fait partie d'un groupe dénombrable et commutatif de solutions.

Soit $f_1(x)$ une solution de deuxième catégorie. On sait que $f_1[f_1(x)]$ est aussi une solution de (1), posons en général

$$f_n(x) = f_{n-1}[f_1(x)]$$

$f_n(x)$ est solution de (1). Soit $g_1(x)$ l'inverse de $f_1(x)$, on sait que g_1 est solution de (1),

donc en posant $$g_n(x) = f_{-n}(x)$$

on voit que les fonctions $f_n(x)$ (n entier $\neq$ o) forment un groupe commutatif de solutions.

On sait aussi que l'on a quel que soit x

$$\varphi_k(f_1(x)] = f_1[\varphi_k(x)]$$

k étant rationnel et que $\varphi_k[f_1(x)$ est une solution de (1).

D'une façon plus générale, les fonctions de la forme:

$$\varphi_{k_1, k_2, \ldots k_n}[f_{p_1}(x), f_{p_2}(x), \ldots f_{p_n}(x)]$$

où $k_1, k_2, \ldots. k_n$ sont rationnels et $P_1, P_2, \ldots. P_n$ entiers forment un groupe commutatif de solutions qui comprend $f_1(x)$.

On voit de plus que ce groupe est dénombrable.

En résumé:

1°) Les solutions de (1) forment un groupe non commutatif de puissance f.

Elles se partagent en deux catégories.

2°) Les solutions de première catégorie forment des groupes commutatifs de puissance C.

3°) Une fonction de deuxième catégorie fait partie d'un groupe commutatif dénombrable de solutions.

IX. La question des solutions communes a deux équations fonctionnelles.

Nous avons vu que cette question se posait naturellement. Nous nous bornerons à des remarques et à l'étude d'un cas particulier.

Théorème: Toute solution commune aux equations.

$$(1) \quad f[\varphi(x, y)] = \psi[f(x), f(y)],$$

$$(2) \quad f[u(x)] = v[f(y)]$$

satisfait à

$$f[\varphi_1(x, y)] = \psi_1[f(x), f(y)] \quad (3)$$

où l'on pose

$$\varphi_1[x, y] = u'[\varphi[u(x), u(y)]]$$

$$\psi_1[x, y] = v'[\psi[v(x), v(y)]]$$

u' étant linverse de u et v' l'inverse de v.

Formons en effet en tenant compte de (2)

$$\psi[f[u(x)], f[u(y)]] = \psi[v[f(x)], v[f(x)]]$$

et en tenant compte de (1)

$$\psi[f[u(x)], f[u(y)]] = f[\varphi[u(x), u(y)]]$$

d'où

$$v'\Big[\psi[v[f(x)], v[f(y)]]\Big] = v'\Big[f[\varphi[u(x), u(y)]]\Big].$$

Mais d'après (2)

$$v_{\prime}[f(x)] = f[u'(x)]$$

donc

$$(3) \quad f[\varphi_1(x, y)] = \psi_1[f(x), f(y)]$$

Nous allons établir la réciproque.

Soit $f(x)$ une solution commune aux équations

$$(1) \quad f[\varphi(x, y)] = \psi[f(x), f(y)],$$

$$(3) \quad f[\varphi_1(x, y)] = \psi_1[(x), f(y)].$$

Nous supposons que ces équations ont une solution commune sans affirmer que cette solution existe quels que soient (1) et (3).

Soit v une fonction telle que

$$\psi_1(x, y) = v'[\psi[v(x), v(y)]]$$

et considérons la fonction u définie par

$$u(x) = g[v[f(x)]]$$

(3) s'écrit

$$f[\varphi[u(x), u(y)]] = \psi[f[u(x)], f[u(y)]] = \psi[v[f(x), v[f(y)]]$$

d'où

$$u[\varphi_1(x, y)] = \varphi[u(x), u(y)],$$

u est une solution de cette équation.

Nous avons vu qu'étant donné une équation de la forme

$$(1) \quad f[\varphi(x, y)] = \varphi[f(x), f(y)],$$

si $f_1(x)$ est une solution, $f_n(x)$ en est une aussi, d'ou le.

Théorème: Si deux équations de la forme

$$(1) \quad f[\varphi(x, y)] = \varphi[f(x), f(y)]$$

ont une solution commune, elles en ont une infinité dénombrable.

