ALFRED ROSENBLATT.

Sur les problèmes irréguliers du calcul des variations.

O zagadnieniach nieregularnych Rachunku waryacyjnego.

---

1. On appelle problèmes irréguliers les problèmes du calcul des variations qui conduisent à une extrémale singulière, c'est à dire, telle que l'équation de Lagrange possède une singularité pour cette extrémale entre les points A, B que joint cette extrémale. Soit

$$I = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y')\, dx \tag{1}$$

l'intégrale qu'il s'agit de rendre maximum ou minimum. L'équation de Lagrange est

$$y'' f_{y'^2} + y' f_{y'y} + f_{xy'} - f_y = 0\,, \tag{2}$$

et l'extrémale singulière $y = \varphi(x)$ annulle $f_{y'^2}(x, y, y')$ à l'intérieur ou aux limites de l'intervalle (x_0, x_1).

Nous n'envisageons dans ce travail que les cas, où la fonction $f(x, y, y')$ est analytique en x, y, y' et où de plus l'équation (2) de Lagrange est linéaire. On peut, dans ce cas particulier, employer les équations intégrales,[1] mais dans le cas des points singuliers de l'équation (2) les équations intégrales correspondantes sont singulières, et si les points singuliers sont des points d'indétermination, on ne peut plus appliquer la théorie de Fredholm. Il faudrait se servir de la méthode compliquée des formes quadratiques à une infinité de variables.

---

[1]) Hilbert, „Bemerkungen zur Variationsrechnung". Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1905.

2. Nous avons donc la fonction

$$f(x,\ y,\ y') = L(x,\ y) + M(x,\ y)\, y' + N(x)\, y'^2, \tag{3}$$

et on a de plus

$$\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} = S(x)\, y + T(x),$$

donc

$$L(x,\ y) = \int \frac{\partial M}{\partial x}\, dy - S(x)\frac{y^2}{2} - T(x)\, y + U(x). \tag{4}$$

D'autre part il est évident que la fonction (3), où l'on a remplacé $L(x, y)$ par la fonction (4) et ou $M(x, y)$ est une fonction arbitraire, donne l'équation linéaire de Lagrange

$$R(x)\, y'' + R'(x)\, y' + S(x)\, y + T(x) = 0 \tag{5}$$

où $R(x) = 2N(x)$. L'équation de Jacobi qui correspond à cette équation s'obtient en posant $T(x) \equiv 0$.

Supposons maintenant que $x = \xi$ soit un point singulier de l'équation de Lagrange situé à l'intérieur ou bien à la frontière de l'intervalle (x_0, x_1). Nous avons les développements

$$\begin{aligned} R(x) &= (x-\xi)^r R_1(x-\xi), & R_1(0) &= r_0 \neq 0, \\ S(x) &= (x-\xi)^s S_1(x-\xi), & S_1(0) &= s_0 \neq 0, \\ T(x) &= (x-\xi)^t T_1(x-\xi), & T_1(0) &= t_0 \neq 0, \end{aligned} \tag{6}$$

r étant un nombre entier positif, s, t étant zéro ou positifs, et les coëfficients des développements que l'on suppose convergents dans un certain intervalle étant supposés réels. Écrivons l'équation (5) sous forme normale

$$(x-\xi)^2 y'' + (x-\xi) P(x-\xi)\, y' + Q(x-\xi)\, y + U(x-\xi) = 0, \tag{7}$$

dans laquelle

$$\begin{aligned} P(x-\xi) &= (x-\xi)^p P_1(x-\xi), & P_1(0) &= p_0 \neq 0, \\ Q(x-\xi) &= (x-\xi)^q Q_1(x-\xi), & Q_1(0) &= q_0 \neq 0, \\ U(x-\xi) &= (x-\xi)^u U_1(x-\xi), & U_1(0) &= u_0 \neq 0. \end{aligned}$$

On a

$$p = 0, \quad q = 2 + s - r, \quad u = 2 + t - r;\ p_0 = r, \quad q_0 = \frac{s_0}{r_0}, \quad u_0 = \frac{t_0}{r_0}.$$

3. Rappellons maintenant les résultats classiques concernant l'équation (7). Nous étudierons l'équation homogène obtenue en posant

$U(x-\xi) \equiv 0$. Nous avons à distinguer les deux cas suivant que l'on a $q \geqq 0$ ou bien $q < 0$. Dans le premier cas le point $x = \xi$ est point de détermination (de Fuchs), dans le second cas c'est un point d'indétermination.

I cas $q \geqq 0$. On envisage l'équation déterminante fondamentale de Fuchs

$$\rho(\rho - 1) + \rho P(0) + Q(0) = 0, \tag{8}$$

dont les racines sont

$$\rho_{1,\,2} = \tfrac{1}{2}\left[1 - P(0) \pm \sqrt{[1-P(0)]^2 - 4Q(0)}\right], \tag{9}$$

$P(0) = p_0 = r \neq 0$ et on a les trois sous-cas suivants:

1) Les racines ρ_1, ρ_2 sont distinctes et réelles. Alors le système fondamental d'intégrales de l'équation peut s'écrire

$$\begin{aligned} y_1 &= (x-\xi)^{\rho_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-\xi)^k, \\ y_2 &= (x-\xi)^{\rho_2}\Big[\sum_{k=0}^{\infty} d_k (x-\xi)^k + c\,(x-\xi)^{\rho_1-\rho_2} \log(x-\xi)\,. \\ &\quad . \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-\xi)^k\Big]. \end{aligned} \tag{10}$$

Les séries sont à coëfficients réels et de même c est un nombre réel. On a $c_0 \neq 0$, $d_0 \neq 0$, mais c peut être égal à zéro. Si $q > 0$ on a $Q(0) = 0$, donc $P(0) = p_0 = r > 1$. Alors $\rho_1 = 0$, tandis que $\rho_2 = 1 - r$ est négatif. Alors l'intégrale y_1 représente une courbe finie égale à c_0 pour $x = \xi$, tandis que y_2 devient infini pour cette valeur $x = \xi$. Si $q = 0$, ρ_1 et ρ_2 sont différents de zéro et on a pour $Q(0) = q_0 > 0$, $\rho_1 < 0$ et $\rho_2 < 0$, tandis que l'on a $\rho_1 > 0$, $\rho_2 < 0$, si q_0 est < 0.

2) Les racines ρ_1, ρ_2 sont égales, donc $c \neq 0$. On a ainsi

$$[1 - P(0)]^2 - 4Q(0) = 0,$$

donc $Q(0) = q_0 > 0$ ou bien $q_0 = 0$ et $P(0) = r = 1$. Donc si q est égal à 0 on a $p_0 = r > 1$ et $\rho_1 = \rho_2 = 1 - r < 0$, et si q est > 0 on a $\rho_1 = \rho_2 = 0$. Ou n'a donc de courbe intégrale finie pour $x = \xi$ que si $q > 0$, $r = 1$, savoir la courbe donnée par l'intégrale y_1.

3) Les racines ρ_1, ρ_2 sont imaginaires conjuguées. On a donc $Q(0) > 0$, $q = 0$ et les parties réelles ρ' des racines $\rho' \pm i\rho''$ sont néga-

tives ou zéro suivant que $r > 1$ ou bien $r = 1$. Nous avons donc les deux intégrales

$$(x-\xi)^{\rho' \pm i\rho''}\left[P'(x-\xi) \pm i P''(x-\xi)\right],$$

$P'(x-\xi)$, $P''(x-\xi)$ étant deux séries de puissances à coëfficients réels. On en deduit les deux intégrales reelles

$$\begin{aligned} y_1 &= (x-\xi)^{\rho'} e^{\Pi'(x-\xi)} \cos\left[\rho'' \log(x-\xi) + \Pi''(x-\xi)\right], \\ y_2 &= (x-\xi)^{\rho'} e^{\Pi'(x-\xi)} \sin\left[\rho'' \log(x-\xi) + \Pi''(x-\xi)\right], \end{aligned} \tag{11}$$

$\Pi'(x-\xi)$, $\Pi''(x-\xi)$ étant des séries de puissances à coëfficients réels. Quand x tend vers ξ, les deux intégrales oscillent une infinité de fois entre des valeurs positives et des valeurs négatives, ces valeurs tendant vers $+\infty$ et vers $-\infty$, si ρ' et négatif et vers deux valeurs c et $-c$, si ρ' est égal à zéro.

II cas $q < 0$. Le point $x = \xi$ est point d'indétermination (de Fuchs). Supposons plus généralement l'équation

$$\begin{gathered} (x-\xi)^2 y'' + (x-\xi)\left[\Phi(x-\xi) + P(x-\xi)\right] y' + \left[\Psi(x-\xi) + Q(x-\xi)\right] y = 0, \\ \Phi(x-\xi) = \alpha_{-p}(x-\xi)^{-p} + \ldots + \alpha_0, \\ \Psi(x-\xi) = \beta_{-q}(x-\xi)^{-q} + \ldots + \beta_0, \end{gathered} \tag{12}$$

$P(x-\xi)$, $Q(x-\xi)$ étant des séries entiéres s'annullant pour $x = \xi$. La fonction „caractéristique" de Fuchs est

$$\begin{aligned} (x-\xi)^{\rho}\left[\rho(\rho-1) + \rho(\Phi(x-\xi) + P(x-\xi)) + \Psi(x-\xi) + Q(x-\xi)\right] \\ = (x-\xi)^{\rho} \sum_{\lambda=(-p,\,-q)}^{+\infty} f_\lambda(\rho)(x-\xi)^{\lambda}. \end{aligned}$$

$(-p, -q)$ étant le plus petit des nombres $-p$, $-q$. Pour que l'équation (12) soit satisfaite par une expression analytique

$$y = (x-\xi)^{\rho} \sum_{i=0}^{\infty} c_i (x-\xi)^i, \tag{13}$$

il faut et il suffit que ρ satisfasse à l'équation

$$f_{(-p,\,-q)}(\rho) \equiv \rho\,\alpha_{(-p,\,-q)} + \beta_{(-p,\,-q)} = 0, \tag{14}$$

et que les constantes c_i soient déterminées par les équations

$$\sum_{i=0}^{\nu-(-p,\,-q)} c_i f_{\nu-i}(\rho+i) = 0, \quad \nu = (-p, -q), \ldots +\infty. \tag{15}$$

Si la série entière converge, l'expression (13) représente une intégrale de l'équation (12) pour laquelle $x = \xi$ est un point de détermination.

Nous avons ainsi deux cas à distinguer

1-cas: $p \geqq q$, donc $\alpha_{(-p,\,-q)} = \alpha_{-p} \neq 0$. On obtient ρ et les coëfficients c_i, $i = 1, 2 \ldots$ d'une manière univoque, le coëfficient c_0 étant arbitraire.

2-cas: $p < q$. Alors il n'existe pas d'intégrale de l'équation (12) pour laquelle $x = \xi$ soit un point de détermination. Déterminons un nombre k, de manière que l'on ait

$$p \leqq k+1, \qquad q \leqq 2(k+1)$$

et que l'on ait au moins une égalité. Ce nombre $k+1$ est appellé par Poincaré rang de l'équation différentielle (12). Mais il peut arriver que k ne peut pas être un nombre entier, ce qui arrive quand q est plus grand que $2p$ et est un nombre impair (p. ex. $p = 0$, $q = 1$). Nous admetterons que k puisse être une fraction et nous appellerons toujours $k+1$ le rang de l'équation (12).

La transformation

$$y = e^{\int \frac{w(x)}{(x-\xi)^{k+2}} dx} \tag{16}$$

transforme l'équation (12) en une équation de Riccati

$$\begin{aligned} (x-\xi)^{k+2} \frac{dw}{dx} + w^2 - (k+2)(x-\xi)^{k+1} w \\ + (\alpha_{-(k+1)} + \alpha_{-k}(x-\xi) + \ldots) w + (\beta_{-2(k+1)} + \beta_{-2k-1}(x-\xi) + \ldots) = 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Si k est fractionnaire, on remplacera $\alpha_{-(k+1)}$, $\alpha_{-k}, \ldots$ par

$$\alpha_{-k-\frac{1}{2}}(x-\xi)^{\frac{1}{2}}, \quad \alpha_{-k+\frac{1}{2}}(x-\xi)^{\frac{3}{2}}, \ldots.$$

Remplaçons maintenant w par le développement

$$w = \sum_{i=0}^{+\infty} c_i (x-\xi)^i \tag{18}$$

en cas de k entier et par le développement

$$w = \sum_{i=0}^{+\infty} d_i (x-\xi)^i + \sum_{i=0}^{+\infty} e_i (x-\xi)^{i+\frac{1}{2}} \tag{19}$$

en cas de k fractionnaire.

Nous avons dans le premièr cas, pour déterminer c_0 l'équation du 2-d degré

$$c_0^2 + \alpha_{-(k+1)}\, c_0 + \beta_{-2(k+1)} = 0. \tag{20}$$

Si cette équation a ses racines distinctes, alors à chaque racine correspondent des nombres déterminés $c_1, c_2, \ldots$ En effet, on a la formule de récurrence

$$(2c_0 + \alpha_{-(k+1)})\, c_i + \varphi(c_0, c_1, \ldots c_{i-1}) = 0, \tag{21}$$
$$i = 1, 2, \ldots$$

Dans le second cas le remplacement de w par l'expression (19) conduit aux équations

$$[d_0 + d_1(x-\xi) + \ldots]^2 + (x-\xi)\,[e_0 + e_1(x-\xi) + \ldots]^2 + (x-\xi)^{k+\frac{3}{2}}$$
$$\cdot[\tfrac{1}{2} e_0 + \tfrac{3}{2} e_1 (x-\xi) + \ldots] - (k+2)(x-\xi)^{k+\frac{3}{2}}[e_0 + e_1(x-\xi) + \ldots]$$
$$+ (x-\xi)\,[\alpha_{-k-\frac{1}{2}} + \alpha_{-k+\frac{1}{2}}(x-\xi) + \ldots]\,[e_0 + e_1(x-\xi) + \ldots]$$
$$+ [\beta_{-2(k+1)} + \beta_{-2k-1}(x-\xi) + \ldots] = 0,$$

$$2(x-\xi)^{\frac{1}{2}}[d_0 + d_1(x-\xi) + \ldots]\,[e_0 + e_1(x-\xi) + \ldots] + (x-\xi)^{k+2}$$
$$\cdot[d_1 + 2d_2(x-\xi) + \ldots] - (k+2)(x-\xi)^{k+1}[d_0 + d_1(x-\xi) + \ldots]$$
$$+ (x-\xi)^{\frac{1}{2}}[\alpha_{-k-\frac{1}{2}} + \alpha_{-k+\frac{1}{2}}(x-\xi) + \ldots]\,[d_0 + d_1(x-\xi) + \ldots] = 0.$$

On détermine d'abord d_0 donné par l'équation

$$d_0^2 + \beta_{-2(k+1)} = 0. \tag{22}$$

Ensuite on détermine tous les d_i au moyen de la première équation et tous les e_i an moyen de la seconde. On a

$$2 d_0 d_i + \varphi(d_0, \ldots, d_{i-1};\ e_0, \ldots, e_{i-1}) = 0,$$

$$2 d_0 e_i + \psi(d_0, \ldots, d_i;\ e_0, \ldots, e_{i-1}) = 0.$$

Tous les coëfficients e_i peuvent être nuls. Si l'on change le signe de d_0, le signe de tous les d_i est changé, et les e_i restent les mêmes. C'est

ce que montrent directement les équations précédentes. Donc les e_i sont toujours réels.

On obtient ainsi dans le premier cas des expressions

$$y_1 = e^{-M_1(x-\xi)}\,(x-\xi)^{c_{1,\,k+1}} \sum_{i=0}^{+\infty} f_{1,\,i}(x-\xi)^i,$$

$$y_2 = e^{-M_2(x-\xi)}\,(x-\xi)^{c_{2,\,k+1}} \sum_{i=0}^{+\infty} f_{2,\,i}(x-\xi)^i, \tag{23}$$

$$M_1(x-\xi) = \frac{c_{1,\,0}}{(k+1)(x-\xi)^{k+1}} + \ldots + \frac{c_{1,\,k}}{(x-\xi)},$$

$$M_2(x-\xi) = \frac{c_{2,\,0}}{(k+1)(x-\xi)^{k+1}} + \ldots + \frac{c_{2,\,k}}{(x-\xi)}.$$

dans lesquelles $c_{1,\,0}$, $c_{2,\,0}$ sont les deux racines supposées distinctes de l'équation (20). Si les séries (18) convergent, les séries qui figurent dans les expressions (23) convergent aussi et on a deux intégrales normales de l'équation (12).

Dans le second cas on a de même les deux expressions

$$y_1 = e^{-\frac{1}{(x-\xi)^{\frac{1}{2}}} M_1(x-\xi) - N_1(x-\xi)} \cdot (x-\xi)^{e_{1,\,k+\frac{1}{2}}}$$
$$\cdot\left[\sum_{i=0}^{+\infty} f_{1,\,i}(x-\xi)^i + (x-\xi)^{\frac{1}{2}} \cdot \sum_{i=0}^{+\infty} g_{1,\,i}(x-\xi)^i\right],$$
$$y_2 = e^{-\frac{1}{(x-\xi)^{\frac{1}{2}}} M_2(x-\xi) - N_2(x-\xi)} \cdot (x-\xi)^{e_{2,\,k+\frac{1}{2}}} \tag{24}$$
$$\cdot\left[\sum_{i=0}^{+\infty} f_{2,\,i}(x-\xi)^i + (x-\xi)^{\frac{1}{2}} \sum_{i=0}^{+\infty} g_{2,\,i}(x-\xi)^i\right],$$

dans lesquelles $M_1(x-\xi)$, $M_2(x-\xi)$, $N_1(x-\xi)$, $N_2(x-\xi)$ signifient les expressions

$$M_1(x-\xi) = \frac{d_{1,\,0}}{(k+1)(x-\xi)^{k+\frac{1}{2}}} + \ldots + \frac{d_{1,\,k+\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}},$$
$$M_2(x-\xi) = \frac{d_{2,\,0}}{(k+1)(x-\xi)^{k+\frac{1}{2}}} + \ldots + \frac{d_{2,\,k+\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}, \tag{25}$$

$$N_1(x-\xi)=\frac{e_{1,\,0}}{(k+\frac{1}{2})(x-\xi)^{k+\frac{1}{2}}}+\ldots+\frac{e_{1,\,k-\frac{1}{2}}}{(x-\xi)},$$
$$N_2(x-\xi)=\frac{e_{2,\,0}}{(k+\frac{1}{2})(x-\xi)^{k+\frac{1}{2}}}+\ldots+\frac{e_{2,\,k-\frac{1}{2}}}{(x-\xi)}. \tag{26}$$

Si les séries (19) convergent, les expressions (24) représentent deux intégrales anormales de l'équation (12). Les coëfficients $d_{1,\,0}$, $d_{2,\,0}$ sont les racines de l'équation (22). Si $q<2p$, alors $\beta_{-2(k+1)}$ est égal à zéro, et si $\beta_{-2(k+1)+f}$, $f<k+1$ est le premier des coëfficients β différent de zéro, on a $c_{i,\,0}=c_{i,\,1}=\ldots=c_{i,\,f-1}=0$, $c_{i,\,f}\neq 0$. Si l'on a $q=p$, alors $\beta_{-(k+1)}$ est le premier coëfficient β différent de zéro, et on a $c_{i,\,k+1}\neq 0$. On a alors l'équation (14) et une intégrale qui, si la série (13) converge, se comporte au voisinage de $x=\xi$ d'une manière déterminée. Si $q<p$, $\beta_{-(k+1)+g}\neq 0$, $g>0$, alors on a $\rho=0$ et une intégrale régulière.

Les nombres $c_{1,\,0}$, $c_{2,\,0}$ ou bien $d_{1,\,0}$, $d_{2,\,0}$ pouvent être réels ou bien conjugués complexes.

4. Revenons maintenant à notre équation (7). Si l'on a $q<0$, donc $r>2$, alors les coëfficients α_{-p}, $\alpha_{-p+1},\ldots$ du N-ro précédent sont égaux à zero. L'équation (20) en cas de $q=2(k+1)$ pair et l'équation (22) en cas de q impair donnent deux nombres distincts réels ou imaginaires conjugués. Ces nombres sont réels, si $q_0<0$, et imaginaires, si q_0 est >0. On obtient dans ce dernier cas dans le cas des intégrales normales un système fondamental réel en posant

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{-M'(x-\xi)+F'(x-\xi)}(x-\xi)^{c'_k}\cos\left[-M''(x-\xi)\right.\\ &\qquad \left.+c''_k\log(x-\xi)+F''(x-\xi)\right],\\ y_2 &= e^{-M'(x-\xi)+F'(x-\xi)}(x-\xi)^{c'_k}\sin\left[-M''(x-\xi)\right.\\ &\qquad \left.+c''_k\log(x-\xi)+F''(x-\xi)\right], \end{aligned} \tag{27}$$

où l'on a

$$M_{1,\,2}(x-\xi)=M'(x-\xi)\pm iM''(x-\xi),$$
$$\log F_{1,\,2}(x-\xi)=F'(x-\xi)\pm iF''(x-\xi),$$
$$c_{1,\,2,\,k}=c'_k\pm i\,c''_k.$$

De même on obtient un système fondamental réel dans le cas des intégrales anormales. Ce système aura la forme

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{-\frac{1}{(x-\xi)^{\frac{1}{2}}}M'(x-\xi)-N'(x-\xi)+F'(x-\xi)+(x-\xi)^{\frac{1}{2}}G'(x-\xi)}\\ &\cdot(x-\xi)^{e_{k+\frac{1}{2}}}\cos\Big[-\frac{1}{(x-\xi)^{\frac{1}{2}}}M''(x-\xi)-N''(x-\xi)+e''_{k+\frac{1}{2}}\log(x-\xi)\\ &\qquad +F''(x-\xi)+(x-\xi)^{\frac{1}{2}}G''(x-\xi)\Big],\\ y_2 &= e^{-\frac{1}{(x-\xi)^{\frac{1}{2}}}M'(x-\xi)-N'(x-\xi)+F'(x-\xi)+(x-\xi)^{\frac{1}{2}}G'(x-\xi)}\\ &\cdot(x-\xi)^{e'_{k+\frac{1}{2}}}\sin\Big[-\frac{1}{(x-\xi)^{\frac{1}{2}}}M''(x-\xi)-N''(x-\xi)+e''_{k+\frac{1}{2}}\log(x-\xi)\\ &\qquad +F''(x-\xi)+(x-\xi)^{\frac{1}{2}}G''(x-\xi)\Big] \end{aligned} \tag{28}$$

ou l'on a

$$M_{1,\,2}(x-\xi)=M'(x-\xi)\pm iM''(x-\xi),$$
$$N_{1,\,2}(x-\xi)=N'(x-\xi)\pm iN''(x-\xi),$$
$$e_{1,2\;k+\frac{1}{2}}=e'_{k+\frac{1}{2}}\pm i\,e''_{k+\frac{1}{2}}.$$

A gauche du point $x=\xi$ on aura des intégrales réelles en remplaçant dans le cas du point de détermination $(x-\xi)^{\rho_1}$ et $(x-\xi)^{\rho_2}$ par $(\xi-x)^{\rho_1}$, $(\xi-x)^{\rho_2}$ et $\log(x-\xi)$ par $\log(\xi-x)$. Dans le cas du point d'indétermination on remplace dans les intégrales normales $(x-\xi)^{c_{1,\,k+1}}$ par $(\xi-x)^{c_{2,\,k+1}}$, $(x-\xi)^{c_{2,\,k+1}}$ par $(\xi-x)^{c_{2,\,k+1}}$, $\log(x-\xi)$ par $\log(\xi-x)$, dans les intégrales anormales $(x-\xi)^{\frac{1}{2}}$ par $(\xi-x)^{\frac{1}{2}}$, $(x-\xi)^{e_{1,\,k+\frac{1}{2}}}$, $(x-\xi)^{e_{2,\,k+\frac{1}{2}}}$ par $(\xi-x)^{e_{1,\,k+\frac{1}{2}}}$, $(\xi-x)^{e_{2,\,k+\frac{1}{2}}}$, en obtenant de nouvelles intégrales.

5. Nous étudierons maintenant les théorêmes de Sturm concernant les zéros des intégrales réelles d'une équation différentielle linéaire dans le cas des singularités. On sait que si u_1, u_2 sont deux intégrales d'une équation linéaire du second ordre

$$\frac{d^2u}{dx^2}+P(x)\frac{du}{dx}+Q(x)\,u=0, \tag{29}$$

et si l'on désigne par $D(x)$ le déterminant fonctionnel

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u'_1 & u'_2 \end{vmatrix}=u_1u'_2-u_2u'_1,$$

on a

$$D(x) = Ce^{-\int_{\xi}^{x} P(x)\,dx}. \tag{30}$$

Tant que le coëfficient $P(x)$ est continu on a $D(x) \neq 0$, si la constante C est différente de zéro. Donc dans tout intervalle de continuité de $P(x)$, $D(x)$ ne peut devenir nul, si C n'est pas nul. