ALFRED ROSENBLATT.

Un théorême sur l'inversion des fonctions de variables réelles.

Twierdzenie o odwracaniu funkcji zmiennych rzeczywistych.

---

1. Quand il s'agit dans le Calcul des Variations de démontrer qu'une extrémale donnée du problème envisagé peut être entourée d'un champ d'extrémales, on emploie un théorême des fonctions de variables réelles que l'on peut énoncer de la manière suivante.

Soient données n fonctions

$$y_i = f_i\,(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad i = 1, 2, \ldots n \tag{1}$$

continues à dérivées partielles continues dans un domaine[1]) R. Supposons de plus que ce domaine possède dans son intérieur un continu D tel que le continu D' qui lui correspond d'après les formules (1) dans l'espace des y corresponde à D uni univoquement. Alors, si A, A' sont deux points dont l'un est situé dans D, l'autre dans D', les coordonnées du point A sont des fonctions continues des coordonnées de D.

Envisageons alors le déterminant fonctionnel des fonctions f_i

$$\Delta = \frac{D\,(f_1, \ldots, f_n)}{D\,(x_1, \ldots, x_n)} \tag{2}$$

et supposons le différent de zéro dans le continu D, p. ex. positif. On peut alors évidemment trouver un nombre positif ρ tel que si l'on entoure chaque point A de D d'un intervalle

---

[1]) C'est à dire dans un ensemble E de points dont chacun est un point intérieur et dont deux points peuvent être réunis par un continu (ensemble fermé, enchaîné) appartenant à cet ensemble.

$$| x_i - \xi_i | < \rho, \qquad i = 1, 2, \ldots n$$

de centre A, les ξ_i étant les coordonnées de A, la valeur de Δ est supérieure à un nombre positif P dans le domaine[1] formé par les points intérieurs aux intervalles. Soit $I(\rho)$ ce domaine.

Au domaine $I(\rho)$ correspond un ensemble E' de points dans l'espace des y qui est aussi un domaine $I'(\rho)$. En effet, à chaque point intérieur au domaine $I(\rho)$ correspond un point intérieur à l'ensemble E' et deux points A', B' de l'ensemble E' peuvent être réunis par un continu qui appartient à cet ensemble, car deux points A, B dont les correspondants sont A', B' peuvent être réunis par un continu intérieur à $I(\rho)$. Donc il existe un nombre positif σ tel que les intervalles

$$| y_i - \eta_i | < \sigma, \qquad i = 1, 2, \ldots n$$

autour des points A' de coordonnées η_i du continu I' comme centres soient situés à l'intérieur de $I'(\rho)$.

Le théorême en question affirme que, pourvu que les nombres ρ, σ soient suffisamment petits, il existe un ensemble de n fonctions continues à dérivées partielles continues

$$x_i = \varphi_i(y_1, \ldots y_n) \tag{3}$$

dans le domaine $I'(\sigma)$ et que à tout point de $I'(\sigma)$ ne correspond qu'un point de $I(\rho)$ savoir le point donné par ces fonctions[2].

2. Or dans les applications de ce théorême au Calcul des variations, quand il s'agit de démontrer qu'une extrémale donnée donne à l'integrale envisagée une valeur minimum parmi toutes les courbes qui lient les deux mêmes points, la connaissance de l'existence des deux nombres ρ, σ dont il a été question suffit. Mais, quand les courbes de comparaison peuvent avoir leurs extrémités variables sur des courbes ou, dans le ces des courbes gauches, sur des surfaces données, on a souvent besoin de savoir que des limites inférieures positives des nombres ρ, σ existent qui sont fonctions de la valeur minimum P du déterminant fonctionnel (2) dans le domaine R et de valeur maximum Q des dérivées partielles $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ dans ce même domaine. Lorsque le continu D se déplace tout en restant dans un continu situé

[1]) Il est évident qui cet ensemble de points forme un domaine.

[2]) O. Bolza: „Ein Satz über eindeutige Abbildung und seine Anwendung in der Variationsrechnung". Mathematische Annalen 63. et „Vorlesungen über Variationsrechnung".

à l'intérieur du domaine R et lorsque l'on suppose de plus que les fonctions (1) peuvent dépendre de certains paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$ qui varient dans une certaine région S, on peut assigner des limites inférieures à ρ et à σ.

