ANTONI PLAMITZER.

Über mehrdeutige Verwandtschaften auf unikursalen Trägern.

O wieloznacznych odpowiedniościach na jednobieżnych podstawach.

Die vorliegende Abhandlung zerfällt in drei Teile. Im ersten Teile stelle ich allgemeine Sätze über $[n_1, n_2]$-deutige Verwandtschaften zwischen den Elementen zweier unikursaler Gebilde. Gleichzeitig bespreche ich entsprechende Sätze über kollokale mehrdeutige Korrespondenzen. Im zweiten Teile untersuche ich die Plan-, Raumkurven, abwickelbare und windschiefe Regelfächen vom $(n_1-1)(n_2-1)$-ten Geschlechte, als Erzeugnisse solcher Verwandtschaften. Der dritte Teil enthält endlich die Eigenschaften der Treffgeradenkomplexe homologer Strahlen $[n_1, n_2]$-deutiger Korrespondenzen auf unikursalen Trägern. Aus den vorliegenden Untersuchungen ergeben sich sofort entsprechende Sätze[1] uber zwei projektive Involutionen n_1-ten und n_2-ten Grades erster Stufe, denn solche Involutionen eine spezielle Verwandtschaft $[n_1, n_2]$ bilden.

I. Sätze über $[n_1, n_2]$-deutige Verwandtschaften.

1. Befinden sich die Punkte einer unikursalen Raumkurve R^{ν_1} ν_1-ter Ordnung und die Ebenen eines unikursalen Torsus T_{ν_2} ν_2-ter Klasse in einer $[n_1, n_2]$-deutiger Verwandtschaft, so kann man fragen, wie oft ein Punkt dieser Kurve in entsprechender Ebene der abwickelbaren Fläche T_{ν_2} liegt.

---

[1]) Dr. Antoni Plamitzer, Erzeugnisse projektiver Involutionen höheren Grades, deren Träger unikursale Gebilde sind. I u. II Mitteilung. Sätze über die Treffgeraden projektiver Strahleninvolutionen höheren Grades, deren Träger unikursale Gebilde sind. Wiener-Sitzungsberichte, Bd. 125, 126. Abt. IIa.

Einem beliebigen Punkte A_1 des Trägers R^{ν_1} entsprechen n_2 Tangentialebenen des Torsus T_{ν_2}, welche die Raumkurve R^{ν_1} in $n_2\nu_1$ Punkten A' schneiden. Dem Elemente A_1 ordnen wir $n_2\nu_1$ Punkte A' zu. Durch jeden der letztgenannten Punkte A' gehen ν_2 Tangentialebenen $\alpha_2, \beta_2, \ldots$ des Torsus T_{ν_2}. Ihnen entsprechen $n_1\nu_2$ Punkte der Kurve R^{ν_1}, welche wir dem Elemente A' zuordnen. Auf diese Weise gelangen wir zu einer Punktkorrespondenz $[n_2\nu_1, n_1\nu_2]$ auf dem unikursalen Träger R^{ν_1} und durch jeden von den $(n_1\nu_2+n_2\nu_1)$ Koinzidenzpunkten dieser Korrespondenz geht je eine homologe Tangentialebene des Torsus T_{ν_2}.

Da aber die Rückkehrkurve der Regelfläche T_{ν_2} eine unikursale Raumkurve ν_2-ter Klasse ist, so ergeben sich folgende Sätze:

Befinden sich die Punkte einer unikursalen Raumkurve ν_1-ter Ordnung und die Tangentialebenen (bezw. Schmiegungstangentialebenen) eines unikursalen Torsus (resp. Raumkurve) ν_2-ter Klasse in einer Verwandtschaft $[n_1, n_2]$, so fällt $(n_1\nu_2+n_2\nu_1)$-mal ein Punkt der ersten Kurve in die homologe Ebene des zweiten Trägers.

Ganz analog können wir folgenden Satz beweisen:

Befinden sich die Punkte einer unikursalen Kurve ν_1-ter Ordnung und die Tangenten einer unikursalen Kurve ν_2-ter Klasse — die in der nämlichen Ebene liegen — in einer Korrespondenz $[n_1, n_2]$, so fällt $(n_1\nu_2+n_2\nu_1)$-mal ein Punkt der ersten in die entsprechende Tangente der zweiten Kurve.

Insbesondere für $n_1=n_2=1$, $\nu_1=1, 2, 2$, $\nu_2=2, 1, 2$ bekommen wir die von v. Staudt (s. Beiträge zur Geometrie der Lage) erhaltenen Sätze. Für $n_1=n_2=1$ vergleiche man Rudolf Sturm, Geometrische Verwandtschaften, Bd. I, Nr. 177.

Betrachtet man eine unikursale Raumkurve $R^{\nu_1}_{\nu_2}$ ν_1-ter Ordnung und ν_2-ter Klasse, deren Punkte und Schmiegungsebenen in einer Verwandtschaft $[n_1, n_2]$ sich befinden. Einem Punkte A_1 der $R^{\nu_1}_{\nu_2}$ entsprechen n_2 Schmiegungsebenen α_2 dieser Kurve, welche $R^{\nu_1}_{\nu_2}$ in Schmiegungspunkten der α_2 und noch in $n_2(\nu_1-3)$ weiteren Punkten A' schneiden. Dem Elemente A_1 ordnen wir $n_2(\nu_1-3)$ Punkte A' zu. Durch jeden der letztgenannten Punkte A' gehen ausser den drei konsekutiven noch (ν_2-3) weitere Schmiegungsebenen der Raumkurve $R^{\nu_1}_{\nu_2}$. Ihnen entsprechen $n_1(\nu_2-3)$ Punkte der n_1-deutigen Reihe, welche wir dem Elemente A' zuordnen. Aus der Korrespondenz $[n_2(\nu_1-3), n_1(\nu_2-3)]$ zwischen den Punkten der unikursalen Raumkurve folgt unmittelbar:

Befinden sich die Punkte (-Schmiegungspunkte) und die Schmiegungstangentialebenen (-Tangentialebenen) einer unikursalen Raumkurve (resp. Torsus) ν_1-ter Ordnung (-Range) und ν_2-ter Klasse in einer Verwandtschaft $[n_1, n_2]$, so sind — ausser den Koinzidenzelementen dieser Korrespondenz — $n_1\nu_2+n_2\nu_1-3(n_1+n_2)$-mal je zwei homologe Elemente dieses Trägers inzident.

Und analog ergibt sich folgender Satz:

Befinden sich die Punkte und die Tangenten einer unikursalen Plankurve ν_1-ter Ordnung und ν_2-ter Klasse in einer Korrespondenz $[n_1, n_2]$ so sind $n_1\nu_2+n_2\nu_1-2(n_1+n_2)$-mal je zwei entsprechende Elemente dieser Kurve inzident.

2. Es liegen zwei unikursale (abwickelbare, oder windschiefe) Regelflächen Φ^{ν_1} und Φ^{ν_2} von den Ordnungen ν_1, ν_2 vor, deren Erzeugende in einer $[n_1, n_2]$-deutiger Beziehung sich befinden. Es seien noch zwei unikursale — in verschiedenen Ebenen liegende — Plankurven C_{ν_1} und C_{ν_2} bezw. ν_1-, ν_2-ter Klasse gegeben, deren Tangenten in einer Korrespondenz $[n_1, n_2]$ stehen. Man kann fragen, wie oft zwei homologe Geraden dieser Flächen, oder Kurven sich schneiden.

Einer beliebigen Geraden a_1 der Regelfläche Φ^{ν_1} (bezw. der Kurve C_{ν_1}) entsprechen n_2 Strahlen des Trägers Φ^{ν_2} (resp. C_{ν_2}), welche $n_2\nu_1$ Elemente a' des ersten Trägers schneiden. Der Geraden a_1 ordnen wir $n_2\nu_1$ Elemente a' zu. Jede Gerade a' schneidet ν_2 Strahlen $a_2, b_2, \ldots$ des Trägers Φ^{ν_2}, (resp. C_{ν_2}). Ihnen entsprechen $n_1\nu_2$ Elemente der Fläche Φ^{ν_1} (bezw. der Kurve C_{ν_1}), welche wir dem Strahle a' zuordnen. Aus der Korrespondenz $[n_2\nu_1, n_1\nu_2]$ zwischen den Elementen des Gebildes Φ^{ν_1} (bezw. C_{ν_1}) lässt sich leicht erkennen, dass jede von den Koinzidenzgeraden dieser Korrespondenz — die man als Elemente des betrachteten Gebildes ansehen kann — je eine entsprechende Erzeugende der Φ^{ν_2} (resp. Tangente der C_{ν_2}) schneidet.

Dasselbe gilt, wenn zwischen den Erzeugenden der Regelfläche Φ^{ν_1} und den Tangenten der Plankurve C_{ν_2} eine Verwandtschaft $[n_1, n_2]$ besteht. Es befinden sich nämlich die Punkte der unikursalen Kurve K^{ν_1} — in welcher die Ebene γ der Kurve C_{ν_2} die Regelfläche Φ^{ν_1} schneidet — und das Tangentenbüschel auf C_{ν_2} in einer Korrespondenz $[n_1, n_2]$, wenn jeder Erzeugenden z_1 der Regelfläche Φ^{ν_1} der Schnittpunkt $z_1\gamma$ entspricht. Aus Nr. 1 folgt, dass $(n_1\nu_2+n_2\nu_1)$ Tangenten $a_2, b_2, \ldots$ der Kurve C_{ν_2} durch entsprechende Punkte $a_1\gamma, b_1\gamma, \ldots$ der Kurve K^{ν_1} gehen. In diesen letzt erwähnten Punkten schneiden sich aber homologe Elemente $a_1, a_2; b_1, b_2; \ldots$ der Gebilde Φ^{ν_1} und C_{ν_2}, w. z. b. w.

Befinden sich die Strahlen (Tangenten) zweier unikursalen Gebilde — Regelflächen, Kegel, Raum-, Plankurven — ν_1-, ν_2-ter Ordnung (Range oder Klasse) in einer Korrespondenz $[n_1, n_2]$, so schneiden sich in je einem Punkte $(n_1\nu_2+n_2\nu_1)$ Paare homologer Strahlen dieser Gebilde.

Insbesondere für $n_1=n_2=1$, $\nu_1=\nu_2=2$ vergleiche man T. Reye, Geometrie der Lage, I. Abt. V Aufl. S. 134.

Es liege jetzt eine unikursale Regelfläche Φ^ν ν-ter Ordnung vor. Ist diese Fläche eine windschiefe oder abwickelbare Regelfläche (aber nicht eine Kegelfläche), so schneidet[1] jede beliebige Erzeugende noch $(\nu-2)$ weitere, oder zwei unmittelbar folgende und $(\nu-4)$ andere nicht unmittelbar folgende Erzeugende dieser Fläche. Stellen wir zwischen den Strahlen (Tangenten) der Fläche Φ^ν (bezw. einer Raumkurve ν tem Range) eine $[n_1, n_2]$ deutige Beziehung her, so erhalten wir ganz analog folgenden Satz:

Befinden sich die Strahlen (Tangenten) einer unikursalen Regelfläche, oder Raumkurve ν-ter Ordnung (Range) in einer Verwandtschaft $[n_1, n_2]$, so schneiden sich $(n_1+n_2)(\nu-2)$-mal je zwei homologe Strahlen des betrachteten Gebildes.

3. Es seien in einer Ebene ε irgend ein fester Punkt P_0 und zwei unikursale Kurven C^{ν_1}, C^{ν_2}, ν_1-, ν_2-ter Ordnung gegeben, deren Punkte in einer $[n_1, n_2]$-deutiger Beziehung sich befinden. Man kann fragen, wie oft zwei homologe Punkte mit P_0 in je einer Geraden liegen.

Einem beliebigen Punkte A_1 der Kurve C^{ν_1} entsprechen n_2 Punkte der Kurve C^{ν_2}. Diese letzteren mit P_0 verbunden, bestimmen n_2 Geraden, welche den Träger C^{ν_1} in $n_2\nu_1$ Punkten A' schneiden. Dem Punkte A_1 ordnen wir die $n_2\nu_1$ Elemente A' zu. Eine Gerade P_0A', welche P_0 mit A' verbindet, schneidet die C^{ν_2} in ν_2 Punkten A_2, $B_2, \ldots$ Ihnen entsprechen $n_1\nu_2$ Elemente der Kurve C^{ν_1}, welche wir dem Punkte A' zuordnen. Auf diese Weise gelangen wir zu einer Korrespondenz $[n_2\nu_1, n_1\nu_2]$ zwischen den Punkten der unikursalen Kurve C^{ν_1}. Die Koinzidenzen dieser Korrespondenz weisen auf $(n_1\nu_2+n_2\nu_1)$ Verbindungslinien entsprechender Punkte der Kurven C^{ν_1} und C^{ν_2} hin, welche durch P_0 gehen.

Wenn zwei unikursale Kurven ν_1-, ν_2-ter Ordnung (Klasse) — deren Punkte (bezw. Tangenten) in einer Verwandtschaft $[n_1, n_2]$ sich befinden — und irgend ein fester Punkt P_0 (resp. eine feste Gerade p_0) in der nämlichen Ebene liegen, so gehen durch P_0 $(n_1\nu_2+n_2\nu_1)$ Verbindungsgeraden (bezw. liegen auf p_0 ebensoviele Schnittpunkte) homologer Elemente dieser Kurven.

---

[1]) Dr. L. Cremona, Grundzüge einer allgem. Theorie der Oberflächen in synth. Behandlung (deutsch von Curtze) Berlin 1870. Nr 55 u. Nr 13.

Und analog:

Wenn irgend eine feste Gerade p_0 und zwei unikursale Raumkurven (oder Torsen) ν_1-, ν_2-ter Ordnung (Klasse) gegeben sind, deren Punkte (bezw. Tangentialebenen) in einer Korrespondenz $[n_1, n_2]$ sich befinden, so schneidet p_0 $(n_1\nu_2+n_2\nu_1)$ Verbindungsgeraden (resp. Schnittgeraden) homologer Elemente der betrachteten Gebilde.

Ganz analog können wir folgende Sätze beweisen:

Wenn eine unikursale Plankurve ν-ter Ordnung oder Klasse — deren Punkte, bezw. Tangenten in einer Verwandtschaft $[n_1, n_2]$ sich befinden — und irgend ein fester Punkt P_0 (resp. eine feste Gerade p_0) in der nämlichen Ebene liegen, so gehen durch P_0 $(n_1+n_2)(\nu-1)$ Verbindungsgeraden (bezw. liegen auf p_0 ebensoviele Schnittpunkte) entsprechender Elemente dieser Kurve.

Wenn irgend eine feste Gerade p_0 und eine unikursale Raumkurve (oder Torsus) ν-ter Ordnung (Klasse) gegeben sind, deren Punkte (oder Tangentialebenen) in einer Korrespondenz $[n_1, n_2]$ sich befinden, so schneidet p_0 $(n_1+n_2)(\nu-1)$ Verbindungsgeraden (bezw. Schnittgeraden) homologer Elemente des betrachteten Gebildes.

4. Betrachten wir jetzt irgend einen festen Punkt P_0, eine unikursale Raumkurve R^{ν_1} ν_1-ter Ordnung und eine unikursale abwickelbare, oder windschiefe Regelfläche (bezw. Raumkurve) Φ^{ν_2} ν_2-ter Ordnung (Range). Befinden sich die Punkte der R^{ν_1} und die Erzeugenden (Tangenten) der Φ^{ν_2} in $[n_1, n_2]$-deutiger Verwandtschaft, so kann man fragen, wie oft zwei homologe Elemente dieser Gebilde mit P_0 in je einer Ebene liegen.