On sait qu'étant donné une équation de forme quelconque on peut en prenant pour nouvelle variable une solution particulière, la ramener à la forme (1). D'où le

Théorème: Si deux équations de la forme

$$f[\varphi(x, y)] = \psi[f(x), f(y)]$$

ont deux solutions communes, elles en ont une infinité dénombrable.

Cas particulier: Soit à trouver les solutions communes aux deux équations:

$$(1) \quad f[\varphi(x, y)] = \psi[f(x), f(y)],$$

$$(2) \quad f[u(x)] = v[f(x)]$$

dans le cas particulier où

$$u[\varphi(x, y)] = \varphi[u(x), u(y)]],$$

$$v[\psi(x, y)] = v[v(x), v(y)]$$

et où l'on connaît une solution commune particulière $f_1(x)$.

Prenons pour nouvelle variable $y = g_1(x)$

et posons
$$f'(x) = f[g_1(x)].$$

Les équations (1) et (2) deviennent

$$f'[\psi(x, y)] = \psi[f(x), f(y)],$$

$$f'[v(x)] = v[f'(x)].$$

Nous sommes donc ramenés au problème suivant:

Problème: Etant donné une équation de la forme

$$f[\varphi(x, y)] = \varphi[f(x), f(y)]$$

et une solution particulière $f_1(x)$ de cette équation, trouver toutes les solutions de (1) qui sont commutatives avec $f_1(x)$.

$$(2) \quad \psi[f_1(x)] = f_1[\psi(x)].$$

1°) $f_1(x) = \varphi_k(x)$, k rationnel. Dans ce cas, toute solution de (1) vérifie (2).

2°) $f_1(x)$ est de première catégorie soit $f_1(x) = \varphi_k^{k'}(x)$. Dans ce cas nous connaissons une infinité de puissance C de solutions, ce sont les fonctions du groupe $\varphi_k^{k'}(x)$, il peut y en avoir d'autres.

3°) $f_1(x)$ est de deuxième catégorie. Dans ce cas, nous ne connaissons qu'une infinité dénombrable de solutions communes à (1) et (2).

Lorsque l'on essaye d'appliquer au système (1), (2) la méthode employée pour démontrer le théorème d'existence du paragraphe IV, on se heurte à une grosse difficulté car, malgré les précautions prises, on peut avoir une fonction non uniforme.

Nous indiquerons pour terminer le théorème suivant:

Théorème: Soit $f_1(x)$ une solution particulière de (1); si l'on considère 4 groupes $\varphi^{k_1'}$ $\varphi^{k_1''}$ $\varphi^{k_2''}$ $\varphi^{k_2''}$ tels que

$$(3) \quad \begin{cases} f_1[\varphi_k^{k_1'}(x)] = \varphi_k^{k_1''}[f_1(x)] \\ f_1[\varphi_k^{k_2'}(x)] = \varphi_k^{k_2''}[f_1(x)] \end{cases}$$

et s'il existe une fonction f_2 satisfaisant au système

$$(4) \quad \begin{cases} f_2[\varphi_k^{k_1'}(x)] = \varphi_k^{k_2'}[f_2(x)], \\ f_2[\varphi_k^{k_1''}(x)] = \varphi_k^{k_2''}[f_2(x)] \end{cases}$$

et à $f_2[f_1(a)] = f_1[f_2(x)]$ a étant une valeur particulière quelconque, on a quel que soit x

$$f_1[f_2(x) = f_1[f_2(x)].$$

Soit en effet

$$x = \varphi_k^{k_1'}(a),$$

on a

$$f_2[f_1[\varphi_k^{k_1'}(a)]] = f_2[\varphi_k^{k_1''}[f_1(a)]] = \varphi_k^{k_2''}[f_2[f_1(a)]],$$

$$f_1[f_2[\varphi_k^{k_1'}(a)]] = f_1[\varphi_k^{k_1''}[f_2(a)]] = \varphi_k^{k_2''}[f_1[f_2(a)]]$$

C. q. f.

Mais si on pose

$$A = f_1(a), \qquad B = f_2(a)$$

et si on choisit $\varphi^{k_1'}, \varphi^{k_1''}$ une fois pour toutes et si on cherche à déterminer $\varphi^{k_2'}$ de façon que les systèmes (3) et (4) admettent chacun une solution, on est ramené à une question de même nature.

Posons en effet

$$\varphi_k^{k_1'}(a) = \varphi_{v(k)}^{k_2'}(a),$$

et

$$\varphi_k^{k_2''}(a) = \varphi_{w^1(k)}^{k_1''}(a)$$

on sait qu'au lieu de prendre comme inconnue $\varphi^{k_2'}$, il suffit de prendre $v_1(k)$ à condition d'assujettir $v_1(k)$ à vérifier

$$(5) \quad v_1(x+y) = v_1(x) + v_1(y).$$

Si l'on écrit que les systèmes (3) et (4) admettent chacun une solution, on aboutit à la condition

$$(6) \quad \frac{v_1[k_1 w_1(x)]}{v_1(k_1)} = \frac{w_1[k_2 v_1(x)]}{w_1(k_2)}$$

où l'on a posé $a = \varphi_{k_1}^{k_1''}(A) = \varphi_{k_2}^{k_2''}(B$.

On est donc ramené à un problème de même nature sur l'équation (5).

Nous avions annoncé au paragraphe VIII que nous démontrerons le théorème suivant:

Le systéme

$$\begin{cases} f(x+y) = f(x)+f(y), \\ f(xy) \quad = f(y).f(y) \end{cases}$$

n'admet pas d'autre solution que $f(x) = x$.

Remarquons qu'on a $f(x) = x$ lorsque x est un nombre rationnel, ceci résulte de $f(1) = 1$ et de $f(nx) = nf(x)$ lorsque n est rationnel.

Si $P(x)$ est un polynôme entier à coefficients entiers on a

$$f[P(x)] = P[f(x)]\ k,$$

donc si x est racine de $P(x) = 0$, $f(x)$ est aussi une racine de cette équation.

De même si $P(x, y)$ est un polynôme à coefficients entiers et à deux variables, si x est racine de

$$P(x, y) = 0, \qquad f(x) \text{ sera racine de } \qquad P[X, f(y)] = 0$$

Soit a_1 un nombre quelconque et $f(a_1) = A_1$, supposons $a_1 \neq A_1$ par exemple $a_1 < A_1$, entre a_1 et A_1 intercalons un nombre rationnel u. Soit x une racine de

$$x^2 - u + a_1 = 0$$

qui a ses deux racitnes réelles, $f(x)$ doit être racine de

$$[f(x)]^2 - u + A_1 = 0;$$

mais cette équation n'a pas de racines réelles, or $f(x)$ doit être réel, il y a donc impossibilité et la seule solution du système proposé est $f(x) = x$.

A. ROSENBLATT.

Sur un lemme de choix et son application à la théorie du potentiel.

Introduction.

Dans une Note présentée par M. Levi—Civita à l'Académie dei Lincei [1]) j'ai donné une extension du concept de potentiel newtonien aux ensembles de points mesurables et bornés de l'espace. Ces ensembles étant supposés homogènes le potentiel newtonien de l'ensemble E situé dans l'espace R_3 rapporté aux coordonnées x, y, z s'exprime par l'intégrale

$$(1) \quad J = \frac{1}{2} \int dx'\, dy'\, dz' \int dx\, dy\, dz\, \frac{1}{r},$$

r étant la distance des deux points $P(x, y, z)$, $P'(x', y', z')$ et l'intégration étant étendue à l'ensemble E.

J'ai donné, dans la Note citée, un aperçu très bref de la démonstration du théorème de Liapounoff,[2]) démonstration qui fait l'objet d'un travail étendu qui doit paraitre dans le Bulletin de l'Académie polonaise des sciences [3]). Il s'agit du théorème d'après lequel le maximum de l'intégrale (1) est atteint par la sphère de volume égal à la mesure de l'ensemble E et seulement par la sphère, à un ensemble de points de mesure nulle près que l'on peut ajouter ou soustraire à la sphère.

[1]) Dans la Séance du 18 Janvier 1920.

[2]) Dans une Note: Über eine isoperimetrische Aufgabe und ihre physikalischen Anwendungen" Mathematische Zeitschrift 6.3, 1919. M, Carleman a donné une démonstration du théoreme de Liapounoff pour des corps limités par des surfaces continues.

[3]) Dans le Bulletin des Sciences Mathématiques doit paraître un travail qui contient les points essentiels de cette démonstration.