Au moyen de ce théorême on peut traiter le cas de l'extrémum libre, lorsque l'extrémale envisagée est tangente à la courbe transversale[1]. On peut par la même méthode résoudre la question des conditions suffisantes dans le problème isopérimétrique, lorsque les extrémités de la courbe peuvent se déplacer sur des courbes transversales. Le même théorême permet de résoudre complètement la question des conditions suffisantes dans le cas d'une extrémale gauche dans le cas des extrémités variables sur des courbes gauches.

On sait que si l'on suppose que les fonctions (1) possèdent des dérivées partielles du premier ordre on peut démontrer au moyen de la méthode des approximations successives[2] l'existence de deux nombres ρ, σ qui ont la propriété suivante. Soient x_i^0, y_j^0 des valeurs des variables x_i, y_j qui satisfont aux équations (1). Il y a un et un seul système de fonctions (3) égales aux x_i^0 pour $y_j = y_j^0$ et à toute valeur des y_j de l'intervalle $| y_j - y_j^0 | < \sigma$ correspond une valeur unique des x_i de l'intervalle $| x_i - x_i^0 | < \rho$ savoir celle donnée par les fonctions (3).

En supposant ce qui est évidemment permis $x_i^0 = y_j^0 = 0$ écrivons le système d'équations

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_0 = \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_0 - f_i(x_1, \ldots, x_n) + y_i, \quad i = 1, 2, \ldots n \tag{4}$$

équivalent au système (3). Appelons $\varphi_i(x_1, \ldots x_n, y_i)$ les membres à droite de ces équations. En les résolvant par rapport aux x_j qui figurent à gauche on a

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} \pm \varphi_i \left[\frac{\dfrac{D(f_1, .., f_{i-1}, f_{i+1} .., f_n)}{D(x_1, .., x_{j-1}, x_{j+1} .., x_n)}}{\dfrac{D(f_1, \ldots, f_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)}} \right]_0 = F_j(x_1, .., x_n, y_1, .., y_n). \tag{5}$$

Formons maintenant la suite des approximations successives

[1]) A. Rosenblatt; „Sur les problèmes du calcul des variations dans lesquels les limites de la ligne d'intégration sont variables". A paraître dans le Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie 1919.

[2]) É. Gonrsat: „Sur la théorie des fonctions implicites". Bulletin de la Société Mathématique de France 1903.

$$x_j^1 = F_j(0, \ldots, 0, y_1, \ldots, y_n),$$

$$x_j^m = F_j(x_1^{m-1}, \ldots, x_n^{m-1}, y_1, \ldots, y_n), \quad m = 2, 3, \ldots$$

On a

$$x_j^1 = \sum_{i=1}^{n} \pm y_i \left[\frac{\dfrac{D(f_1, \ldots, f_{i-1}, f_{i+1} \ldots, f_n)}{D(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1} \ldots, x_n)}}{\dfrac{D(f_1, \ldots, f_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)}} \right]_0 .$$

Donc si l'on suppose dans le domaine $|x_j| < \rho$ les inégalités remplies

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right| < Q, \quad \frac{D(f_1, \ldots, f_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)} > P > 0$$

on a

$$|x_j^1| < \frac{Q^{n-1} n!}{P} \operatorname{Max} |y_i| .$$

On aura donc certainemeut

$$|x_j^1| < \rho$$

pourvu que l'on ait

$$|y_i| < \sigma = \frac{P\rho}{Q^{n-1} n!} = \frac{\rho}{R}, \tag{6}$$

$$R = \frac{Q^{n-1} n!}{P} .$$

On a ensuite en supposant

$$|x_j^{m-1}| < \rho$$

$$|x_j^m - x_j^1| < \sum_{i=1}^{m} \left| \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \right|_\xi |x_j^{m-1}|$$

les ξ_j étant en valeur absolue plus petits que les x_j^{m-1}. Puisque l'on a

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_0 - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$

les dérivées $\dfrac{\partial F_j}{\partial x_i}$ tendent uniformément vers zéro avec les x_i, mais pour pouvoir établir des formules numériques donnant σ il faut connaître des limites supérieures des différences

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_0 - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$

en fonction des maxima des $|x_j|$.

Si l'on suppose la condition de Lipschitz

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} - \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_0 \right| < T \sum_{j=1}^{n} |x_j|$$

vérifiée, ce qui arrive nécessairement si les f_i ont des dérivées secondes moindres en valeur absolue à un nombre $T > 0$ dans le domaine $|x_j| < \rho$, on a

$$|x_j^m - x_j^1| < \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \left| \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \right|_\xi \frac{Q^{n-1}(n-1)!}{P} |x_i^{m-1}|$$

$$< \frac{(n-1)!\, Q^{n-1}}{P} n^2 T . n\rho \operatorname{Max} |x_i^{m-1}| < \frac{\rho}{N} \operatorname{Max} |x_i^{m-1}|$$

en posant

$$N = \frac{P}{T_n^3 (n-1)!\, Q^{n-1}}$$

Si l'on suppose

$$|x_j^1| < \frac{\rho}{2}$$

ce qui arrive si l'on a

$$\sigma < \frac{\rho}{2R}, \tag{7}$$

alors on a

$$|x_j^2 - x_j^1| < \frac{\rho}{N} \cdot \frac{\rho}{2}$$

et si l'on a de plus

$$\rho < \frac{N}{2}, \tag{8}$$

on a

$$|x_j^2| < |x_j^1| + \frac{\rho}{4} < \rho,$$

$$|x_j^3| < |x_j^1| + \frac{\rho}{N} \cdot |x_j^2| < \frac{\rho}{2} + \frac{\rho}{2} = \rho \quad \text{etc.}$$

Donc tous les $|x_j^{m-1}|$ sont en valeur absolue inférieurs à ρ.

Nous avons ensuite la suite des inégalités

$$|x_j^m - x_j^{m-1}| < \sum_{i=1}^{m} \left| \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \right|_\xi |x_i^{m-1} - x_i^{m-2}| < \frac{\rho}{N} \operatorname{Max} |x_i^{m-1} - x_i^{m-2}|$$

$$m = 2, 3 \ldots$$

Donc la série des approximations successives

$$| x_j^1 | + | x_j^2 - x_j^1 | + | x_j^3 - x_j^2 | + \ldots .. \tag{9}$$

est uniformément convergente et représente une fonction continue x_j. Les fonctions x_j satisfont aux équations (1) et possèdent des dérivées premières continues.

Pour montrer qu'il n'y a pas d'autres valeurs x_i satisfaisant aux équations (1) que celles données par les approximations successives, supposons qu'il y ait des valeurs X_i telles que l'on ait

$$y_i = f_i (X_1, \ldots, X_n).$$

Alors on a

$$X_j = F_j (X_1, \ldots, X_n, y_1, \ldots, y_n),$$

mais on a

$$x_j^m = F_j (x_1^{m-1}, \ldots, x_n^{m-1}, y_1, \ldots, y_n).$$

Donc nous avons

$$| X_j - x_j^m | < \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \right|_\xi | X_i - x_i^{m-1} | < \frac{\rho}{N} \text{ Max } | X_i - x_i^{m-1} |,$$

donc

$$| X_j - x_j^m | < \left(\frac{\rho}{N}\right)^m \text{Max } | X_i |,$$

$$X_j = \lim x_j^m = x_j. \tag{10}$$

Donc pourvu que l'on ait

$$\rho < \frac{N}{2}, \qquad \sigma < \frac{\rho}{2R}, \tag{11}$$

les nombres ρ, σ satisfont aux conditions énoncées au début de la démonstration.

3. Entourons alors chaque point du continu D par un intervalle

$$| x_i - \xi_i | < 2\rho', \tag{12}$$

ρ' étant égal à $\frac{\sigma}{2Qn}$. Chaque point du domaine $I(\rho')$ peut alors être entouré d'un intervalle

$$| x_i - \xi_i | < \rho'$$

situé à l'intérieur du domaine $I(2\rho')$. Puisque l'on a

$$y_i - y_i^0 = f_i (x_1, \ldots, x_n) - f_i (x_1^0, \ldots, x_n^0) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_\xi (x_j - x_j^0)$$

les ξ ètant égaux à $x_i^0 + \Theta (x_i - x_i^0)$, $0 < \Theta < 1$, on a

$$| y_i - y_i^0 | < \sigma, \tag{13}$$

pourvu que x_j, x_j^0 soient dans un même intervalle. On peut d'ailleurs supposer $\rho' < \frac{\rho}{2}$ en prenant pour Q un nombre suffisamment grand. On a donc

$$\rho' = \frac{\sigma}{2Qn} < \frac{\rho}{4RQn} < \frac{N}{8RQn}$$

Au domaine $I(\rho')$ correspond un domaine $I'(\rho')$ dans l'espace des y tel que ce domaine soit à l'intérieur du domaine $I'\left(\frac{\sigma}{2}\right)$,

$$| y_i - \eta_i | < \frac{\sigma}{2}, \tag{14}$$

les η_i étant les coordonnées des points du continu D'.

Soit maintenant σ' un nombre satisfaisant aux inégalités

$$\sigma' < \sigma, \quad \sigma' < \frac{\rho'}{2R}.$$

Envisageons un point P' du domaine $I'\left(\frac{\sigma'}{2}\right)$. Il y a au moins un point A' situé sur le continu D' et tel que l'on ait l'inégalité

$$| y_i - \eta_i | < \frac{\sigma'}{2}. \tag{15}$$

Au point A' correspond un point A sur D et ce point est l'unique point situé sur D qui correspond au point A'. Si ξ_i sont les coordonnées du point A, alors puisque l'on a

$$\frac{\sigma'}{2} < \frac{\rho'}{2} \cdot \frac{1}{2R},$$

dans le domaine

$$| x_i - \xi_i | < \frac{\rho'}{2}, \tag{16}$$

il y a un et un seul point P qui correspond au point P'. A l'intervalle (15) correspond un domaine situé tout à intérieur du domaine (16).

Supposons maintenant qu'au point P' puisse correspondre un autre point $\overline{P}$ dans le domaine $I\left(\frac{\rho'}{2}\right)$. Puisque le point A' est situé dans l'intervalle

$$| y_i - y_i (P') | < \frac{\sigma'}{2},$$

donc dans l'intervalle

$$| x_i - x_i(P) | < \frac{\rho'}{2}$$

autour du point $\bar{P}$ il y a un et un seul point $\bar{Q}$ qui correspond au point A' tel que l'on ait

$$| x_i(\bar{Q}) - x_i(\bar{P}) | < \frac{\rho'}{2}.$$

Or le point $\bar{P}$ est situé à l'intérieur d'un intervalle $I\left(\frac{\rho'}{2}\right)$ de centre $\bar{A}$ sur D,

$$| x_i(\bar{P}) - \xi_i(\bar{A}) | < \frac{\rho'}{2}, \tag{18}$$

donc on a

$$| x_i(\bar{Q}) - \xi_i(\bar{A}) | < \rho'. \tag{19}$$

Par suite au point $\bar{A}$ correspond sur le continu D' un point $\bar{A}'$ tel que l'on ait l'inégalité

$$| \eta_i(\bar{A}') - \eta_i(A') | < \frac{\sigma}{2}. \tag{20}$$

Donc il correspond au point A' un et un seul point dans l'intervalle

$$| x_i - \xi_i | < \frac{\rho}{2}, \tag{21}$$

autour du point A. Mais si l'on mène une courbe continue

$$y_i = y_i(t), \qquad t_1 \leqslant t \leqslant t_2, \tag{22}$$

allant du point A' au point $\bar{A}'$ et située toute entière sur le continu D', en supposant le continu D', tel que cela soit possible, alors, comme la correspondance entre D' et D est continue, il y a une courbe continue

$$x_i = x_i(t), \qquad t_1 \leqslant t \leqslant t_2, \tag{23}$$

unique allant du point A au point $\bar{A}$. Pour des valeurs de $t - t_1$ suffisamment petites la courbe (22) reste à l'intérieur du domaine

$$| y_i - \eta_i(A') | < \frac{\sigma}{2}, \tag{24}$$

donc la courbe (23) est identique à la courbe unique située dans le domaine (21) et qui correspond à la courbe (22) dans la correspondance des deux do-

maines. Mais, si la courbe (22) reste toute entière à l'intérieur du domaine (24), alors la courbe (23) reste aussi toute entière à l'intérieur du domaine (21).

On a donc l'inégalité

$$| \bar{\xi}_i - \xi_i | < \frac{\rho}{2}, \tag{25}$$

re qui donne

$$| x_i(\bar{P}) - \xi_i | < \frac{\rho}{2} + \frac{\rho'}{2} < \rho. \tag{26}$$

Mais on a $\rho < \frac{N}{2}$, donc dans l'intervalle de centre A

$$| x_i - \xi_i | < \rho,$$

il n'y a que le seul point P qui correspond au point $\bar{P}$!

On a ainsi

$$\bar{P} \equiv P.$$

Si au point A' sur D' il n'y a que le point A seul qui puisse correspondre dans le domaine $I\left(\frac{\rho'}{2}\right)$, alors on a

$$\bar{Q} \equiv A,$$

donc

$$| x_i(\bar{P}) - \xi_i(A) | < \frac{\rho'}{2}.$$

On a de suite

$$\bar{P} \equiv P'.$$

Nous voyons donc que pour pouvoir démontrer l'unicité des fonctions (3) dans tout le domaine $I'\left(\frac{\sigma'}{2}\right)$ il faut supposer la propriété suivante remplie par le continu D'. Il existe un nombre $\tau > 0$ tel que chaque point de la partie de D' qui est située à l'intérieur du domaine de centre A'

$$| y_i - \eta_i | < \tau,$$

puisse être lié à A' par une courbe situeé toute entière à l'intérieur du domaine envisagé. Si D' est p. ex. une courbe continue à tangente continue et sans points doubles, la propriété précédente est remplie par cette courbe. Il faut d'ailleurs prendre $\frac{\sigma}{2} < \tau$.

4. Supposons maintenant que nos équations contiennent k paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ et que les tonctions f_i possèdent per rapport à ces paramètres les mêmes propriétés que par rapport aux x_i. On a donc le système

$$y_i = f_i(x_1 \ldots x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_k), \quad i = 1, 2, \ldots n. \tag{27}$$

On peut adjoindre à ce système les k équations

$$\lambda_j = \lambda_j, \qquad j = 1, 2, \ldots k$$

et résoudre ces équations par rapport aux x_i et aux λ_j. Alors on voit que les mêmes conclusions que celles obtenues précédemment subsistent, si l'on remplace n par $n+k$. Il existe un nombre σ dont on peut calculer une limite inférieure tel que les fonctions inverses

$$x_i = \varphi_i(y_1 \ldots y_n; \lambda_1 \ldots \lambda_k), \tag{28}$$

existent et sont uniques dans le domaine $I'(\sigma)$ formé par les intervalles autour des points du continu D' dans l'espace des y_i, λ_j qui correspond uniunivoquement au continu D de l'espace de x_i, λ_j.

STRESZCZENIE.

Liczne są przypadki w Rachunku warjacyjnym, gdy nie można znaleść pola krzywych ekstremalnych, do których należy krzywa uważana E_0 i które obejmuje każdą krzywą C „dozwoloną", t. j. krzywą porównawczą, dostatecznie blizką do krzywej danej. Zachodzi to przedewszystkiem, gdy końce krzywej C mogą poruszać się po krzywych lub (w przestrzeni) po powierzchniach z góry zadanych, np. zachodzi to na płaszczyźnie, gdy krzywa E_0 styczna jest do krzywej K, po której początek krzywych porównawczych się porusza [1].

W tych przypadkach oddaje usługę twierdzenie, którem zajmuje się niniejsza praca. Niechaj będą dane funkcje

$$y_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad i = 1, 2, \ldots n \tag{1}$$

ciągłe o pochodnych ciągłych. Jeżeli funkcje te odwzorowują kontynuum C w przestrzeni x-ów na kontynuum C' w przestrzeni y-ów jednoznacznie, natenczas przy pewnych założeniach można znaleść dwie liczby ρ', σ' tak że zbiór wnętrzy przedziałów

$$| y_i - \eta_i | < \sigma', \tag{2}$$

[1]) Por. pracę moją: „Sur les problèmes du Calcul des variations dans lesquels les extérmités de la ligne d'intégration sont variables". Bulletin de l'Académie des Sciences Cracovie. Mai 1919.

otaczających punkty kontynuum C', odwzorowuje się jednoznacznie i ciągle na obszar położony wewnątrz przedziałów

$$| x_i - \xi_i | < \rho',$$

otaczających punkty ξ_i kontynuum C. Liczby ρ', σ' dadzą się wyrazić explicite w zależności od górnych i dolnych granic pochodnych funkcji f_i. Nadto zależą od natury kontynuów C i C'. Twierdzenie i jego dowód ważne są dla kontynuów C i C', które są krzywemi ciągłemi, a więc jednoznacznem i ciągłem odwzorowaniem odcinka prostej. Istnienie samo liczb ρ', σ, łatwo udowodnić (np. Bolza, Variationsrechnung) dla dowolnych kontynuów.

Przypuśćmy, że kontynuum C zależy w ciągły sposób od pewnego parametru a, tak że istnieje jednojednoznaczna i ciągła odpowiedniość pomiędzy punktami dwóch kontynuów C_1, C_2 należących do wartości a_1, a_2 parametru a. Niechaj odległość pomiędzy odpowiadającemi sobie punktami P_1, P_2 na tych obu kontynuach zmierza jednostajnie wraz z $| a_1 - a_2 |$ do zera. Wówczas również istnieją liczby ρ', π' niezależne od a. To twierdzenie, którego dowód jest bardzo prosty, oddaje usługi w Rachunku warjacyjnym, gdy wystarcza znać istnienie tych dwóch liczb.