Die Verbindungsebenen des Punktes P_0 mit den n_2 Strahlen der Fläche Φ^{ν_2}, welche einem beliebigen Punkte A_1 der Kurve R^{ν_1} entsprechen, schneiden diese Raumkurve in $n_2\nu_1$ Punkten A'. Dem Punkte A_1 ordnen wir die $n_2\nu_1$ Elemente A' zu. Eine Gerade P_0A', welche P_0 mit A' verbindet, schneidet ν_2 Erzeugenden a_2, $b_2, \ldots$ der Regelfläche Φ^{ν_2}. Ihnen entsprechen $n_1\nu_2$ Punkte der Raumkurve R^{ν_1}, welche wir dem Elemente A' zuordnen. Aus der Korrespondenz $[n_2\nu_1, n_1\nu_2]$ zwischen den Punkten der Kurve R^{ν_1} folgt unmittelbar der Satz:

Befinden sich die Punkte (oder Tangentialebenen) einer unikursalen Raumkurve (bezw. Torsusfläche) ν_1-ter Ordnung (Klasse) und die Erzeugenden (Tangenten) einer unikursalen Regelfläche (Raumkurve) ν_2 ter Ordnung (Range) in einer Verwandtschaft $[n_1, n_2]$, so gehen durch irgend einen festen, gegebenen Punkt P_0 $(n_1\nu_2+n_2\nu_1)$ Verbindungsebenen (resp. liegen auf irgend einer festen, gegebenen Ebene π_0 ebensoviele Schnittpunkte) homologer Elemente dieser Gebilde.

Und analog:

Befinden sich die Punkte (oder Tangentialebenen) und Tangenten (Erzeugenden) einer unikursalen Raumkurve (oder Torsusfläche) ν_1-ter Ordnung (Klasse) und ν_2-ten Range (Ordnung) in $[n_1, n_2]$-deutiger Verwandtschaft, so gehen durch irgend einen festen, gegebenen Punkt P_0 $n_1\nu_2+n_2\nu_1-2(n_1+n_2)$ Verbindungsebenen (bezw. liegen auf irgend einer festen, gegebenen Ebene π_0 ebensoviele Schnittpunkte) entsprechender Elemente des betrachteten Gebildes.

5. Gegeben sind irgend eine feste Gerade p_0 und zwei unikursale abwickelbare, oder windschiefe Regelflächen (bezw. Raumkurven) Φ^{ν_1}, Φ^{ν_2}, ν_1-, ν_2-ter Ordnung (Range), deren Erzeugenden (resp. Tangenten) in einer Verwandtschaft $[n_1, n_2]$ sich befinden. Untersuchen wir jetzt die Eigenschaften der Geraden, welche je zwei homologe Strahlen der Gebilde Φ^{ν_1}, Φ^{ν_2} und die Gerade p_0 schneiden. Diese Treffgeraden erzeugen eine Kongruenz $(n_1\nu_2+n_2\nu_1)$-ter Ordnung und Klasse.

Um die Klasse der betrachteten Kongruenz zu bestimmen, schneiden wir die Regelflächen Φ^{ν_1}, Φ^{ν_2} mit einer beliebigen Ebene ε in unikursalen Kurven C^{ν_1}, C^{ν_2}, ν_1-, ν_2-ter Ordnung und ordnen wir jeder Erzeugenden z_1, resp. z_2 dieser Flächen den Schnittpunkt $Z_1=z_1\varepsilon$, bezw. $Z_2=z_2\varepsilon$ zu. Die auf diese Weise konstruierten $[n_1, n_2]$-deutige Punktreihen auf C^{ν_1} und C^{ν_2}, besitzen (Nr 3) $(n_1\nu_2+n_2\nu_1)$-mal zwei entsprechende Punkte, welche mit dem Schnittpunkte $p_0\varepsilon$ in je einer Geraden liegen. Die $(n_1\nu_2+n_2\nu_1)$ in ε liegende Verbindungsgeraden dieser Punkte schneiden aber die feste Gerade p_0 und je zwei entsprechende Strahlen der Regelflächen Φ^{ν_1} und Φ^{ν_2}. Sie bestimmen bekanntlich die Klasse der betrachteten Kongruenz.

Aus diesen und dualen Untersuchungen ergibt sich folgender Satz:

Wenn irgend eine feste Gerade p_0 und zwei unikursale Regelflächen (Raumkurven) ν_1-, ν_2 ter Ordnung (Range) gegeben sind, deren Erzeugenden (Tangenten) in einer Korrespondenz $[n_1, n_2]$ sich befinden, so erzeugen die Treffgeraden der p_0 und homologer Strahlen dieser Gebilde eine Kongruenz $(n_1\nu_2+n_2\nu_1)$-ter Ordnung und Klasse.

Geht die Schnittebene ε durch p_0, so erzeugen (vgl. Nr 8) die $[n_1, n_2]$-deutige Punktreihen auf C^{ν_1} und C^{ν_2} eine Kurve K $(n_1\nu_2+n_2\nu_1)$-ter Klasse und $(n_1-1)(n_2-1)$-ten Geschlechtes. Diese Kurve ist im Allgemeinen von $2(n_1\nu_2+n_2\nu_1+n_1n_2-n_1-n_2)$-ter Ordnung und besitzt $\frac{1}{2}(n_1\nu_2+n_2\nu_1)$ $(n_1\nu_2+n_2\nu_1-3)-(n_1n_2-n_1-n_2)$ Doppeltangenten. Es lässt sich aber leicht erkennen, dass jede Tangente und Doppeltangente dieser Kurve eine Gerade), bezw. Doppelgerade der betrachteten Kongruenz ist. Es ergeben sich daher die dual entsprechenden Sätze:

Die Ebenen des Büschels um p_0 und die Punkte der Geraden p_0 sind singuläre Elemente der untersuchten Kongruenz. Auf jeder singulären Ebene (bezw. durch jeden singulären Punkt gehen) liegen $\frac{1}{2}(n_1\nu_2+n_2\nu_1)(n_1\nu_2+n_2\nu_1-3)-(n_1n_2-n_1-n_2)$ Doppelkongruenzstrahlen und ∞^1 Kongruenzstrahlen, welche eine Plankurve (bezw. Kegel) von $(n_1\nu_2+n_2\nu_1)$-ter Klasse (Ordnung) und $(n_1-1)(n_2-1)$-tem Geschlechte erzeugen.

Geht die Schnittebene ε durch zwei (s. Nr. 2) sich schneidende entsprechende Strahlen s_1, s_2 der Flächen Φ^{ν_1} und Φ^{ν_2}, so besitzen (Nr 3) die $[n_1, n_2]$-deutigen Punktreihen auf C^{ν_1-1}, C^{ν_2-1} $(n_1\nu_2+n_2\nu_1-n_1-n_2)$ mal zwei entsprechende Punkte, welche mit dem Schnittpunkte $P_0=p_0\varepsilon$ in je einer Geraden liegen. Diese Geraden bilden aber die in ε liegende Kongruenzstrahlen. Aus Nr 2 folgt:

Die Paare sich schneidender korrespondierender Geraden der Gebilde Φ^{ν_1} und Φ^{ν_2} bestimmen $(n_1\nu_2+n_2\nu_1)$ singuläre Ebenen und $(n_1\nu_2+n_2\nu_1)$ singuläre Punkte der betrachteten Kongruenz. Auf jeder singulären Ebene (bezw. durch jeden singulären Punkt gehen) liegen $n_1\nu_2+n_2\nu_1-(n_1+n_2)$ Kongruenzstrahlen.

Betrachten wir jetzt eine feste Gerade p_0 und eine unikursale Regelfläche (bezw. Raumkurve) Φ^{ν} ν-ter Ordnung (Range), deren Strahlen in einer Verwandtschaft $[n_1, n_2]$ sich befinden. Ganz analog können wir folgenden Satz beweisen:

Wenn irgend eine feste Gerade p_0 und eine unikursale Regelfläche (Raumkurve) ν-ter Ordnung (Range) gegeben sind, deren Erzeugenden (Tangenten) in einer Korrespondenz $[n_1, n_2]$ sich befinden, so erzeugen die Treffgeraden der p_0 und homologer Strahlen dieser Fläche (Kurve) eine Kongruenz $(n_1+n_2)(\nu-1)$-ter Ordnung und Klasse.

Es soll noch bemerkt werden (vgl. Nr 2), dass die Paare sich schneidender entsprechender Strahlen des Trägers Φ^{ν} $(n_1+n_2)(\nu-2)$ singuläre Ebenen und ebensoviele singuläre Punkte der Kongruenz bestimmen. Alle Punkte der Geraden p_0 und alle durch p_0 gehende Ebenen sind auch singuläre Elemente dieser Kongruenz. Die speziellen Eigenschaften dieser singulären Elemente können wir leicht erforschen.

II. Erzeugnisse $[n_1, n_2]$-deutiger Verwandtschaften.

6. Betrachtet man zwei allgemeine unikursale Gebilde Γ_1 und Γ_2 — Plan-, Raumkurven, Kegel, abwickelbare oder windschiefe Regelflächen — deren Elemente (d. h. Punkte, Geraden, Ebenen) in einer $[n_1, n_2]$-deutiger Verwandtschaft sich befinden, so erzeugen homologe Elemente der Träger Γ_1 und Γ_2 ein Gebilde Ψ.

Um das Geschlecht des Erzeugnisses Ψ zu bestimmen, stellen wir zwischen den Elementen (Punkten, Geraden, Ebenen) $\alpha_1, \ldots$ des Trägers Γ_1 und den Strahlen $a_1, \ldots$ eines in beliebiger Ebene ε liegenden Büschels S_1 eine [1, 1]-deutige Korrespondenz K_{I} her. Zwischen den Elementen $\alpha_2, \ldots$ des Trägers Γ_2 und den Strahlen $a_2, \ldots$ eines in ε liegenden Büschels S_2 stellen wir auch eine [1, 1]-deutige Korrespondenz K_{II} her. Da aber die Gebilde Γ_1 und Γ_2 in einer $[n_1, n_2]$-deutiger Verwandtschaft sich befinden, so kommen zwei (in der nämlichen Ebene ε liegende) Strahlenbüschel S_1 und S_2 — die vermittels der Korrespondenzen K_{I} und K_{II} zu ihnen beziehungsweise projektiv sind — in eine eben solche Verwandtschaft $[n_1, n_2]$.

Die $[n_1, n_2]$-deutige Strahlenbüschel S_1 und S_2 erzeugen bekanntlich im Allgemeinen eine in der Ebene ε liegende Kurve $C^{n_1+n_2}$ (n_1+n_2)-ter Ordnung, $2n_1n_2$-ter Klasse und $(n_1-1)(n_2-1)$-ten Geschlechte, welche einen n_1-fachen Punkt S_1 und einen n_2-fachen Punkt S_2 besitzt.

Zwei homologe Elemente α_1 und α_2 der Gebilde Γ_1 und Γ_2 bestimmen das Element $\alpha_1\alpha_2$ des Erzeugnisses Ψ. Den Elementen α_1, α_2 entsprechen — vermittels der Korrespondenzen K_{I} und K_{II} — zwei bestimmte homologe Strahlen a_1 und a_2 der Büschel S_1 und S_2, welche sich in dem Punkte a_1a_2 der Kurve $C^{n_1+n_2}$ schneiden. Ordnen wir jedem Element $\alpha_1\alpha_2$ des Gebildes Ψ einen einzigen und bestimmten Punkt a_1a_2 der Plankurve $C^{n_1+n_2}$ zu, so erkennen wir gleich, dass auch die Punkte der Kurve $C^{n_1+n_2}$ sich eindeutig auf die Elemente des Gebildes Ψ beziehen lassen. Auf diese Weise gelangen wir zu einer Korrespondenz [1, 1] zwischen den Elementen der Gebilde Ψ und $C^{n_1+n_2}$. Aus dem fundamentalen Satze von Riemann über Geschlechtsgleichheit eindeutig bezogener Gebilde folgt unmittelbar, dass das Erzeugnis Ψ vom $(n_1-1)(n_2-1)$-ten Geschlechte ist.

Das Erzeugnis einer $[n_1, n_2]$-deutigen Verwandtschaft zwischen den Elementen (Punkten, Geraden, Ebenen) zweier unikursaler Gebilde — Plan-, Raumkurven, Kegel-, Regelflächen — ist im allgemeinen Falle vom $(n_1-1)(n_2-1)$-ten Geschlechte.

7. Befinden sich gleichartige Elemente (Punkte, Strahlen oder Ebenen) eines allgemeinen unikursalen Gebildes Γ — Plan-, Raumkurve, Kegel-, Torsusfläche — in einer Verwandtschaft $[n_1, n_2]$, so erzeugen homologe Elemente ein Gebilde Ψ. Um das Geschlecht des Erzeugnisses Ψ zu bestimmen, stellen wir zwischen den Elementen $\alpha_1, \ldots, \alpha_2, \ldots$ des Trägers Γ und den Punkten $A_1, \ldots, A_2, \ldots$ eines beliebigen Kegelschnittes C^2 eine [1, 1]-deutige Korrespondenz K_{I} her, durch welche die betrachtete Verwandtschaft auf Γ in ebensolche, ihre Koinzidenzen in deren Koinzidenzpunkte übergeführt werden. Die auf diese Weise konstruierten $[n_1, n_2]$-deutige Punktreihen des Kegelschnittes C^2 erzeugen[1]) im Allgemeinen eine Direktionskurve D von (n_1+n_2)-ter Klasse, $2n_1n_2$-ter Ordnung und $(n_1-1)(n_2-1)$-tem Geschlechte, welche $\frac{1}{2}n_1(n_1-1)+\frac{1}{2}n_2(n_2-1)$ Doppeltangenten besitzt.

Zwei homologe Elemente α_1 und α_2 des Trägers Γ erzeugen das Element $\alpha_1\alpha_2$ des Gebildes Ψ. Den Elementen α_1, α_2 entsprechen — vermittels der Korrespondenz K_{I} — zwei bestimmte homologe Punkte A_1 und A_2 des Kegelschnittes C^2, welche eine Tangente A_1A_2 der Direktionskurve D liefern. Aus der Korrespondenz [1, 1] zwischen den Elementen $\alpha_1\alpha_2$ und A_1A_2 der Gebilde Ψ und D folgt unmittelbar, dass das Erzeugnis Ψ vom $(n_1-1)(n_2-1)$-ten Geschlechte ist.

Betrachten wir jetzt eine allgemeine unikursale Raumkurve (bezw. einen Torsus) Γ, deren Punkte $A_1 \ldots$ (resp. Tangentialebenen $\alpha_1 \ldots$) und Tangenten (Erzeugenden) $a_2 \ldots$ in einer Verwandtschaft $[n_1, n_2]$ sich befinden. Homologe Elemente dieser Korrespondenz erzeugen einen Torsus, bezw. eine Raumkurve Ψ. Um das Geschlecht des Erzeugnisses Ψ zu bestimmen, ordnen wir jeder Tangente a_2 der Raumkurve Γ (bezw. Erzeugenden a_2 des Torsus Γ) den ihr zugehörigen Tangentialpunkt A_2 (resp. die ihr zugehörige Tangentialebene α_2) zu. Vermittels dieser Projektivität P_{I} gelangen wir zu einer $[n_1, n_2]$-deutigen Verwandtschaft zwischen den Punkten der Raumkurve (resp. Tangentialebenen des Torsus) Γ. Entsprechende Punkte (oder Ebenen) der letzteren Korrespondenz erzeugen eine windschiefe Regelfläche Φ vom Geschlechte $(n_1-1)(n_2-1)$. Aus der [1, 1] deutigen Beziehung zwischen den Elementen A_1a_2 und A_1A_2, oder α_1a_2 und $\alpha_1\alpha_2$ der Gebilde Ψ und Φ ergibt sich das Geschlecht $(n_1-1)(n_2-1)$ des Erzeugnisses Ψ.

Aus den bisherigen Betrachtungen folgt der Satz:

Das Erzeugnis einer $[n_1, n_2]$-deutigen Verwandtschaft zwischen den Elementen eines unikursalen Gebildes — Plan-, Raumkurve, Kegel, oder Torsus — ist im Allgemeinen vom $(n_1-1)(n_2-1)$-ten Geschlecht.

8. Betrachtet man in einer Ebene ε zwei allgemeine unikursale Kurven C^{ν_1}, und C^{ν_2} ν_1-, ν_2-ter Ordnung, deren Punkte in einer Verwandtschaft

[1]) Dr. Emil Weyer, Beiträge zur Curvenlehre p. 7—9. Wien 1880.

sich befinden, so umhüllen die Verbindungsstrahlen homologer Punkte (s. № 6) eine Kurve K vom $(n_1-1)(n_2-1)$-ten Geschlechte.

Durch irgend einen festen Punkt P_0 (s. Nr 3) der Ebene ε gehen $(n_1\nu_2+n_2\nu_1)$ Verbindungsgeraden entsprechender Punkte der Kurven C^{ν_1} und C^{ν_2}, welche die aus P_0 an K gelegten Tangenten bilden. Es ergeben sich daher die dual entsprechenden Sätze:

Zwei in der nämlichen Ebene liegende $[n_1, n_2]$-deutige Punktreihen (bezw. Tangentenbüschel), deren Träger zwei allgemeine unikursale Kurven ν_1-ter und ν_2-ter Ordnung (resp. Klasse) sind, erzeugen im Allgemeinen eine Plankurve $(n_1\nu_2+n_2\nu_1)$-ter Klasse (Ordnung) und $(n_1-1)(n_2-1)$-ten Geschlecht.

Diese Kurve ist im Allgemeinen von $2(n_1\nu_2+n_2\nu_1+n_1n_2-n_1-n_2)$-ter Ordnung (Klasse) und besitzt $\frac{1}{2}(n_1\nu_2+n_2\nu_1)(n_1\nu_2+n_2\nu_1-3)-(n_1n_2-n_1-n_2)$ Doppeltangenten (-punkte). Die Anzahl der Doppeltangenten der Kurve K können wir folgendermassen bestimmen. Eine beliebige Tangente E_1E_2 dieser Kurve, welche zwei entsprechende Punkte E_1, E_2 der Trägerkurven C^{ν_1}, C^{ν_2} verbindet, möge C^{ν_1} ausser E_1 noch in (ν_1-1) Punkten $P_1, Q_1, \ldots$ und die C^{ν_2} ausser E_2 noch in (ν_2-1) Punkten $X_2, Y_2, \ldots$ schneiden.

a) Würde X_2 mit E'_2 — d. h. mit einem von den (n_2-1) übrigen, dem Punkte E_1 entsprechenden Elementen – zusammenfallen, so würde die Gerade $E_1E_2=E_1E'_2$ zu einer Doppeltangente der Kurve K werden. Dem Punkte E'_2 korrespondieren n_1 Elemente E_1 des n_1 deutigen Gebildes C^{ν_1}. Wir verbinden jeden Punkt E_1 mit (n_2-1) Punkten E_2 des n_2-deutigen Gebildes C^{ν_2}, welche ausser E'_2 dem Elemente E_1 entsprechen, und bezeichnen diese $n_1(n_2-1)$ Verbindungsgeraden mit e_0. Jedem Punkte E'_2 der Kurve C^{ν_2} ordnen wir solche $n_1(n_2-1)(\nu_2-1)$ Punkte X_2, $Y_2, \ldots$ zu, welche sich ausser E_2 als weitere Schnittpunkte der C^{ν_2} mit den $n_1(n_2-1)$ Strahlen e_0 ergeben. Durch den Punkt X_2 gehen ausser den n_1 Tangenten der Kurve K — welche X_2 mit den ihm entsprechenden Elementen des n_1-deutigen Gebildes C^{ν_1} verbinden — noch weitere $(n_1\nu_2+n_2\nu_1-n_1)$ Tangenten E_1E_2, $F_1F_2, \ldots$ des Erzeugnisses K. Bezeichnen wir mit E_2', $F_2', \ldots$ die $(n_1\nu_2+n_2\nu_1-n)(n_2-1)$ Punkte des Trägers C^{ν_2}, welche ausser E_2, $F_2, \ldots$ den Elementen E_1, $F_1, \ldots$ der Kurve C^{ν_1} korrespondieren. Würde X_2 mit einem von den Punkten z. B. E_2' zusammenfallen, so würde die Gerade $E_1E_2=E_1E_2'$ zu einer Doppeltangente der Kurve K werden. Wir ordnen also jedem Punkte X_2 der Trägerkurve C^{ν_2} $(n_1\nu_2+n_2\nu_1-n_1)(n_2-1)$ Punkte E_2', $F_2', \ldots$ dieser Kurve zu.

Auf diese Weise gelangen wir zu einer Korrespondenz $[n_1(n_2-1)(\nu_2-1),$ $(n_1\nu_2+n_2\nu_1-n_1)(n_2-1)]$ auf der unikursalen Kurve C^{ν_2}, durch deren Koin-

zidenzpunkte die Doppeltangenten der Kurve K hindurchgehen. Es lässt sich aber leicht erkennen, dass jede Doppeltangente $E_1E_2=E_1E_2'$ zwei verschiedene Koinzidenzelemente E_2 und E_2' der erwähnten Korrespondenz auf C^{ν_2} enthält. Es ergibt sich daher folgender Satz:

„Die Kurve K hat $\vartheta_1=\frac{1}{2}(n_2-1)(2n_1\nu_2-2n_1+n_2\nu_1)$ solche Doppeltangenten, welche je ein beliebiges Element des n_1-deutigen Gebildes C^{ν_1} mit zwei entsprechenden Punkten des n_2-deutigen Gebildes C^{ν_2} verbinden".

b) In ähnlicher Weise erkennen wir:

„Die Kurve K hat $\vartheta_2=\frac{1}{2}(n_1-1)(2n_2\nu_1-2n_2+n_1\nu_2)$ solche Doppeltangenten, welche je einen Punkt des n_2-deutigen Gebildes C^{ν_2} mit zwei entsprechenden Punkten des n_1-deutigen Gebildes C^{ν_1} verbinden".

c) Würde X_2 mit einem, von n_2 dem Elemente P_1 korrespondierenden, Punkte P_2 zusammenfallen, so würde die Gerade $E_1E_2=P_1P_2$ zwei Paare homologer Punkte der Träger C^{ν_1}, C^{ν_2} verbinden und daher zu einer Doppeltangente der Kurve K werden. Dem Elemente P_2 entsprechen n_1 Punkte P_1 des n_1-deutigen Gebildes C^{ν_1}. Durch jeden[1] Punkt P_1 gehen ausser den n_2 Tangenten der Kurve K, welche P_1 mit den ihm entsprechenden Elementen des n_2-deutigen Gebildes C^{ν_2} verbinden, noch weitere $(n_1\nu_2+n_2\nu_1-n_2)$ Tangenten M_1M_2, $N_1N_2, \ldots$ der Kurve K. Bezeichnen wir mit A_2, $B_2, \ldots$ die $(n_1\nu_2+n_2\nu_1-n_2)(\nu_2-1)$ Punkte der Kurve C^{ν_2}, welche sich ausser M_2, $N_2, \ldots$ als weitere Schnittpunkte der C^{ν_2} mit den Tangenten M_1M_2, $N_1N_2, \ldots$ ergeben. Würde z. B. A_2 mit P_2 zusammenfallen, so würde $M_1M_2=P_1P_2$ zu einer Doppeltangente der Kurve K werden. Dasselbe gilt für alle n_1 Punkte P_1, welche dem Elemente P_2 korrespondieren. Wir ordnen also jedem Punkte P_2 der Kurve C^{ν_2} $n_1(n_1\nu_2+n_2\nu_1-n_2)(\nu_2-1)$ Punkte $A_2, \ldots$, $B_2, \ldots$ dieser Kurve zu. Durch jeden von diesen letztgenannten Punkten, z. B durch A_2, gehen ausser den n_1 Tangenten der Kurve K, welche A_2 mit den ihm entsprechenden Elementen des n_1-deutigen Gebildes C^{ν_1} verbinden, noch weitere $(n_1\nu_2+n_2\nu_1-n_1)$ Tangenten M_1M_2, $L_1L_2, \ldots$ Diese Tangenten schneiden die C^{ν_1} ausser M_1, $L_1, \ldots$ noch in $(n_1\nu_2+n_2\nu_1-n_1)(\nu_1-1)$ weiteren Punkten P_1, $R_1, \ldots$, denen auf der Kurve C^{ν_2} $n_2(n_1\nu_2+n_2\nu_1-n_1)(\nu_1-1)$ Elemente $P_2, \ldots$, $R_2, \ldots$ entsprechen. Würde z. B. P_2 mit A_2 zusammenfallen, so würde $M_1M_2=P_1P_2$ zu einer Doppeltangente der Kurve K

[1]) Für $n_1=n_2=1$ vgl. man den analogen Beweis in der Abhandlung B. Kalicun, Über die Erzeugnisse krummer projektiver Gebilde, deren Träger unikursale Plankurven sind. Wiener Sitzungsber. Bd. **123**. Abt. IIa, p. 315.

werden. Wir ordnen also jedem Punkte A_2 der Kurve C^{ν_2} $n_2(n_1\nu_2+n_2\nu_1-n_1)(\nu_1-1)$ Punkte $P_2, \ldots, R_2, \ldots$ dieser Kurve zu.

Auf diese Weise gelangen wir zu einer Korrespondenz $[n_1(n_1\nu_2+n_2\nu_1-n_2)(\nu_2-1),\ n_2(n_1\nu_2+n_2\nu_1-n_1)(\nu_1-1)]$ auf der unikursalen Kurze C^{ν_2}, durch deren Koinzidenzpunkte die Doppeltangenten der Kurve K gehen. Da aber jede Doppeltangente $M_1M_2 = P_1P_2$ zwei verschiedene Koinzidenz punkte M_2 und P_2 dieser Korrespondenz enthält, so ergibt sich der Satz:

„Die Kurve K hat $\vartheta_3 = \frac{1}{2}(n_1\nu_2+n_2\nu_1)(n_1\nu_2+n_2\nu_1-n_1-n_2) - \frac{1}{2}n_1n_2(\nu_1+\nu_2-2)$ Doppeltangenten, welche je zwei Paare entsprechender Elemente der $[n_1, n_2]$-deutigen Punktreihen auf C^{ν_1} und C^{ν_2} verbinden".

Aus den bisherigen Betrachtungen folgt unmittelbar, dass die Kurve K im Allgemeinen

$$\vartheta = \vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_3 = \frac{1}{2}(n_1\nu_2+n_2\nu_1)(n_1\nu_2+n_2\nu_1-3) - (n_1n_2 - n_1 - n_2)$$

Doppeltangenten besitzt.

Wir gehen nun über zu der Betrachtung zweier $[n_1, n_2]$-deutiger Punktreihen, deren Träger eine Gerade l und eine unikursale Plankurve C^ν ν-ter Ordnung ist. Im diesen besonderen Falle (für: $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = \nu$) ist das Erzeugnis unserer Verwandtschaft eine Kurve K_1 $(n_1\nu+n_2)$-ter Klasse und $(n_1-1)(n_2-1)$ ten Geschlechtes. Um die Anzahl der Doppeltangenten der Kurve K_1 zu bestimmen, ermitteln wir (vgl. *a*) eine Korrespondenz $[n_1(n_2-1)(\nu-1),\ (n_1\nu+n_2-n_1)(n_2-1)]$ auf C^ν, durch deren Koinzidenzpunkte $\vartheta_1 = \frac{1}{2}(n_2-1)(2n_1\nu-2n_1+n_2)$ Doppeltangenten hindurchgehen. Die Kurve K_1 besitzt noch eine $n_1\nu$-fache Tangente l. Die Gerade l schneidet nämlich den Träger C^ν in ν einfachen Punkten A_2, $B_2, \ldots$, denen $n_1\nu$ Elemente $A_1, \ldots, B_1, \ldots$ der n_1-deutigen Punktreihe l entsprechen.

Zwei $[n_1, n_2]$-deutige in der nämlichen Ebene liegende Punktreihen (bezw. Strahlenbüschel), deren Träger eine Gerade l (resp. ein Punkt L) und eine unikursale Kurve ν-ter Ordnung (Klasse) sind, erzeugen im Allgemeinen eine Plankurve $(n_1\nu+n_2)$-ter Klasse (Ordnung), $2n_1(\nu+n_2-1)$-ter Ordnung (Klasse) und $(n_1-1)(n_2-1)$-ten Geschlechtes, welche $\frac{1}{2}(n_2-1)(2n_1\nu-2n_1+n_2)$ Doppeltangenten (-punkte) und $n_1\nu$-fache Tangente l (resp. $n_1\nu$-fachen Punkt L) besitzt.

Wir haben bisher die Eigenschaften der Plankurven K und K_1 untersucht. Vermittels der Projektion erhalten wir unmittelbar die Eigenschaften der Kegel $(n_1\nu_2+n_2\nu_1)$-, resp. $(n_1\nu+n_2)$-ter Klasse (Ordnung) und $(n_1-1)(n_2-1)$-ten Geschlechtes.

Insbesondere für $n_1 = n_2 = 1$ erhalten wir die von Kalicun [1]) besprochenen Kurven. Nehmen wir die Kegelschnitte als Träger projektiver Punktreihen und Tangentenbüschel an, so erhalten wir (für: $n_1 = n_2 = 1$, $\nu_1 = 1, 2$; $\nu_2 = 2$) die von Schröter [2]) und Weyr [3]) untersuchten Kurven.

9. Betrachtet man $[n_1, n_2]$-deutige Punktreihen auf einer allgemeinen unikursalen Plankurve C^ν ν-ter Ordnung, so umhüllen die Verbindungsstrahlen entsprechender Punkte dieser kollokalen Reihen (s. Nr. 7) eine Kurve K_2 vom $(n_1-1)(n_2-1)$-ten Geschlechte.

Die Klasse $(n_1+n_2)(\nu-1)$ dieser Kurve [4]) kann man folgendermassen bestimmen. Durch irgend einen festen Punkt P_0, der Ebene gegebener Trägerkurve C^ν (s. Nr. 3), gehen $(n_1+n_2)(\nu-1)$ Verbindungsgeraden homologer Punkte $[n_1, n_2]$-deutiger Reihen auf C^ν, welche die aus P_0 an die untersuchte Kurve gelegten Tangenten bilden.

Zwei kollokale $[n_1, n_2]$-deutige Punktreihen (bezw. Tangentenbüschel) auf einer allgemeinen unikursalen Plankurve ν-ter Ordnung (Klasse) erzeugen im Allgemeinen eine Kurve $(n_1+n_2)(\nu-1)$-ter Klasse (Ordnung) und $(n_1-1)(n_2-1)$-ten Geschlecht.

Diese Kurve ist im Allgemeinen von $2n_1n_2+2(n_1+n_2)(\nu-2)$-ter Ordnung (Klasse) und besitzt

$$\eta_0 = \frac{1}{2}(n_1\nu+n_2\nu-3)(n_1\nu+n_2\nu-2n_1-2n_2)+\frac{1}{2}(n_1^2+n_2^2-n_1-n_2)$$

Doppeltangenten (-punkte). Die Anzahl der Doppeltangenten der Kurve K_2 können wir folgendermassen bestimmen. Eine beliebige Tangente E_1E_2 dieser Kurve, welche zwei homologe Punkte E_1 und E_2 der Trägerkurve C^ν verbindet, möge C^ν ausser E_1, E_2 noch in $(\nu-2)$ Punkten: $Q_1 \equiv X_2$, $P_1 \equiv Y_2, \ldots$ schneiden.

a) Würde X_2 mit E_2' — d. h. mit einem von den (n_2-1) übrigen,

---

1) B. Kalicun, l. c. I und II Mitteilung. Wiener Sitzungsber. Bd. **122**, **123**. Abt IIa. Wien 1913—14.

2) H. Schröter, Über die Erzeugnisse krummer projektivischer Gebilde, Crelle's Journal, Bd. **54**. Berlin 1857.

3) Emil Weyr, Regelflächen dritter Ordnung. Note *C*. Die Kurve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte... Leipzig 1870.

