ALFRED ROSENBLATT.

Remarque à la Note précédente.

Uwaga do poprzedzającego artykułu.

Nous avons supposé dans la Note précédente que le continu C' jouissait de la propriété suivante: Il existe un nombre $\tau > 0$ tel que tout point $\bar{A}'$ situé à l'intérieur d'un intervalle

$$| y_i - \eta_i | < \tau, \tag{1}$$

dont le centre A' a les coordonnées η_i peut être réuni à A' par une courbe continue située à l'intérieur de (1). Nous pouvons généraliser ce résultat de de la manière suivante.

Supposons qu' à tout nombre $\eta > 0$ arbitrairement petit on peut trouver un autre nombre $\tau > 0$ plus petit que η et tel que tout point $\bar{A}'$ situé dans l'intervalle (1) peut être réuni au centre par un continu $C'(A', \bar{A}')$ situé tout entier à l'intérieur de l'intervalle

$$| y_i - \eta_i | < \eta. \tag{2}$$

Choisissons alors ρ', σ' de manière à satisfaire aux inégalités

$$\rho' \leqq \frac{\tau}{Qn}, \quad \sigma' \leqq \frac{\rho'}{2R} \tag{3}$$

et envisageons le domaine $I'\left(\frac{\sigma'}{2}\right)$. Nous avons en procédant comme au paravant

$$| \eta_i(A') - \eta_i(\bar{A}') | < \tau. \tag{4}$$

Mais on peut réunir les points A', $\bar{A}'$ par un continu situé à l'intérieur de l'intervalle (2). Soit $C'(A', \bar{A}')$ ce continu. Choisissons

$$\eta < \frac{\sigma}{2}, \quad \sigma \leqq \frac{\rho}{2R}. \tag{5}$$

Alors comme les continus C', C sont en correspondance uniunivoque et continue, au continu $C'(A', \bar{A}')$ correspond un continu $C(A, A)$ qui relie les points A, A. D'autre part à l'intervalle (2) correspond un domaine des x situé tout entier à l'intérieur de l'intervalle

$$| x_i - \xi_i(A) | < \frac{\rho}{2}. \tag{6}$$

Donc, dans la même correspondance, au continu $C'(A' \bar{A}')$ correspond un continu C situé à l'intérieur de (6). On peut ainsi trouver un nombre positif $\delta > 0$ tel que la distance minimum de C du bord de l'intervalle (6) soit $> \delta$.

D'autre part, si l'on choisit un nombre ε suffisamment petit, on peut trouver une suite de points $a'_1, a'_2, \ldots, a'_m$, qui appartiennent tous au continu $C'(A', \bar{A}')$ et qui possèdent la propriété suivante. La distance de deux points consécutifs est moindre que ε, et la distance des points a_i, a_{i+1} qui leur correspondent sur le continu $C(A, \bar{A})$ est moindre que δ. Ensuite le point a'_1 coïncide avec le point A' et le point a'_m avec le point $\bar{A}'$. Il existe alors certainement un premier point a'_k tel que le point a_k qui lui correspond sur le continu $C(A, \bar{A})$ soit à l'intérieur de l'intervalle (6) et que le point a'_{k+1} ait son correspondant a_{k+1} situé sur le bord ou en dehors de l'intervalle (6). Si l'on a $k = m$, un tel point n'existe pas. Mais le point a_k est situé aussi sur le continu C qui correspond au continu $C'(A', \bar{A}')$ dans la représentation de l'intervalle (2) sur un domaine intérieur à l'intervalle (6). Donc la distance de a_k du bord de l'intervalle (6) est plus grande que δ, ce qui n'est pas possible, si a_{k+1} n'est pas à l'intérieur de cet intervalle, excepté si l'on a $k = m$.

Donc le point $\bar{A}$ se trouve à l'intérieur de l'intervalle (6) et on arrive á la même conclusion que dans la Note précédente.

Or la propriété du continu C' n'est rien d'autre que le „Zusammenhang im Kleinen" de M. Hahn[1]. D'après M. Hahn cette propriété est nécessaire et suffisante pour qu'un continu plan soit une courbe continue c'est à dire une image continue d'un intervalle de droite. D'ailleurs, si cette propriété est remplie pour chaque point de C', elle est remplie uniformément. En effet, dans le cas contraire il y aurait une suite de points $P_1, P_2, \ldots$, tendant vers un point P et un nombre positif η qui possède la propriété suivant. Il existe une suite de nombres positifs $\tau_1, \tau_2, \ldots$, tendant vers zéro et tels que si l'on entoure le point P_j d'un intervalle (1) où $\tau = \tau_j$, il se trouve à l'intérieur de cet intervalle un point $\bar{P}_j$ que l'on ne peut relier au point P_j par un continu situé à l'intérieur de l'intervalle (2). Mais si j est suffisamment grand, la suite $P_j, P_{j+1}, \ldots$, sera située à l'intérieur de l'intervalle

[1]) „Über die allgemeinste ebene Punktmenge, die stetiges Bild einer Strecke ist". Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung, 1914. Vol. 23.

$$| y_i - \eta_i(P) | < \tau(P) \tag{7}$$

tel que tout point de cet intervalle peut être réuni au point P par un continu situé à l'intérieur de l'intervalle

$$| y_i - \eta_i(P) | < \frac{\eta}{2}. \tag{8}$$

Mais alors on peut réunir les deux points $P_j, \bar{P}$ au point P par deux continus $C(P_j, P)$ et $C(\bar{P}_j, P)$ situés chacun à l'intérieur de l'intervalle (8). Donc, pourvu que j soit suffisamment grand, il existe un continu $C(P_j, \bar{P}_j)$é reliant P_j à $\bar{P}_j$ et situé à l'intérieur de l'intervalle (8) qui est lui-même situ à l'intérieur de l'intervalle

$$| y_i - \eta_i(P_j) | < \eta. \tag{9}$$

Cette contradiction établit le théorème.