Pour terminer l'énumération des propriétés de la surface (10), je ferai observer que cette surface rentre dans la classe de surfaces d'équation

$$e^z \cos x \cos y = \text{const.},$$

qui appartiennent à un des premiers systèmes triples orthogonaux connus: d'où découle une nouvelle méthode de détermination de ses lignes de courbure.

**6.** Le problème que je m'étais proposé au deuxième paragraphe est donc complètement résolu, puisque j'ai obtenu diverses solutions particulières, dépendant d'ailleurs de constantes arbitraires, ce qui n'était pas nécessaire. Il est possible de prendre pour la solution particulière $(S_0)$ l'une des surfaces simples et remarquables qui ont été signalées plus haut. Je choisirai, par exemple, la solution (7); elle est susceptible d'être mise sous la forme

$$\bar{\omega} = a \frac{1-uv}{uv+1} \log \frac{uv-1}{\sqrt{uv}},$$

qu'il est possible d'obtenir directement d'ailleurs à partir de l'expression (2). Pour éviter l'introduction d'imaginaires dans l'équation des surfaces minima, j'utiliserai les coordonnées $u$ et $v$, et non les coordonnées $\varphi$ et $\psi$. Dans ces conditions, l'équation générale des surfaces $(S)$ cherchées prend la forme

$$-\frac{\bar{\omega}}{a} = \frac{uv-1}{uv+1} \log \frac{uv-1}{\sqrt{uv}} + U' + V' - \frac{2(vU+uV)}{uv+1},$$

dans laquelle $U(u)$ et $V(v)$ désignent deux fonctions arbitraires de chacune des variables $u$ et $v$, et $U'$, $V'$ leurs dérivées.

---

STANISŁAW RUZIEWICZ.

# O niestosowalności zasadniczego twierdzenia Rachunku całkowego do funkcyj, mających pochodne nieskończone.

(Sur l'inapplication du théorème fondamental du calcul intégral aux fonctions à derivées infinies

Powszechnie znane jest t. zw. zasadnicze twierdzenie Rachunku całkowego, że jeśli dwie funkcje mają w przedziale $(a, b)$ wszędzie skończone pochodne i jeśli te pochodne w każdym punkcie są sobie równe, to funkcje różnią się o liczbę stałą.

Pytanie, czy warunek skończoności pochodnych jest istotny dla prawdziwości tego twierdzenia, rozstrzygnął H. Hahn, podając klasę funkcyj, mających wszędzie w danym przedziale równe pochodne, w której różnica dwóch funkcyj nie jest stała w tym przedziale. [1])

Celem niniejszego artykułu jest podanie innej klasy funkcyj o wyżej wymienionej własności.

Na odcinku $(0, \lambda)$, $\lambda \geqslant 1$, zakreślamy dokoła środka jego półkole o promieniu $= \frac{1}{6}$, dokoła środków odcinków pozostałych $\left(\text{tj. } \left(0, \frac{\lambda}{2} - \frac{1}{6}\right), \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{6}, 1\right)\right)$ półkola o promieniach $\frac{1}{2.3^2}$, następnie dokoła środków pozostałych odcinków półkola o promieniach $\frac{1}{2.3^2}$ i t. d. Punkty końcowe połówek kół wraz z punktami skupienia ich utworzą zbiór doskonały $P_\lambda$ nigdziegęsty o mierze $= \lambda - 1$.

Określmy teraz dla każdej wartości $\lambda \geqslant 1$ w przedziale $(0, \lambda)$ funkcję $f_\lambda(x)$, kładąc przy danem $\lambda$:

---

[1]) Monatshefte f. Math., 16 (1905), S. 161.

$f_\lambda(x) = 0$ dla punktów $x$, należących do $P_\lambda$,

oraz $f_\lambda(x) =$ rzędnej punktu półkola, którego odcięta wynosi $x$, dla punktów $x$, nie należących do $P_\lambda$.

Połóżmy dla $0 \leqslant x \leqslant \lambda$:

$$y_\lambda(x) = \int_0^x f_\lambda(t)\,dt.$$

Z najprostszych własności całek oraz z definicji funkcyj $f_\lambda$ wynika, że $y_\lambda$ jest dla każdej wartości $\lambda \geqslant 1$ funkcją ciągłą, stale rosnącą, o pochodnej $f_\lambda(x)$, tudzież, że zachodzi również

$$y_\lambda(\lambda) = y_1(1)$$

i że równość

$$y_\lambda(x) = y_{\lambda'}(x')$$

pociąga za sobą równość

$$f_\lambda(x) = f_{\lambda'}(x') \quad (\lambda \geqslant 1,\ \lambda' \geqslant 1,\ 0 \leqslant x \leqslant \lambda,\ 0 \leqslant x' \leqslant \lambda').$$

Odwracając całkę, dostajemy:

$$x_\lambda = F_\lambda(y);$$

funkcja $F_\lambda(y)$ jest dla każdego $\lambda \geqslant 1$ w przedziale $\left(0, \int_0^1 f_1(t)\,dt\right)$ jednoznacznie określona, ciągła i stale rosnąca.

W punktach, które przy odwzorowaniu jednoznacznem i ciągłem $y_\lambda$ są obrazami zbioru doskonałego $P_\lambda$, (które tworzą znów zbiór doskonały), funkcja $F_\lambda$ posiada pochodną $= +\infty$. Ze względu bowiem na wzrost funkcji $F_\lambda$ każda z pochodnych Diniego jest nieujemna; gdyby jedna z nich miała skończoną wartość $= a$, istniałby dla funkcji odwrotnej, t. j. dla $y_\lambda(x)$, ciąg $x_n$, zmierzający do $x$, należącego do $P_\lambda$, taki, dla którego stosunek

$$\frac{y_\lambda(x) - y_\lambda(x_n)}{x - x_n}$$

w razie $a \neq 0$ zmierzałby do wartości $\frac{1}{a}$, w razie $a = 0$ wzrastałby nieograniczenie, co wobec

$$Dy_\lambda(x) = 0$$

nie może zachodzić.

Obieramy dla $\lambda = 1$ wartość $x_0$, dla której $f_1(x_0) \neq 0$.



Równość

$$\int_0^{x_0^{(\lambda)}} f_\lambda(t)\,dt = \int_0^{x_0} f_\lambda(t)\,dt$$

pociąga za sobą równość

$$f_\lambda(x_0^{(\lambda)}) = f_1(x_0).$$

Funkcje $F_\lambda$ mają tam pochodne:

$$F_\lambda'(y)_{y=\int_0^{x_0} f_1(t)\,dt} = \frac{1}{f_\lambda(x^{(\lambda)})} = \frac{1}{f_1(x_0)}.$$

Dla każdej wartości $\lambda \geqslant 1$ istnieją więc wszędzie w przedziale $\left(0, \int_0^1 f_1(t)\,dt\right)$ pochodne funkcji $F_\lambda(y)$ i są sobie równe.

Że dla różnych wartości $\lambda$ funkcje nie różnią się o stałą, wynika stąd, że

$$F_\lambda(0) = 0,$$

zaś

$$F_\lambda\left(\int_0^1 f_1(t)\,dt\right) = F_\lambda\left(\int_0^\lambda f_1(t)\,dt\right) = \lambda.$$