4) Einen anderen Beweis vgl. man in R. Sturm, Geom. Verwandtschaften. Bd. I. Nr. 180.

dem Punkte E_1 entsprechenden Elementen — zusammenfallen, so würde die Gerade $E_1E_2 = E_1E_2'$ zu einer Doppeltangente der Kurve K_2 werden. Dem Punkte E_2' korrespondieren n_1 Elemente E_1 der n_1-deutigen Punktreihe auf C^ν. Wir verbinden jeden Punkt E_1 mit (n_2-1) — ausser E_2' dem Elemente E_1 entsprechenden — Punkten E_1 der n_2-deutigen Reihe und bezeichnen diese $n_1(n_2-1)$ Verbindungsgeraden mit e_0. Jedem Punkte E_2' der Kurve C^ν ordnen wir solche $n_1(n_2-1)(\nu-2)$ Punkte X_2, Y_2,... zu, welche sich ausser E_1, E_2 als weitere Schnittpunkte der C^ν mit den $n_1(n_2-1)$ Strahlen e_0 ergeben. Durch jeden von den letztgenanten Punkten, z. B. durch $X_2 \equiv Q_1$ gehen ausser den n_1+n_2 Tangenten der Kurve K_2 — welche X_2 (resp. Q_1) mit den ihm entsprechenden Elementen der n_1- (bezw. n_2-)-deutigen Reihe verbinden — noch weitere $(n_1+n_2)(\nu-2)$ Tangenten E_1E_2, F_1F_2,... der Kurve K_2. Den Elementen E_1, F_1,... entsprechen ausser E_2, F_2,... noch $(n_1+n_2)(\nu-2)(n_2-1)$ weitere Punkte F_2', E_2',... der n_2-deutigen Reihe. Würde X_2 z. B. mit E_2' zusammenfallen, so würde $E_1E_2 = E_1E_2'$ zu einer Doppeltangente der K_2 werden. Wir ordnen also jedem Punkte X_2 des Trägers C^ν $(n_1+n_2)(\nu-2)(n_2-1)$ Punkte E_2', F_2',... dieser Kurve zu.

Aus der Korrespondenz $[n_1(n_2-1)(\nu-2),\ (n_1+n_2)(\nu-2)(n_2-1)]$ zwischen den Punkten der unikursalen Kurve C^ν (s. Nr. 8a) folgt der Satz:

„Die Kurve K_2 hat $\vartheta_1 = \frac{1}{2}(2n_1+n_2)(n_2-1)(\nu-2)$ solche Doppeltangenten, welche je ein beliebiges Element der n_1-deutigen Punktreihe mit zwei homologen Punkten der n_2-deutigen Reihe verbinden“.

b) In ähnlicher Weise erkennen wir:

„Die Kurve K_2 hat $\vartheta_2 = \frac{1}{2}(2n_2+n_1)(n_1-1)(\nu-2)$ solche Doppeltangenten, welche je ein beliebiges Element der n_2-deutigen Punktreihe und zwei entsprechende Punkte der n_1-deutigen Reihe verbindet“

c) Wüde X_2 mit einem (von n_2 dem Elemente P_1 entsprechenden) Punkte P_2 zusammenfallen, so würde die Gerade $E_1E_2 = P_1P_2$ zu einer Doppeltangenten der Kurve K_2 werden. Dem Elemente P_2 entsprechen n_1 Punkte P_1 der n_1-deutigen Reihe. Durch jeden Punkt $P_1 \equiv Y_2$ gehen ausser den n_1+n_2 Tangenten der K_2 — welche P_1 (resp. Y_2) mit den ihm entsprechenden Elementen der n_2- (bezw. n_1)-deutigen Reihe verbinden — noch $(n_1+n_2)(\nu-2)$ weitere Tangenten M_1M_2, N_1N_2,... der Kurve K_2. Diese Tangenten schneiden die Trägerkurve C^ν ausser P_1, M_1, M_2, N_1, N_2,... noch in $(n_1+n_2)(\nu-2)(\nu-3)$ weiteren Punkten A_2, B_2,... Würde z. B. A_2 mit P_2 zusammenfallen, so würde $M_1M_2 = P_1P_2$ zu einer Doppeltangente der K_2 werden. Dasselbe gilt für alle n_1 Punkte P_1, welche dem Elemente P_2 korrespondieren. Wir ordnen also jedem P_2 der Kurve C^ν $n_1(n_1+n_2)(\nu-2)(\nu-3)$ Punkte A_2, B_2,... dieser Kurve zu.

Durch $A_2 \equiv R_1$ gehen ausser den n_1+n_2 Tangenten der K_2 — welche A_2 (resp. R_1) mit den ihm entsprechenden Elementen der n_1- (bezw. n_2-) deutigen Reihe verbinden — noch weitere $(n_1+n_2)(\nu-2)$ Tangenten M_1M_2, L_1L_2,... der Kurve K_2. Diese Tangente schneiden C^ν ausser A_2, M_1, M_2, L_1, L_2,... noch in $(n_1+n_2)(\nu-2)(\nu-3)$ weiteren Punkten P_1, S_1,..., denen $n_2(n_1+n_2)(\nu-2)(\nu-3)$ Elemente P_2, S_2,... der n_2-deutigen Reihe entsprechen. Wir ordnen jedem Punkte A_2 der C^ν $n_2(n_1+n_2)(\nu-2)(\nu-3)$ Punkte P_2, S_2,... zu.

Aus der Korrespondenz $[n_1(n_1+n_2)(\nu-2)(\nu-3),\ n_2(n_1+n_2)(\nu-2)(\nu-3)]$ auf der unikursalen Kurve C^ν folgt unmittelbar:

„Die Kurve K_2 hat $\vartheta_3 = \frac{1}{2}(n_1+n_2)^2(\nu-2)(\nu-3)$ solche Doppeltangenten, welche je zwei verschiedene Paare entsprechender Elemente der $[n_1, n_2]$-deutigen Punktreihen auf C^ν verbinden“.

d) Betrachten wir noch einmal die $(n_1+n_2)(\nu-2)$ durch einen Punkt P_1 gehende Tangenten M_1M_2, N_1N_2,... Würde z. B. M_1 mit P_2 zusammenfallen, so würde die Gerade $M_1M_2 = P_2P_1$ den Punkt $M_1 \equiv P_2$ mit zwei ihm entsprechenden Elementen M_2, P_1 verbinden und daher zu einer Doppeltangente der Kurve K_2 werden. Wir ordnen also jedem Punkte P_2 $n_1(n_1+n_2)(\nu-2)$ Punkte M_1, N_1,... zu. Durch M_1 gehen n_2 Tangenten der K_2, welche M_1 mit den ihm entsprechenden Punkten der n_2-deutigen Reihe verbinden. Diese Tangenten schneiden C^ν ausser M_1, M_2, noch in $n_2(\nu-2)$ weiteren Punkten P_1,..., denen $n_2^2(\nu-2)$ Elemente P_2,... des n_2 deutigen Gebildes entsprechen. Wir ordnen also jedem Elemente M_1 der C^ν $n_2^2(\nu-2)$ Punkte P_2,... zu.

Bemerken wir noch, dass durch jeden Punkt $P_1 \equiv Y_2$ n_1 solche Tangenten der Kurve K_2 gehen, welche Y_2 mit den ihm entsprechenden Punkten der n_1-deutigen Reihe verbinden. Jede von diesen Tangenten schneidet C^ν ausser Y_2, Y_1 noch in $(\nu-2)$ weiteren Punkten D_2,... Jedem Elemente P_2 ordnen wir jetzt $n_1^2(\nu-2)$ Punkte D_2 der Kurve C^ν zu. Durch jeden Punkt D_2 gehen $(n_1+n_2)(\nu-2)$ Tangenten Y_1Y_2,... der K_2. Wir ordnen jedem Punkte D_2 $n_2(n_1+n_2)(\nu-2)$ Elemente P_2... zu, welche den Punkten $P_1 \equiv Y_2$,... korrespondieren.

Auf diese Weise gelangen wir zu zwei Korrespondenzen

$$[n_1(n_1+n_2)(\nu-2),\ n_2^2(\nu-2)] \quad \text{und} \quad [n_1^2(\nu-2),\ n_2(n_1+n_2)(\nu-2)]$$

auf der unikursalen Kurve C^ν, durch deren $2\vartheta_4 = 2(n_1^2+n_1n_2+n_2^2)(\nu-2)$ Koinzidenzpunkten ϑ_4 Doppeltangenten der Kurve K_2 gehen. Es folgt der Satz:

„Die Kurve K_2 hat $\vartheta_4 = (n_1^2+n_1n_2+n_2^2)(\nu-2)$ solche Doppeltangenten, welche je einen Punkt $A_1 \equiv B_2$ der Trägerkurve C^ν mit zwei verschiedenen, ihm in beiderlei Sinne entsprechenden, Punkten A_2 und B_1 der $[n_1, n_2]$-deutigen Verwandtschaft verbinden“.

Die kollokalen $[n_1, n_2]$-deutige Punktreihen auf unikursaler Plankurve C^ν besitzen [1]) bekanntlich $\frac{1}{2} n_1 (n_1 - 1) + \frac{1}{2} n_2 (n_2 - 1)$ „involutorische Elementenpaare", d. h. solche Paare von Punkten $A_1 \equiv B_2$, und $A_2 \equiv B_1$, welche in beiderlei Sinne einander entsprechen. Da aber jedes von den involutorischen Paaren eine Doppeltangente der K_2 liefert, so folgt unmittelbar:

„Die Kurve K_2 hat $\vartheta_5 = \frac{1}{2}(n_1^2 + n_2^2 - n_1 - n_2)$ solche Doppeltangenten, welche die involutorische Paare der Verwandtschaft $[n_1, n_2]$ auf C^ν verbinden".

Aus den bisherigen Betrachtungen ergibt sich daher, dass die Kurve K_2 $\vartheta_0 = \vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 + \vartheta_4 + \vartheta_5$ Doppeltangenten besitzt, wo:

$$\vartheta_0 = \tfrac{1}{2}(n_1 \nu + n_2 \nu - 3)(n_1 \nu + n_2 \nu - 2n_1 - 2n_2) + \tfrac{1}{2}(n_1^2 + n_2^2 - n_1 - n_2).$$

Insbesondere für $\nu = 2$ erhalten wir die von Weyr [2]) und für $n_1 = n_2 = 1$ die von Kalicun [3]) untersuchten Kurven.

10. Wir gehen nun über zur Betrachtung solcher $[n_1, n_2]$-deutiger Punktreihen, deren Träger zwei unikursale Gebilde R^{ν_1} und R^{ν_2}, nämlich:

a) zwei Raumkurven,

b) eine Raumkurve und eine Plankurve,

c) zwei Plankurven (in verschiedenen Ebenen),

ν_1-ter und ν_2-ter Ordnung sind. Die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte dieser Reihen erzeugen (s. Nr. 6) eine windschiefe Regelfläche Φ vom $(n_1-1)(n_2-1)$-ten Geschlechte. Diese Regelfläche ist vom $(n_1 \nu_2 + n_2 \nu_1)$-ten Grade, denn irgend eine feste Gerade p_0 (vgl. Nr. 3) bekanntlich $(n_1 \nu_2 + n_2 \nu_1)$ Verbindungsgeraden homologer Punkte der Reihen auf R^{ν_1} und R^{ν_2} schneidet. Den Grad der Φ können wir auch folgendermassen bestimmen. Projizieren wir nämlich die $[n_1, n_2]$-deutigen Punktreihen aus einem beliebigen Punkte P des Raumes und ordnen wir jedem Punkte A_1, resp. A_2 dieser Reihen die Gerade $a_1 = PA_1$, bezw. $a_2 = PA_2$ zu, welche den betrachteten Punkt mit P verbindet. Die auf diese Weise erhaltenen konzentrischen Strahlenkegel ν_1-ter und ν_2-ter Ordnung erzeugen bekanntlich einen Berührungskegel Γ der windschiefen Regelfläche Φ. Die Kegelfläche Γ ist aber (vgl. Nr. 8) im Allgemeinen von $(n_1 \nu_2 + n_2 \nu_1)$-ter Klasse, $2(n_1 \nu_2 + n_2 \nu_1 + n_1 n_2 - n_1 - n_2)$-ter Ordnung, $(n_1 - 1)(n_2 - 1)$-tem Geschlecht und besitzt $\frac{1}{2}(n_1 \nu_2 + n_2 \nu_1)(n_1 \nu_2 + n_2 \nu_1 - 3) - (n_1 n_2 - n_1 - n_2)$ Doppeltangentialebenen. Es ergeben sich daher die dual entsprechenden Sätze:

Zwei $[n_1, n_2]$-deutige Punktreihen (bezw. Tangentialebenenbüschel), deren Träger allgemeine unikursale Plan-, Raumkurven (bezw. Kegel-, Torsusflächen) ν_1-, ν_2-ter Ordnung (Klasse) sind, erzeugen im Allgemeinen eine windschiefe Regelfläche vom $(n_1\nu_2 + n_2\nu_1)$-ten Grade, $2(n_1 \nu_2 + n_2 \nu_1 + n_1 n_2 - n_1 - n_2)$-ten Range und $(n_1 - 1)(n_2 - 1)$-ten Geschlechte. Die Doppelberührungsebenen (Doppelpunkte) dieser Regelfläche bilden einen Torsus (eine Raumkurve) von der Klasse (resp. Ordnung)

$$\tfrac{1}{2}(n_1 \nu_2 + n_2 \nu_1)(n_1 \nu_2 + n_2 \nu_1 - 3) - (n_1 n_2 - n_1 - n_2).$$

Es lässt sich leicht erkennen, dass die Trägerkurven R^{ν_1} und R^{ν_2} (bezw. Trägerflächen) respektive n_2-fache und n_1-fache Leitkurven (Leitflächen) der windschiefen Regelfläche sind. Im Falle b) und c) ist (für $i = 1, 2$; $k = 2, 1$) die Ebene der Trägerkurve (bezw. der Scheitel des Trägerkegels) des n_i-deutigen Gebildes eine $n_i \nu_k$-fache Tangentialebene (bezw. ein $n_i \nu_k$-facher Punkt) der Regelfläche.

Insbesondere für $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = \nu$ erhalten wir eine Regelfläche Φ vom $(n_1 \nu + n_2)$-ten Grade, $2 n_1 (\nu + n_2 - 1)$-ten Range und $(n_1 - 1)(n_2 - 1)$-ten Geschlechte als Erzeugnis $[n_1, n_2]$ deutiger Punktreihen (bezw. Ebenenbüschel), deren Träger eine Gerade l und eine unikursale Plan-, Raumkurve R^ν ν-ter Ordnung (bezw. Kegel-, Torsusfläche T_ν ν-ter Klasse) sind. Die Kurve R^ν (bezw. Fläche T_ν) ist eine n_1-fache Leitkurve (-fläche) dieser Regelfläche. Die Gerade l ist eine n_2-fache Leitgerade (bezw. eine Büschelachse n_2-facher Berührungsebenen) der Φ. Jede Ebene durch l schneidet R^ν in ν Punkten $A_2, B_2, \ldots$, denen $n_1 \nu$ Elemente auf l entsprechen; diese Ebene ist daher eine $n_1 \nu$-fache Tangentialebene der Φ. Die Gerade l können wir als Büschelachse $n_1 \nu$-facher Berührungsebenen (resp. als $n_1 \nu$-fache Leitgerade) der windschiefen Regelfläche ansehen.

11. Wenn eine allgemeine unikursale Raumkurve R^ν ν-ter Ordnung die Trägerkurve $[n_1, n_2]$-deutiger Punktreihen ist, so erzeugen die Verbindungsstrahlen entsprechender Punkte dieser Reihen (s. Nr. 7) eine windschiefe Regelfläche Φ vom $(n_1 - 1)(n_2 - 1)$-ten Geschlechte.

Irgend eine feste Gerade p_0 schneidet (Nr. 3) bekanntlich $(n_1 + n_2)(\nu - 1)$ Verbindungsgeraden homologer Punkte der Reihen auf R^ν; die Regelfläche Φ ist daher vom $(n_1 + n_2)(\nu - 1)$-ten Grade. Ganz analog, wie in Nr. 10, erhalten wir durch Projektion der kollokalen Reihen aus einem Punkte des Raumes einen Berührungskegel Γ der windschiefen Fläche Φ. Dieser Kegel (s. Nr. 9) ist von $(n_1 + n_2)(\nu_1 - 1)$-ter Klasse, $2 n_1 n_2 + 2(n_1 + n_2)(\nu - 2)$-ter Ordnung, $(n_1 - 1)(n_2 - 1)$-tem Geschlechte und besitzt ϑ_0 Doppeltangentialebenen, wo:

$$\vartheta_0 = \tfrac{1}{2}(n_1 \nu + n_2 \nu - 3)(n_1 \nu + n_2 \nu - 2n_1 - 2n_2) + \tfrac{1}{2}(n_1^2 + n_2^2 - n_1 - n_2).$$

[1]) Emil Weyr, Journal f. Math. Bd. 74, p. 189, Berlin 1872. — R. Sturm, Geom Verwandtschaften. Bd. I, Nr. 181.

[2]) Emil Weyer, Beitrage zur Curvenlehre, p. 7—8.

[3]) B. Kalicun, l. c. II Mitteilung, p. 320.

Es ergeben sich daher die dual entsprechenden Sätze:

Zwei kollokale $[n_1,\ n_2]$-deutige Punktreihen (bezw. Tangentialebenenbüschel), auf einer allgemeinen unikursalen Raumkurve (resp. Torsusfläche) ν-ter Ordnung (Klasse), erzeugen im Allgemeinen eine windschiefe Regelfläche vom $(n_1+n_2)(\nu-1)$-ten Grade, $2n_1n_2+2(n_1+n_2)(\nu-2)$-ten Range und $(n_1-1)(n_2-1)$-ten Geschlechte.

Die Doppelberührungsebenen dieser Regelfläche bilden einen Torsus von der Klasse:

Die Doppelpunkte dieser Regelfläche bilden eine Raumkurve von der Ordnung:

$$\tfrac{1}{2}(n_1\nu+n_2\nu-3)(n_1\nu+n_2\nu-2n_1-2n_2)+\tfrac{1}{2}(n_1^2+n_2^2-n_1-n_2).$$

Da durch jeden Punkt $A_1 \equiv B_2$ der Raumkurve R^ν (n_1+n_2) Erzeugenden der Fläche Φ gehen, welche diesen Punkt mit den ihm in beiderlei Sinne entsprechenden Elementen A_2 und B_1 verbinden, so erhalten wir folgende Sätze:

Die Trägerraumkurve (bezw. der Trägertorsus) kollokaler $[n_1,\ n_2]$-deutiger Punktreihen (Ebenenbüschel) ist eine (n_1+n_2)-fache Leitkurve (-fläche) der betrachteten Regelfläche.

12. Betrachten wir jetzt einen unikursalen Torsus (Kegel, bezw. Raumkurve) T_{ν_1} ν_1-ter Klasse und eine unikursale

a) windschiefe Regelfläche,

b) Torsusfläche,

c) Kegelfläche,

Φ^{ν_2} ν_2-ter Ordnung. Befinden sich die Tangentialebenen und Erzeugenden dieser Flächen in Verwandtschaft $[n_1,\ n_2]$, so erzeugen (s. Nr. 6) die Schnittpunkte homologer Elemente eine Raumkurve R vom $(n_1-1)(n_2-1)$-ten Geschlecht.

Um die Ordnung dieser Kurve zu bestimmen, schneiden wir die gegebenen Träger mit einer beliebigen Ebene ε bezw. in Kurven C_{ν_1} ν_1-ter Klasse und C^{ν_2} ν_2-ter Ordnung und ordnen wir jeder Tangentialebene α_1 der T_{ν_1} die Tangente $a_1 = \alpha_1\varepsilon$ der C_{ν_1} und ebenso jeder Erzeugenden a_2 der Fläche Φ^{ν_2} den Punkt $A_2 = a_2\varepsilon$ der Kurve C^{ν_2} zu. Die Tangenten der Plankurve C_{ν_1} und die Punkte der C^{ν_2} befinden sich daher in Verwandtschaft $[n_1,\ n_2]$ und es gehen (s. Nr. 1) bekanntlich $(n_1\nu_2+n_2\nu_1)$ Geraden des n_1-deutigen Gebildes durch entsprechende Punkte der n_2-deutigen Reihe. Diese $(n_1\nu_2+n_2\nu_1)$ letzteren Punkte der Ebene ε liegen auf der Raumkurve R, denn in jedem von ihnen je zwei homologe Elemente der Flächen T_{ν_1} und Φ^{ν_2} sich schneiden. So ergibt sich die Ordnung $(n_1\nu_2+n_2\nu_1)$ der Raumkurve R.

Im Falle a) und b) besitzt die Raumkurve im Allgemeinen keine vielfachen Punkte. Im Falle c) gehen durch den Scheitel S des Trägerkegels Φ^{ν_2}

ν_1 Tangentialebenen $\xi_1,\ \eta_1,\ldots$ des Torsus T_{ν_1}, denen $n_2\nu_1$ Erzeugende $x_2,\ldots,\ y_2,\ldots$ entsprechen. Da aber die $n_2\nu_1$ Schnittpunkte $\xi_1x_2,\ldots$ $\eta_1y_2,\ldots$ mit S zusammenfallen und $x_2,\ldots,\ y_2,\ldots$ die an R im Punkte S gelegten Tangenten sind, so ist der Scheitel S ein $n_2\nu_1$-facher Punkt der Raumkurve R.

Die Projektion der untersuchten Raumkurve R aus einem beliebigen Punkte des Raumes auf eine Ebene π ist bekanntlich eine Plankurve C von $(n_1\nu_2+n_2\nu_1)$-ter Ordnung und $(n_1-1)(n_2-1)$-ten Geschlecht. Diese Plankurve ist von $2(n_1\nu_2+n_2\nu_1+n_1n_2-n_1-n_2)$-ter Klasse, und besitzt $3(n_1\nu_2+n_2\nu_1+2n_1n_2-2n_1-2n_2)$ Wendetangenten und δ Doppelpunkte im Falle a), b); im Falle c) besitzt sie einen $n_2\nu_1$-fachen Punkt und $\delta-\frac{1}{2}n_2\nu_1(n_2\nu_1-1)$ Doppelpunkte, wo:

$$\delta=\tfrac{1}{2}(n_1\nu_1+n_2\nu_2)(n_1\nu_2+n_2\nu_1-3)-(n_1n_2-n_1-n_2).$$

Da aber die Projektion einer Raumkurve r-ten Ranges und i-ter Klasse auf eine Ebene π eine Plankurve r-ter Klasse mit i Wendetangenten ist[1], so folgt unmittelbar:

Befinden sich die Tangentialebenen (bezw. Schmiegungsebenen) einer unikursalen Torsus-, Kegelfläche (bezw. Raumkurve) ν_1-ter Klasse

Befinden sich die Punkte einer unikursalen Raum-, Plankurve (bezw. Torsusfläche) ν_1-ter Ordnung

und die Erzeugenden (resp. Tangenten) einer unikursalen Regel-, Kegelfläche ν_2-ter Ordnung (bezw. Raumkurve ν_2-tem Range, oder Plankurve ν_2-ter Klasse) in einer Verwandtschaft $[n_1,\ n_2]$, so erzeugen im Allgemeinen entsprechende Elemente dieser Gebilde eine Raumkurve (resp. einen Torsus) von $(n_1\nu_2+n_2\nu_1)$-ter Ordnung (Klasse), $2(n_1\nu_2+n_2\nu_1+n_1n_2-n_1-n_2)$-tem Range (Ordnung), $3(n_1\nu_2+n_2\nu_1+2n_1n_2-2n_1-2n_2)$-ter Klasse (Range) und $(n_1-1)(n_2-1)$-ten Geschlecht.

Dieser Raumkurve schmiegt sich der Torsus

Die Rückkehrkurve dieses Torsus ist

von $(n_1\nu_2+n_2\nu_1)$-ten Range (Klasse), $2(n_1\nu_2+n_2\nu_1+n_1n_2-n_1-n_2)$-ter Ordnung (Range), $3(n_1\nu_2+n_2\nu_1+2n_1n_2-2n_1-2n_2)$-ter Klasse (Ordnung) und $(n_1-1)(n_2-1)$-tem Geschlechte.

[1]) R. Sturm, Synthetische Untersuchungen über Flächen dritter Ordnung p. 183 und 184, Leipzig 1867.

Diese Raumkurve (resp. Torsusfläche) besitzt δ scheinbare Doppelpunkte (-Doppelebenen). Ist der Träger des n_2-deutigen Gebildes eine Kegelfläche (resp. Plankurve), so besitzt die untersuchte Raumkurve (bez. abwickelbare Regelfläche) $\delta - \frac{1}{2} n_2 \nu_1 (n_2 \nu_1 - 1)$ scheinbare Doppelpunkte (-ebenen) und

einen $n_2 \nu_1$-fachen Punkt im Scheitel des Trägerkegels.	eine $n_2 \nu_1$-fache Tangentialebene in der Ebene der Trägerkurve.

In einem besonderen Falle für $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = \nu$ erhalten wir eine Raumkurve (einen Torsus) von $(n_1 \nu + n_2)$-ter Ordnung (Klasse), $2 n_1 (\nu + n_2 - 1)$-tem Range (Ordnung), $3 (n_1 \nu + 2 n_1 n_2 - 2 n_1 - n_2)$-ter Klasse (Range) und $(n_1 - 1)(n_2 - 1)$-ten Geschlechte. Die Trägerachse l des n_1-deutigen Ebenenbüschels (bezw. der n_1-deutigen Punktreihe) schneidet ν Erzeugenden (Tangenten) des n_2-deutigen Gebildes, denen $n_1 \nu$ Elemente (Ebenen, Punkte) des n_1-deutigen Gebildes entsprechen. Die Raumkurve (Torsusfläche) besitzt daher ν auf l liegende n_1-fache Punkte (bezw. ν durch l gehende n_1-fache Tangentialebenen) und $\frac{1}{2} n_1 (\nu - 1)(n_1 \nu + 2 n_2 - 2) + \frac{1}{2} n_2 (n_2 - 1)$ scheinbare Doppelpunkte (-ebenen). Ist dagegen der Träger des n_2-deutigen Gebildes eine Kegelfläche (bezw. Plankurve), so besitzt die Raumkurve (der Torsus) nur $\frac{1}{2} n_1 (\nu - 1)(n_1 \nu + 2 n_2 - 2)$ scheinbare Doppelpunkte (-ebenen),

einen n_2-fachen Punkt im Scheitel des Trägerkegels und ν auf l liegenden n_1-fache Punkte.	eine n_2-fache Tangentialebene in der Ebene der Trägerkurve und ν durch l gehende n_1-fache Tangentialebenen.

13. Betrachten wir jetzt einen unikursalen Torsus (Kegel, bezw. eine Raumkurve) T_{ν_1} ν_1-ter Klasse und eine unikursale windschiefe Regelfläche Φ^{ν_2} ν_2-ten Grades, mit einer $(\nu_2 - 1)$-fachen Leitgeraden w. Befinden sich die Ebenen und die Erzeugenden dieser Gebilde in Verwandtschaft $[n_1, n_2]$, so erzeugen (vgl. Nr. 12) die Schnittpunkte homologer Elemente eine Raumkurve R_0 von $(n_1 \nu_2 + n_2 \nu_1)$-ter Ordnung, $2 (n_1 \nu_2 + n_2 \nu_1 + n_1 n_2 - n_1 - n_2)$-tem Range, $3 (n_1 \nu_2 + n_2 \nu_1 + 2 n_1 n_2 - 2 n_1 - 2 n_2)$-ter Klasse und $(n_1 - 1)(n_2 - 1)$-ten Geschlecht, welche $\frac{1}{2} (n_1 \nu_2 + n_2 \nu_1)(n_1 \nu_2 + n_2 \nu_1 - 3) - (n_1 n_2 - n_1 - n_2)$ scheinbare Doppelpunkte besitzt.

Die Ordnung dieser Raumkurve R_0 können wir auch folgendermassen bestimmen. Projizieren wir nämlich aus der $(\nu_2 - 1)$-fachen Leitgeraden w die Strahlen der Regelfläche Φ^{ν_2} und ordnen jeder Erzeugenden a_2 dieser Fläche die durch a_2 gehende Ebene α_2 des Büschels um w. Die (auf diese Weise konstruierten) $[n_1, n_2]$-deutigen Ebenenbüschel, deren Träger T_{ν_1} und w sind, erzeugen (s. Nr. 10) eine windschiefe Regelfläche $\Psi^{n_1 + n_2 \nu_1}$ vom $(n_1 + n_2 \nu_1)$-ten Grade, $2 n_2 (\nu_1 + n_1 - 1)$ ten Range und $(n_1 - 1)(n_2 - 1)$-ten Geschlechte, mit einer $n_2 \nu_1$-fachen Leitgeraden w. Die Oberflächen Φ^{ν_2} und $\Psi^{n_1 + n_2 \nu_1}$, für welche die Gerade w eine gemeinsame $(\nu_2 - 1)$-, bezw. $n_2 \nu_1$-fache Leitgerade ist, durchdringen sich in der untersuchten Raumkurve R_0 von der Ordnung:

$$\nu_2 (n_1 + n_2 \nu_1) - (\nu_2 - 1) \,.\, n_2 \nu_1 = n_1 \nu_2 + n_2 \nu_1 .$$

Jede Erzeugende der Flächen Φ^{ν_2} und $\Psi^{n_1 + n_2 \nu_1}$ ist eine n_1-fache Sekante, bezw. Unisekante der Kurve R_0. Die Gerade w ist aber eine $(n_1 \nu_2 + n_2 \nu_1 - n_1)$-fache Sekante dieser Raumkurve. Um das zu bestätigen, betrachten wir eine Erzeugende e_2 der Fläche Φ^{ν_2} und die n_1 ihr entsprechende Ebenen ε_1 des Trägers T_{ν_1}. Eine, durch e_2 und w gehende, Ebene $\varepsilon' = e_2 w$ schneidet die Regelfläche $\Psi^{n_1 + n_2 \nu_1}$ in n_1 Erzeugenden $e_1' = \varepsilon' \varepsilon_1$. Diese Ebene ε' schneidet die Raumkurve R_0 in $(n_1 \nu + n_2 \nu_1)$ Punkten, von denen n_1 Punkte $e_2 e_1'$ auf der Gerade e_2 und die $(n_1 \nu_2 + n_2 \nu_1 - n_1)$ übrigen Punkte auf der Leitgeraden w liegen, w. z. b. w.

Die untersuchte Raumkurve R_0 kann als partieller Schnitt windschiefer Regelflächen Φ^{ν_2} und $\Psi^{n_1 + n_2 \nu_1}$, welche eine gemeinsame $(\nu_2 - 1)$-fache, bezw. $n_2 \nu_1$-fache Leitgerade besitzen, betrachtet werden. Die gemeinsame Leitachse ist eine $(n_1 \nu_2 + n_2 \nu_1 - n_1)$-fache Sekante dieser Raumkurve. Jede Erzeugende der Regelflächen ist eine n_1-fache Sekante, resp. eine Unisekante der Raumkurve.

In einem besonderen Falle für $\nu_2 = 2$ erhalten wir eine Raumkurve $R^{2 n_1 + n_2 \nu_1}$ von $(2 n_1 + n_2 \nu_1)$-ter Ordnung, $2 (n_2 \nu_1 + n_1 n_2 + n_1 - n_2)$-tem Range, $3 n_2 (\nu_1 + 2 n_1 - 2)$-ter Klasse und $(n_1 - 1)(n_2 - 1)$-tem Geschlecht, welche $\frac{1}{2} (n_2 \nu_1 + 2 n_1)(n_2 \nu_1 + 2 n_1 - 3) - (n_1 n_2 - n_1 - n_2)$ scheinbare Doppelpunkte besitzt. Die Strahlen der windschiefen Regelfläche zweiten Grades Φ^2 bilden eine „n_2-deutige Regelschar zweiten Grades". Da aber jeder Leitstrahl dieser Regelschar für $\nu_2 = 2$ als eine einfache Leitgerade w der Φ^2 angesehen werden kann, und der gegebenene Ebenenbüschel T_{ν_1} mit jedem zur n_2-deutigen Regelschar perspektiven Ebenenbüschel, dessen Achse ein Leitstrahl dieser Schar ist, eine durch $R^{2 n_1 + n_2 \nu_1}$ gehende Regelfläche $\Psi^{n_1 + n_2 \nu_1}$ erzeugt, so folgt unmittelbar:

Die untersuchte Raumkurve $R^{2 n_1 + n_2 \nu_1}$ kann als partieller Schnitt einer windschiefen Regelfläche Φ^2 mit einer windschiefen Regelfläche $\Psi^{n_1 + n_2 \nu_1}$, deren $n_2 \nu_1$-fache Leitgerade auf Φ^2 liegt, betrachtet werden. Diese Leitgerade ist eine $(n_1 + n_2 \nu_1)$-fache Sekante und jede Erzeugende der $\Psi^{n_1 + n_2 \nu_1}$ ist eine Unisekante dieser Raumkurve. Jeder Strahl der n_2-deutigen Regelschar auf Φ^2 ist eine n_1-fache und jeder Leitstrahl dieser Schar ist eine $(n_1+n_2\nu_1)$-fache Sekante der Raumkurve $R^{2n_1+n_2\nu_1}$.

Durch die Raumkurve $R^{2n_1+n_2\nu_1}$ gehen unendlich viele windschiefe Regelflächen $\Psi^{n_1+n_2\nu_1}$ $(n_1+n_2\nu_1)$-ten Grade, $2n_2(\nu_1+n_1-1)$-ten Range und $(n_1-1)(n_2-1)$ Geschlechte, welche je eine $(n_1+n_2\nu_1)$-fache Sekante derselben zu einer $n_2\nu_1$-fachen Leitgeraden haben.

Insbesondere für $n_1=n_2=1$, $\nu_1=2$ erhalten wir eine Raumkurve vierter Ordnung zweiter Art und die von Jolles[1] ausgesprochenen Sätze.

14. Betrachten wir jetzt einen unikursalen Torsus (bezw. eine Raumkurve) $T_{\nu_1}^{\nu_2}$ ν_1-ter Klasse und ν_2-ter Ordnung (Range), deren Tangential- (Schmiegungstangential-)-Ebenen und Erzeugenden (Tangenten) in einer Verwandtschaft $[n_1, n_2]$ sich befinden. Die Schnittpunkte homologer Elemente dieser Verwandtschaft erzeugen (s. Nr. 7) eine Raumkurve vom $(n_1-1)(n_2-1)$-ten Geschlechte. Wir können, ganz analog wie in Nr. **12**, die Eigenschaften dieser Raumkurve untersuchen. Es ergibt sich der Satz:

Befinden sich die Tangential-, oder Schmiegungstangential-Ebenen (bezw. Punkte) und die Erzeugenden-, oder Tangenten einer unikursalen Torsusfläche-, oder Raumkurve ν_1-ter Klasse und ν_2-ter Ordnung (bezw. Raumkurve ν_1-ter Ordnung und ν_2-ten Ranges, oder Torsus ν_1-ten Range und ν_2-ter Ordnung) in einer Verwandtschaft $[n_1, n_2]$, so erzeugen im Allgemeinen homologe Elemente eine Raumkurve (bezw. einen Torsus) von $(n_1\nu_2+n_2\nu_1)-2(n_1+n_2)$-ter Ordnung (Klasse), $2(n_1\nu_2+n_2\nu_1+n_1n_2-3n_1-3n_2)$-tem Range (Ordnung), $3(n_1\nu_2+n_2\nu_1+2n_1n_2-4n_1-4n_2)$-ter Klasse (Range) und $(n_1-n_2)n_2-1)$-ten Geschlecht, welche

$$\tfrac{1}{2}(n_1\nu_2+n_2\nu_1-2n_1-n_2)(n_1\nu_2+n_2\nu_1-2n_1-2n_2-3)-(n_1n_2-n_1-n_2)$$

scheinbare Doppelpunkte (-ebenen) besizt.

Der Schmiegungstorsus dieser Raumkurve (bezw. die Rückkehrkurve dieses Torsus) ist von $n_1\nu_2+n_2\nu_1-2(n_1+n_2)$-tem Range (Klasse), $2(n_1\nu_2+n_2\nu_1+n_1n_2-3n_1-3n_2)$-ter Ordnung (Range), $3(n_1\nu_2+n_2\nu_1+2n_1n_2-4n_1-4n_2)$-ter Klasse (Ordnung) und $(n_1-1)(n_2-1)$-tem Geschlechte.

[1] Stanislaus Jolles, Die Raumkurve vierter Ordnung, II Spezies synthetisch behandelt. Dresden 1883.

III. Komplexe der Treffgeraden homologer Strahlen $[n_1, n_2]$-deutiger Verwandtschaften.

15. Betrachtet man zwei unikursale (abwickelbare, oder windschiefe) Regelflächen (bezw. Raumkurven) Φ^{ν_1}, Φ^{ν_2} ν_1-, ν_2-ter Ordnung (resp. Ranges), deren Erzeugenden (Tangenten) in $[n_1, n_2]$ deutiger Verwandtschaft sich befinden, so erzeugen die Treffgeraden entsprechender Strahlen einen Komplex vom $(n_1\nu_2+n_2\nu_1)$-ten Grade.

Eine beliebige Ebene ε schneidet nämlich die Trägerflächen Φ^{ν_1}, Φ^{ν_2} in zwei Kurven C^{ν_1}, C^{ν_2} ν_1-, ν_2-ter Ordnung, deren Punkte in der Verwandtschaft $[n_1, n_2]$ sich befinden, wenn jeder Erzeugenden dieser Flächen der Schnittpunkt derselben Geraden mit ε zugeordnet wird. Auf diese Weise erhaltene $[n_1, n_2]$-deutige Punktreihen erzeugen (s. Nr. **8**) eine in der Ebene ε liegende Komplexkurve K von $(n_1\nu_2+n_2\nu_1)$-ter Klasse. Die dualen Untersuchungen führen uns zum Komplexkegel $(n_1\nu_2+n_2\nu_1)$-ter Ordnung. Die Komplexkurve (-kegelfläche) ist aber im Allgemeinen von $2(n_1\nu_2+n_2\nu_1+n_1n_2-n_1-n_2)$-ter Ordnung (Klasse), vom $(n_1-1)(n_2-1)$-ten Geschlechte und besitzt $\frac{1}{2}(n_1\nu_2+n_2\nu_1)(n_1\nu_2+n_2\nu_1-3)-(n_1n_2-n_1-n_2)$ Doppeltangenten (-erzeugenden). Es lässt sich leicht erkennen, dass

jede Komplexkurve, deren Ebene durch eine Doppeltangente	jeder Komplexkegel, dessen Scheitel auf einer Doppeltangente

der Komplexkurve K geht (liegt), diese Gerade zur Doppeltangente (-erzeugende) besitzt. Jede Doppeltangente (-erzeugende) einer Komplexkurve (Kegelfläche) ist daher eine „Doppelgerade" des betrachteten Komplexes.

Befinden sich die Erzeugenden (Tangenten) zweier unikursalen Regelflächen (Raumkurven) ν_1-, ν_2-ter Ordnung (Range) in einer Verwandtschaft $[n_1, n_2]$, so erzeugen im Allgemeinen die Treffgeraden homologer Strahlen einen Komplex vom $(n_1\nu_2+n_2\nu_1)$-ten Grade. Die Doppelgeraden dieses Komplexes bilden eine Kongruenz von der Ordnung und Klasse

$$\tfrac{1}{2}(n_1\nu_2+n_2\nu_1)(n_1\nu_2+n_2\nu_1-3)-(n_1n_2-n_1-n_2).$$

Insbesondere für $n_1=n_2=1$, $\nu_1=\nu_2=1$, 2 erhalten wir[1] einen tetraedralen Komplex, bezw. einen Komplex vom vierten Grade.

Betrachten wir jetzt eine solche Schnittebene ε, welche durch die einfache Erzeugende a_1 der Fläche Φ^{ν_1} geht. Dem Strahle a_1 entsprechen n_2 Elemente a_2 der Regelfläche Φ^{ν_2} und jeder Geraden a_2 korrespondieren aus-

[1] Vlg. R. Sturm, Geom. Verwandtschaften, Bd. I, Nr. 254, Bd. IV. Nr. 840.

ser a_1 noch (n_1-1) weitere Strahlen a_1' des Trägers Φ^{ν_1}. Die Ebene ε schneidet die Geraden a_1', a_2 in Punkten A_1', A_2 und die Flächen Φ^{ν_1}, Φ^{ν_2} in Kurven C^{ν_1-1}, C^{ν_2} von (ν_1-1)-, ν_2-ter Ordnung. Die in ε liegende Komplexkurve K zerfällt in n_2 Strahlenbüschel um A_2 und in (s. Nr. **8**) eine Kurve $(n_1\nu_2+n_2\nu_1-n_2)$-ter Klasse, welche $\delta=\frac{1}{2}(n_1\nu_2+n_2\nu_1-n_2)(n_1\nu_2+n_2\nu_1-n_2-3)-(n_1n_2-n_1-n_2)$ Doppeltangenten besitzt. Bemerken wir noch, dass die $n_2(n_1-1)$ Geraden A_2A_1' der Ebene ε, welche je einen Punkt A_2 mit den (n_1-1) ihm entsprechenden Punkten A_1' verbinden, je einen Strahl a_2 und zwei korrespondierende Elemente a_1, a_1' schneiden. Die $\frac{1}{2}n_2(n_2-1)$ Geraden, welche je zwei Punkte A_2 verbinden, schneiden den Strahl a_1 und je zwei ihm entsprechende Geraden a_2. In der Ebene ε liegen daher

$$\delta+n_2(n_1-1)+\frac{1}{2}n_2(n_2-1)=\frac{1}{2}(n_1n_2+n_2\nu_1-n_2)(n_1\nu_2+n_1\nu_2-n_2-3)$$
$$+\frac{1}{2}n_2(n_2-1)+n_1$$

Doppelgeraden des betrachteten Komplexes, Für: $\varkappa=1$, $\lambda=2$; $\varkappa=2$, $\lambda=1$ ergeben sich die dualentsprechenden *Sätze*:

Auf jeder Ebene ε, welche durch einen einfachen Strahl	Durch jeden Punkt E, welcher auf einem einfachen Strahle

des $n_\varkappa$-deutigen Gebildes geht (bezw. liegt), liegen (resp. gehen)

$$\frac{1}{2}(n_1\nu_2+n_2\nu_1-n_\lambda)(n_1\nu_2+n_2\nu_1-n_\lambda-3)+\frac{1}{2}n_\lambda(n_\lambda-1)+n_\varkappa$$

Doppelgeraden des untersuchten Komplexes vom $(n_1\nu_2+n_2\nu_1)$-ten Grade. Die in ε liegende Komplexkurve (bezw. der Komplexkegel, dessen Scheitel in E liegt) zerfällt in n_λ Strahlenbüschel und in eine Kurve (Kegelfläche) von $(n_1\nu_2+n_2\nu_1-n_\lambda)$-ter Klasse (Ordnung) und $(n_1-1)(n_2-1)$-tem Geschlechte.

Geht die Schnittebene ε durch zwei korrespondierende sich schneidende Geraden s_1 und s_2 der Trägerflächen Φ^{ν_1} und Φ^{ν_2}, so ist $\varepsilon=s_1s_2=\sigma$ eine singuläre Ebene des Komplexes. Jede Gerade, welche in σ liegt, ist eine Komplexgerade, weil sie zwei homologe Strahlen s_1 und ${}_2s$ trifft. Jede Schnittgerade $g=\sigma\tau$ der singulären Ebenen $\sigma=s_1s_2$ und $\tau=t_1t_2$ schneidet zwei Paare entsprechender Strahlen s_1, s_2 und t_1, t_2 und ist daher eine Doppelgerade unseren Komplexes. Aus Nr. **2** folgt.

Die Paare sich schneidender korrespondierender Geraden der $[n_1, n_2]$-deutigen Verwandtschaft auf Φ^{ν_1} und Φ^{ν_2} bestimmen $(n_1\nu_2+n_2\nu_1)$ singuläre Ebenen und ebensoviele singuläre Punkte des betrachteten Komplexes. Die ∞^2 Strahlen, welche in einer singulären Ebene liegen oder durch einen singulären Punkt gehen, gehören zu diesem Komplexe. Jede Schnittlinie zweier singulärer Ebenen und jede Verbindungslinie zweier singulärer Punkte ist eine Doppelgerade dieses Komplexes.

Dem Strahle s_1 (bezw. s_2) entsprechen s_2 (resp. s_1) und noch n_2-1 (bezw. n_1-1) weitere Elemente s_2' (s_1'). Jeder Geraden s_1' (s_2^1) entsprechen ausser s_2 (s_1) noch n_2-1 (resp. n_1-1) weitere Strahlen s_2'' (s_1''). Die Ebene $\sigma=s_1s_2$ schneidet die Elemente s_1', s_2', s_1'' und s_2'' bezw. in Punkten S_1', S_2', S_1'', S_2'' und die Trägerflächen Φ^{ν_1}, Φ^{ν_2} in Kurven C^{ν_1-1}, C^{ν_2-1} von der (ν_1-1)-, (ν_2-1)-ter Ordnung. Die in σ liegenden $[n_1, n_2]$ deutigen Punktreihen auf C^{ν_1-1} und C^{ν_2-1} erzeugen (Nr. 8) eine Kurve K^* von $(n_1\nu_2+n_2\nu_1-n_1-n_2)$-ter Klasse und $(n_1-1)(n_2-1)$-tem Geschlechte welche

$$\delta^*=\frac{1}{2}(n_1\nu_2+n_2\nu_1-n_1-n_2)(n_1\nu_2+n_2\nu_1-n_1-n_2-3)-(n_1n_2-n_1-n_2)$$

Doppeltangenten besitzt. Es folgt unmittelbar:

Die ∞^1 Tangenten der Kurve K^* und die Elemente der (n_1+n_2-2) Strahlenbüschel um S_1', S_2' sind Doppelgeraden des betrachteten Komplexes. Die $(n_1-1)(n_2-1)$ Geraden $S_1'S_2'$ schneiden den Strahl s_1 und zwei ihm entsprechende Elemente s_2, s_2' und ebenso schneiden sie die Erzeugende s_2 und zwei ihr korrespondierende Elemente s_1, s_1'. Die $(n_1-1)(n_2-1)$ Verbindungsgeraden $S_1'S_2''$ schneiden s_1' (bezw. s_2) und zwei entsprechende Elemente s_2, s_2'' (resp. s_1, s_1'). Die $(n_1-1)(n_2-1)$ Geraden $S_2'S_1''$ schneiden s_2' (bezw. s_1) und zwei korrespondierende Strahlen s_1 s_1'' (resp. s_2, s^1_2). Die $\frac{1}{2}(n_1-1)(n_1-2)$ Geraden, welche je zwei Punkte S_1' verbinden, schneiden s_2 und drei entsprechende Strahlen s_1, s_1', s_1'. Die $\frac{1}{2}(n_2-1)(n_2-2)$ Verbindungsgeraden je zweier Punkte S_2' schneiden die Erzeugende s_1 und drei homologe Geraden s_2, s_2', s_2'. Die δ^* Doppeltangenten der Kurve K^* schneiden, ausser s_1 und s_2, noch einen Strahl des n_1-(resp. n_2-)-deutigen Gebildes und zwei ihm entsprechende Geraden des n_2-(bezw. n_1-)-deutigen Gebildes, oder zwei Paare homologer Elemente der $[n_1, n_2]$-deutigen Verwandtschaft auf Φ^{ν_1} und Φ^{ν_2}.

Ganz analog können wir die Eigenschaften des singulären Punktes $S=s_1s_2$ besprechen.

16. Betrachtet man in einem besonderen Falle zwei unikursale Kegelflächen Γ^{ν_1}, Γ^{ν_2} ν_1, ν_2 ter Ordnung, deren Erzeugenden in Verwandtschaft $[n_1, n_2]$ sich befinden, so erzeugen die Treffgeraden homologer Strahlen einen Komplex vom Grade $(n_1\nu_2+n_2\nu_1)$.

Eine beliebige Ebene ε, welche durch die Scheitel S^1, S^2 der Trägerkegeln nicht geht, enthält (vgl. Nr. **15**) eine Komplexkurve $(n_1\nu_2+n_2\nu_1)$-ter Klasse. Um den Komplexkegel zu erhalten, projizieren wir die gegebene Strahlenverwandtschaft auf Γ^{ν_1} und Γ^{ν_2} aus einem beliebigen Punkte P des Raumes. Eine durch P und S^1 gelegte Ebene ξ_1 schneidet den Kegel Γ^{ν_1}

in ν_1 Erzeugenden $x_1, y_1, \ldots$, denen $n_2\nu_1$ Elemente $x_2, y_2, \ldots$ des Trägers Γ^{ν_2} korrespondieren. Der Ebene ξ_1 ordnen wir die $n_2\nu_1$ Ebenen ξ_2, $\eta_2, \ldots$ zu, welche P mit $x_2, y_2, \ldots$ verbinden. Jede von den letztgenannten Ebenen, z. B. die Ebene ξ_2 schneidet den Kegel Γ^{ν_2} in ν_2 Strahlen $x_2, z_2, \ldots$, denen $n_1\nu_2$ Elemente $x_1, z_1, \ldots$ des n_1-deutigen Gebildes Γ^{ν_1} entsprechen. Wir ordnen nun der Ebene ξ_2 die $n_1\nu_2$ Ebenen $\xi_1, \zeta_1, \ldots$ zu, welche P mit $x_1, z_1, \ldots$ verbinden. Sind $s^1 = S^1P$, $s^2 = S^2P$ die Verbindungsgeraden des Punktes P mit den Scheiteln S^1 und S^2, so gelangen wir zu einer Korrespondenz $[n_1\nu_2, n_2\nu_1]$ zwischen den Elementen der Ebenenbüschel um s^1 und s^2. Der Komplexkegel, als Erzeugnis dieser Büschel, ist (vgl. Nr. **8**) von $(n_1\nu_2 + n_2\nu_1)$-ter Ordnung und besitzt die Achsen s^1, s^2 bezw. zu einer $n_1\nu_2$-, $n_2\nu_1$-fachen Erzeugenden.

Man kann fragen, wie oft zwei korrespondierende Ebenen der Büschel um s^1 und s^2 zwei Paare homologer Strahlen der $[n_1, n_2]$-deutigen Verwandtschaft auf Γ^{ν_1} und Γ^{ν_2} enthalten. Eine beliebige durch P und eine Erzeugende a_1 des Kegels Γ^{ν_1} gelegte Ebene $\alpha_1 = Pa_1$ schneidet diesen Kegel noch in $(\nu_1 - 1)$ weiteren Geraden $b_1, c_1, \ldots$ Die $n_2(\nu_1 - 1)$ Ebenen $\beta_2 = Pb_2$, $\gamma_2 = Pc_2, \ldots$, welche entsprechende Strahlen $b_2, c_2, \ldots$ des n_2-deutigen Gebildes mit P verbinden, schneiden den Kegel Γ^{ν_2} noch in $n_2(\nu_1-1)(\nu_2-1)$ weiteren Erzeugenden $l_2, m_2, \ldots$ Wir ordnen dem Elemente a_1 die $n_1n_2(\nu_1-1)(\nu_2-1)$ Strahlen $l_1, m_1, \ldots$ des n_1-deutigen Gebildes Γ^{ν_1} zu, welche den Geraden $l_2, m_2, \ldots$ entsprechen. Jeder der letztgenanten Geraden, z. B. der Geraden l_1 entsprechen n_2 Strahlen l_2 des Kegels Γ^{ν_2}. Die Ebenen Pl_2 schneiden Γ^{ν_2} ausser l_2 noch in $n_2(\nu_2 - 1)$ Erzeugenden $b_2, c_2, \ldots$, denen $n_1n_2(\nu_2-1)$ Geraden $b_1, c_1, \ldots$, des Trägers Γ^{ν_1} entsprechen. Die Ebenen $Pb_1, Pc_1, \ldots$ schneiden den Kegel Γ^{ν_1} in $n_1n_2(\nu_2-1)(\nu_1-1)$ weiteren Erzeugenden $a_1, r_1, \ldots$, welche wir dem Elemente l_1 zuordnen. — Fällt die Gerade l_1 mit a_1 zusammen, so liegen in den Ebenen α_1, β_2 zwei Strahlen $l_1 \equiv a_1$, b_1, bezw. l_2, b_2, die Schnittgerade $\alpha_1\beta_2$ dieser Ebenen trifft daher zwei Paare homologer Strahlen l_1, l_2 und b_1, b_2 der $[n_1, n_2]$-deutigen Verwandtschaft auf Γ^{ν_1} und Γ^{ν_2} und ist eine Doppelgerade des Komplexkegels. Da aber die Korrespondenz

$$[n_1n_2(\nu_1-1)(\nu_2-1), \quad n_1n_2(\nu_1-1)(\nu_2-1)]$$

zwischen den Erzeugenden des Kegels Γ^{ν_1} $2n_1n_2(\nu_1-1)(\nu_2-1)$ Koinzidenzelemente besitzt und da jede Ebene α_1 zwei Koinzidenzstrahlen $l_1 \equiv a_1$ $b_1 \equiv m_1$ enthält, so folgt unmittelbar, dass der Komplexkegel nur $n_1n_2(\nu_1-1)(\nu_2-1)$ Doppelerzeugenden besitzt. *Der Komplexkegel ist daher von $(n_1\nu_2 + n_2\nu_1)$-ter Ordnung und besitzt eine $n_1\nu_2$-fache Erzeugende s^1, eine $n_2\nu_1$-fache Gerade s^2 und $n_1n_2(\nu_1-1)(\nu_2-1)$ Doppelerzeugenden.*

Jede Doppelerzeugende des Komplexkegels trifft zwei Paare homologer Strahlen der $[n_1, n_2]$-deutigen Verwandtschaft auf Γ^{ν_1}, Γ^{ν_2} und ist eine Doppelgerade des betrachteten Komplexes. Aus den dualen Untersuchungen ergeben sich folgende *Sätze*:

„Befinden sich die Erzeugenden (Tangenten) zweier unikursalen Kegel (Plankurven) ν_1-, ν_2-ter Ordnung (Klasse) in einer Verwandtschaft $[n_1, n_2]$, so erzeugen im Allgemeinen die Treffgeraden homologer Strahlen einen Komplex vom $(n_1\nu_2+n_2\nu_1)$-ten Grade. Im einer beliebigen Ebene, welche durch die Scheitel S^1 und S^2 der Trägerkegeln nich geht (resp. durch einen beliebigen Punkt, welcher auf den Ebenen σ^1 und σ^2 der Trägerkurven nicht liegt, gehen) liegen $\frac{1}{2}(n_1\nu_2+n_2\nu_1)(n_1\nu_2+n_2\nu_1-3) - (n_1n_2 - n_1 - n_2)$ Doppelgeraden des Komplexes. Durch einen beliebigen Punkt (bezw. in einer beliebigen Ebene liegen) gehen $n_1n_2(\nu_1-1)(\nu_2-1)$ Doppelgeraden des Komplexes; die Verbindungsgeraden dieses Punktes mit S^1 und S^2 (resp. die Schnittgeraden dieser Ebene mit σ^1 und σ^2 treffen) schneiden bezw. $n_1\nu_2$-, $n_2\nu_1$ Strahlen des n_1-, n_2-deutigen Gebildes und ν_2-, ν_1 entsprechende Elemente des n_2-, n_1-deutigen Gebildes. Die $(n_1\nu_2+n_2\nu_1)$ singuläre Ebenen schneiden sich (bezw. Punkte liegen) in einer Geraden, welche die Scheitel S^1 und S^2 verbindet, (bezw. welche mit der Schnittlinie der Ebenen σ^1 und σ^2 zusammenfällt)“.

Bemerkung: Durch einen beliebigen Punkt des Raumes gehen daher nur $n_1n_2(\nu_1-1)(\nu_2-1)$ Doppelgeraden der in Nr. 5 und 6 (p. 814, 815) meiner Schrift [1] untersuchten Komplexe.

17. Es seien jetzt zwei unikursale Gebilde, nämlich eine abwickelbare oder windschiefe Regelfläche (bezw. Raumkurve) Φ^{ν_1} ν_1 ter Ordnung (Range) und eine Kegelfläche Γ^{ν_2} ν_2-ter Ordnung gegeben. Befinden sich die Erzeugenden (Tangenten) dieser Träger in Verwandtschaft $[n_1, n_2]$, so erzeugen im Allgemeinen die Treffgeraden homologer Strahlen einen Komplex vom $(n_1\nu_2+n_2\nu_1)$-ten Grade.

Eine, durch den Scheitel S^2 des Kegels Γ^{ν_2} nicht gehende, Ebene ε enthält (s. Nr. 15) eine Komplexkurve $(n_1\nu_2+n_2\nu_1)$-ter Klasse. Um den Komplexkegel zu erhalten, projizieren wir die gegebene Strahlenverwandtschaft aus einem beliebigen Punkte P. Einer Tangentialebene $\xi_1 = Px_1$ des aus P an Φ^{ν_1} umgeschriebenen Kegels Γ_{ν_1} ν_1-ter Klasse, welche P mit dem Strahle x_1 des n_1-deutigen Gebildes verbindet, entsprechen n_2 durch P und die entsprechenden Elemente x_2 des n_2-deutigen Gebildes gelegten

[1]) Antoni Plamitzer, Sätze über die Treffgeraden projektiver Strahleninvolutionen. höheren Grades, deren Träger unikursale Gebilde sind. Wiener-Sitzungsberichte, Bd. 126 Abt. IIa.

Ebenen $\xi_2 = Px_2$. Jede Ebene ξ_2 schneidet den Kegel Γ^{ν_2} in ν_2 Strahlen $x_2, z_2, \ldots$, denen $n_1\nu_2$ Elemente $x_1, z_1, \ldots$ des Trägers Φ^{ν_1} entsprechen. Wir ordnen nun der Ebene ξ_2 die $n_1\nu_2$ Tangentialebenen Px_1, $Pz_2, \ldots$ des Kegels Γ^{ν_1} zu. Wir gelangen auf diese Weise zu einer Korrespondenz $[n_1\nu_2, n_2]$ zwischen den Tangentialebenen des Kegels Γ^{ν_1} und den Ebenen des Büschels $s^2 = PS^2$, dessen Achse die Verbindungslinie des Punktes P mit dem Scheitel S^2 des Kegels Γ^{ν_2} ist. Aus Nr. 8 folgt, dass der Komplexkegel, als Erzeugnis dieser Korrespondenz, von $(n_1\nu_2+n_2\nu_1)$-ter Ordnung ist und $\frac{1}{2}(n_1\nu_2-1)(2n_2\nu_1-2n_2+n_1\nu_2)$ Doppelerzeugenden und die Achse $s^2=PS^2$ zur $n_2\nu_1$-fachen Erzeugenden besitzt. Es folgt aus den dualen Untersuchungen:

Betrachten wir eine $[n_1, n_2]$ deutige Verwandtschaft zwischen den Erzeugenden (Tangenten) zweier unikursaler Gebilde, nämlich einer allgemeinen Regelfläche ν_1-ter Ordnung, oder einer Raumkurve ν_1 tem Range und

einer Kegelflächen ν_2-ter Ordnung. In einer beliebigen Ebene, welche durch den Scheitel S^2 des Trägerkegels nicht geht, liegen	einer Plankurve ν_2 ter Klasse. Durch einen beliebigen Punkt, welcher auf der Ebene σ^2 der Trägerkurve nicht liegt, gehen

$$\tfrac{1}{2}(n_1\nu_2+n_2\nu_1)(n_1\nu_2+n_2\nu_1-3)-(n_1n_2-n_1-n_2)$$

Doppelgeraden und durch einen beliebigen Punkt gehen	Doppelgeraden und in einer beliebigen Ebene liegen

$$\tfrac{1}{2}(n_1\nu_2-1)(2n_2\nu_1-2n_2+n_1\nu_2)$$

Doppelgeraden des Komplexes vom Grade $(n_1\nu_2+n_2\nu_1)$ der Treffgeraden homologer Strahlen gegebener Gebilde. Jede durch S^2 gehende (bezw. in σ^2 liegende) Gerade schneidet ν_1 Strahlen des n_1-deutigen Gebildes und $n_2\nu_1$ entsprechende Elemente des n_2-deutigen Trägers. Bemerken wir noch, dass alle $(n_1\nu_2+n_2\nu_1)$ singuläre

Ebenen des Komplexes durch den Scheitel S^2 des Trägerkegels gehen	Punkte des Komplexes in der Ebene σ^2 der Trägerkurve liegen.

Wir können endlich zwei unikursale Gebilde, nämlich eine Plankurve C_{ν_1} ν_1-ter Klasse und einen Kegel Γ^{ν_2} ν_2-ter Ordnung betrachten, deren Strahlen in $[n_1, n_2]$-deutiger Verwandtschaft sich befinden. Ganz analoge Untersuchungen führen uns zu einem Komplexe $(n_1\nu_2+n_2\nu_1)$-ten Grade der Treffgeraden homologer Strahlen gegebener Verwandtschaft. Jede in der Ebene der Kurve C_{ν_1} liegende, bezw. jede durch den Scheitel des Kegels Γ^{ν_2} gehende Gerade schneidet ν_2-, ν_1-Strahlen des n_2-, n_1-deutigen Gebilde und $n_1\nu_2$-, $n_1\nu_1$- entsprechende Geraden des n_1-, n_2-deutigen Gebildes. In einer beliebigen Ebene liegen $\frac{1}{2}(n_2\nu_1-1)(2n_1\nu_2-2n_1+n_2\nu_1)$ und durch einen beliebigen

Punkt gehen $\frac{1}{2}(n_1\nu_2-1)(2n_2\nu_1-2n_2+n_1\nu_2)$ Doppelgeraden des betrachteten Komplexes. Die $(n_1\nu_2+n_2\nu_1)$ singulären Punkte liegen in der Ebene der Kurve C_{ν_1} und alle singulären Ebenen gehen durch den Scheitel des Kegels Γ^{ν_2}.

18. Betrachten wir jetzt eine allgemeine unikursale (abwickelbare oder windschiefe) Regelfläche ν-ter Ordnung, bezw. Raumkurve ν-tem Range Φ^ν. Befinden sich die Strahlen des Trägers Φ^ν in Verwandtschaft $[n_1, n_2]$, so erzeugen die Treffgeraden korrespondierender Strahlen einen Komplex vom Grade $(n_1+n_2)(\nu-1)$.

Eine beliebige Ebene ε schneidet nämlich den Träger Φ^ν in einer unikursalen Plankurve ν-ter Ordnung C^ν, deren Punkte in $[n_1, n_2]$ deutiger Verwandtschaft sich befinden, wenn jeder Erzeugenden der Fläche Φ^ν der Schnittpunkt derselben Geraden mit ε zugeordnet wird. Auf diese Weise erhaltene $[n_1, n_2]$-deutige Punktreihen auf C^ν erzeugen [1] eine Komplexkurve von $(n_1+n_2)(\nu-1)$ ter Klasse. Die dualen Untersuchungen führen aus zum Komplexkegel von der Ordnung $(n_1+n_2)(\nu-1)$. Da aber die Komplexkurve (-kegelfläche) im Allgemeinen (s. Nr. **9**) von

$$2n_1n_2+2(n_1+n_2)(\nu-2)\text{-ter}$$

Ordnung (Klasse) und $(n_1-1)(n_2-1)$-tem Geschlechte ist und

$$\vartheta_0=\tfrac{1}{2}(n_1\nu+n_2\nu-3)(n_1\nu+n_2\nu-2n_1-2n_2)+\tfrac{1}{2}(n_1^2+n_2^2-n_1-n_2)$$

Doppeltangenten (-erzeugenden) besitzt, so (vgl. Nr. 15) folgt:

Befinden sich die Erzeugenden (Tangenten) einer unikursalen Regelfläche ν ter Ordnung (Raumkurve ν-ten Range) in einer Verwandtschaft $[n_1, n_2]$, so erzeugen im Allgemeinen die Treffgeraden homologer Strahlen einen Komplex vom Grade $(n_1+n_2)(\nu-1)$. Die Doppelgeraden dieses Komplexes bilden eine Kongruenz von der ϑ_0-ten Ordnung und Klasse.

Es soll noch bemerkt werden, dass die (n_1+n_2) speziellen linearen Komplexe, deren Leitachsen mit den Koinzidenzstrahlen gegebener Korrespondenz auf Φ^ν zusammenfallen, aus unseren Betrachtungen ausgeschieden werden.

Betrachten wir jetzt eine solche Schnittebene ε, welche durch eine einfache Erzeugende $a_1\equiv b_2$ der Fläche Φ^ν geht. Dem Strahle a_1 (resp. b_2) entsprechen n_2 Elemente a_2 (bezw. n_1 Elemente b_1) des n_2-, n_1-deutigen Gebildes und jeder Geraden a_2, b_1-korrespondieren ausser $a_1\equiv b_2$ noch (n_1-1)-, (n_2-1) weitere Strahlen a_1'-, b_2'. Die Ebene ε schneidet die Ge-

[1] Vgl. R. Sturm, Geom. Verwandtschaften, Bd. I, Nr. 180.

raden a_1', a_2, b_2', b_1 in Punkten A_1', A_2, B_2', B_1 und den Träger Φ^ν in einer unikursalen Kurve $(\nu-1)$-ter Ordnung $C^{\nu-1}$. *Die in* ε *liegende Koplexkurve zerfällt in* (n_2+n_1) *Strahlenbüschel um* A_2, B_1 *und in* (s. Nr. 9) *eine Kurve* $(n_1+n_2)(\nu-2)$*-ter Klasse*, welche

$$\vartheta=\tfrac{1}{2}(n_1\nu+n_2\nu-n_1-n_2-3)(n_1\nu+n_2\nu-3n_1-3n_2)+\tfrac{1}{2}(n_1^2+n_2^2-n_1-n_2)$$

Doppeltangenten besitzt. Bemerken wir noch, dass die $n_2(n_1-1)$ Geraden A_2A_1', welche je einen Punkt A_2 mit den (n_1-1) ihm entsprechenden Punkten A_1' verbinden, je einen Strahl a_2 und zwei ihm korrespondierende Elemente a_1, a_1' schneiden. Die $\frac{1}{2}n_2(n_2-1)$ Geraden A_2A_2, welche je zwei Punkte A_2 verbinden, schneiden den Strahl a_1 und je zwei ihm entsprechende Geraden a_2. Die Verbindungslinien A_2A_1' und A_2A_2 sind daher Doppelgeraden unseren Komplexes. Ganz analog ergeben sich auch die $n_1(n_2-1)$ Geraden B_1B_2' und die $\frac{1}{2}n_1(n_1-1)$ Geraden B_1B_1 als Doppelstrahlen des Komplexes. Die n_1n_2 Verbindungsgeraden A_2B_1 schneiden den Strahl $a_1\equiv b_2$ und je zwei verschiedene ihm in beiderlei Sinne entsprechende Strahlen a_2, b_1; sie bilden daher auch Doppeltangenten des betrachteten Komplexes. Die Ebene ε enthält ϑ_1 Doppeltangenten, wo:

$$\vartheta_1=\vartheta+n_2(n_1-1)+\tfrac{1}{2}n_2(n_2-1)+n_1(n_2-1)+\tfrac{1}{2}n_1(n_1-1)+n_1n_2.$$

Es ergeben sich daher die dual entsprechenden *Sätze*:

Auf jeder Ebene, welche durch einen einfachen Strahl des unikursalen Trägers Φ^ν geht, liegen	Durch jeden Punkt, welcher auf einem einfachen Strachle des unikursalen Trägers Φ^ν liegt, gehen

$$\tfrac{1}{2}(n_1\nu+n_2\nu-n_1-n_2-3)(n_1\nu+n_2\nu-3n_1-3n_2)+(n_1^2+n_2^2+3n_1n_2-2n_1-2n_2)$$

Doppelgeraden des betrachteten Komplexes vom Grade $(n_1+n_2)(\nu-1)$.

Geht die Schnittebene ε durch zwei homologe Geraden s_1 und s_2 der Fläche Φ^ν, so bildet $\varepsilon=s_1s_2$ eine singuläre Ebene des Komplexes. Jede Gerade dieser Ebene ist eine Komplexgerade, weil sie zwei korrespondierende Strahlen s_1 und s_2 trifft. Jede Schnittgerade $g=\varepsilon\varphi$ der singulären Ebenen $\varepsilon=s_1s_2$ und $\varphi=t_1t_2$, schneidet zwei Paare entsprechender Strahlen s_1, s_2 und t_1, t_2 und ist daher eine Komplexdoppelgerade. Aus Nr **2** folgt unmittelbar:

Die Paare sich schneidender korrespondierender Strahlen der $[n_1, n_2]$*-deutigen Verwandtschaft auf* Φ^ν *bestimmen* $(n_1+n_2)(\nu-2)$ *singuläre Ebenen und ebensoviele singuläre Punkte des betrachteten Komplexes vom Grade* $(n_1+n_2)(\nu-1)$. *Die* ∞^2 *Strahlen, welche in einer singulären Ebene liegen, oder durch einen singulären Punkt gehen, gehören zu diesem Komplexe. Jede Schnittlinie zweier singulärer Ebenen und jede Verbindungsgerade zweier singulärer Punkte ist eine Doppelgerade dieses Komplexes.*

Dem Strahle s_1 (bezw. s_2) der singulären Ebene $\varepsilon=s_1s_2$ entsprechen ausser s_2 (resp. s_1) noch n_2-1 (bezw. n_1-1) weitere Elemente s_2' $(-s_1')$. Jeder Geraden s_1' $(-s_2')$ entsprechen ausser s_2 $(-s_1)$ noch weitere n_2-1 (resp. n_1-1) Strachlen s_2'' $(-s_1'')$. Die Geraden s_1 und s_2 der Fläche Φ^ν kann man aber als Elemente $b_2\equiv s_1$ und $a_1\equiv s_2$ ansehen. Dem Strahle a_1 (bezw. b_2) entsprechen n_2 Elemente a_2, (resp. n_1 Geraden b_1). Jeder Geraden b_1 $(-a_2)$ korrespondieren ausser b_2 $(-a_1)$ noch n_2-1 (bezw. n_1-1) weitere Strahlen b_2' $(-a_1')$. Die Ebene $\varepsilon=s_1s_2$ schneidet die Strahlen s_1', s_2', s_1'', s_2'', b_1, b_2', a_2 a_1' bezw. in den Punkten S_1', S_2', S_1' S_2'', B_1, B_2', A_2, A_1' und die Trägerfläche Φ^ν ausser s_1, s_2 noch in einer Kurve $(\nu-2)$-ter Ordnung $C^{\nu-2}$. Die in ε liegenden $[n_1, n_2]$-deutigen Punktreihen auf der Schnittkurve $C^{\nu-2}$ erzeugen (Nr. 9) eine Kurve K^* von $(n_1+n_2)(\nu-3)$-ter Klasse und $(n_1-1)(n_2-1)$-tem Geschlechte, welche

$$\vartheta^*=\tfrac{1}{2}(n_1\nu+n_2\nu-2n_1-2n_2-3)(n_2\nu+n_1\nu-4n_1-4n_2)$$
$$+\tfrac{1}{2}(n_1^2+n_2^2-n_1-n_2)$$

Doppeltangenten besitzt. Es folgt unmittelbar:

Die Tangenten der Kurve K^* und die Elemente der $2(n_1+n_2-1)$ Strahlenbüschel im S_1', S_2', B_1, A_2 sind Doppelgeraden des betrachteten Komplexes. Die $(n_1-1)(n_2-1)$ Verbindungsgeraden $S_1'S_2'$ schneiden den Strahl s_1 und je zwei ihm entsprechende Elemente s_2, s_2' und ebenso schneiden sie die Erzeugende s_2 und zwei ihr korrespondierende Elemente s_1, s_1'. Die $(n_1-1)(n_2-1)$ Geraden $S_1'S_2''$ schneiden s_1' (resp. s_2) und zwei entsprechende Elemente s_2, s_2'' (bezw. s_1, s_1'). Die $(n_1-1)(n_2-1)$ Geraden $S_2'S_1''$ schneiden s_2' (bezw. s_1) und zwei homologe Strahlen s_1, s_1'' (resp. s_2, s_2'). Die $\frac{1}{2}(n_1-1)(n_1-2)+\frac{1}{2}(n_2-1)(n_2-2)$ Geraden, welche je zwei Punkte S_1' oder S_2' verbinden, schneiden s_2 (bezw. s_1) und je drei entsprechende Elemente s_1, s_1', s_1' (resp. s_2, s_2' s_2'). Die $n_2(n_1-1)$ Verbindungsgeraden A_2A_1' schneiden ausser s_1 und s_2 noch den Strahl a_2 und je zwei ihm entsprechende Elemente a_1, a_1'. Die $n_1(n_2-1)$ B_1B_2' schneiden s_1, s_2 und noch b_1 und je zwei ihm korrespondierende Geraden b_2, b_2'. Die n_1n_2 Strahlen B_1A_2 schneiden drei Paare homologer Elemente s_1, s_2; b_1, b_2; a_1, a_2. Die $\frac{1}{2}n_1(n_1-1)+\frac{1}{2}n_2(n_2-1)$ Geraden, welche je zwei Punkte B_1 oder je zwei Punkte A_2 verbinden, schneiden ausser s_1 und s_2 noch den Strahl b_2 (bezw. a_1) und je zwei ihm entsprechende Elemente b_1 (resp. a_2). Die $(n_1+n_2)(n_2-1)$ Verbindungsgeraden $S_2'B_1$ und $S_2'A_2$ schneiden s_1 und je zwei homologe Strahlen s_2, s_2' und ebenso schneiden sie noch den Strahl b_1 (resp. a_2) und ihm entsprechenden Strahl b_2 (bezw. a_1). Die $(n_1+n_2)(n_1-1)$ Geraden $S_1'B_1$ und $S_1'A_2$

schneiden s_2 und je zwei homologe Elemente s_1, s_1' und ebenso die Gerade b_1 (bezw. a_2) und ihr entsprechende Gerade b_2 (resp. a_1). Die ϑ^* Doppeltangenten der Kurve K^* schneiden, ausser s_1 und s_2, noch einen Strahl des n_1-, n_2-deutigen Gebildes und zwei ihm entsprechende Geraden des n_2-, n_1-deutigen Gebildes, oder zwei Paare homologer Elemente der $[n_1, n_2]$-deutigen Verwandtschaft auf Φ^ν.

Ganz analog ergeben sich die speziellen Eigenschaften $(n_1+n_2)(\nu-2)$ singulärer Punkte des betrachteten Komplexes von $(n_1+n_2)(\nu-1)$-tem Grade.

Bemerkung: Auf jeder singulären Ebene $\varepsilon = s_1 s_2$ der in Nr. 5 p. 197 betrachteten Kongruenz liegen die $n_1\nu_2 + n_2\nu_1 - (n_1+n_2)$ dort angegebenen Geraden, welche Doppelstrahlen dieser Kongruenz sind. — Dem Strahle s_1 (resp. s_3) entsprechen ausser s_2 (bezw. s_1) noch $n_2 - 1$ (resp. $n_1 - 1$) weitere Strahlen s_2' $(-s_1')$. Für $S_2' = \varepsilon s_2'$ und $S_2' = \varepsilon s_1'$ erhalten wir noch (n_1+n_2-2) auf ε liegende Doppelkongruenzstrahlen. Die Ebene ε enthält ∞^1 Kongruenzstrahlen, welche einen Büschel um $P_0 = p_0\varepsilon$ bilden.

Um $(\nu_1+\nu_2)$ weitere singuläre Ebenen dieser Kongruenz zu erhalten, bemerken wir dass die feste Gerade p_0 ν_1 Ezzeugenden $a_1, \ldots$ der Fläche Φ^{ν_2} und ν_2 Erzeugenden $d_2, \ldots$ dec Fläche Φ^{ν_2} trifft. Es lässt sich leicht erkennen — (vergl. ganz analoge Untersuchungen in Nr. 15 p. 215 für die Ebene ε, welche durch eine einfache Erzeugende a_1 der Fläche Φ^{ν_1} geht) — dass die Ebenen $p_0 a_1, \ldots$ $p_0 d_2, \ldots$ singuläre Elemente unserer Kongruenz bilden.

STRESZCZENIE.

Praca niniejsza składa się z trzech części. W części pierwszej omawiam ogólne własności $[n_1, n_2]$-znacznych odpowiedniości, zachodzących pomiędzy elementami dwoch jednobieżnych utworów podstawowych. Równocześnie wysławiam odnośne twierdzenia dla wieloznacznych odpowiedniości $]n_1, n_2]$, ustalonych dla elementów jednego i tego samego utworu zasadniczego rodzaju zerowego. Podstawami rozważanych odpowiedniości są jednobieżne krzywe płaskie i skośne, oraz powierzchnie rozwijalne i skośne. W części drugiej badam własności krzywych (płaskich, skośnych) i powierzchni (skośnych, rozwijalnych) rodzaju $(n_1-1)(n_2-1)$-go, jako utworów powyżej omawianych odpowiedniości wieloznacznych. W części trzeciej przechodzę do Geometryi linii prostej i podaję własności kompleksów wyższych stopni linij prostych, przecinających odpowiednie elementy $[n_1, n_2]$-znacznych odpowiedniości, zachodzących pomiędzy promieniami dwóch różnych utworów, wzgl. jednego i tego samego utworu podstawowego rodzaju zerowego.

STEFAN MAZURKIEWICZ.

O związku między istnieniem drugiej pochodnej uogólnionej, a ciągłością funkcyi.

Sur la relation entre l'existence de la dérivée seconde généralisée et la continuité de la fonction.

Wiadomo, że funkcya zmiennej rzeczywistej może być w pewnym punkcie x nieciągła, a zarazem posiadać w punkcie tym drugą pochodną uogólnioną, t. zn. granicę:

$$\lim_{h=0} \frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}. \qquad (1)$$

Przykładem takiego zachowania się są w punkcie $x=0$ funkcye:

$$y = \operatorname{sgn} x$$

oraz:

$$y = \sin\frac{1}{x} \qquad \text{dla} \qquad x \neq 0,$$

$$y = 0 \qquad \text{dla} \qquad x = 0.$$

Jeżeli nie zrobimy żadnych zastrzeżeń co do natury rozważanych funkcyj, wówczas okoliczność powyższa, t. zn. nieciągłość a równocześnie istnienie drugiej pochodnej uogólnionej, zachodzić może nawet we wszystkich punktach pewnego przedziału, czego przykładem są t. zw. funkcye Hamela[1]), t. zn. nieciągłe rozwiązania równania funkcyjnego:

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

---

[1]) Hamel, Math. Ann. 60, str. 459—462. Sierpiński, Prace mat.-fiz. 26, str. 128—129.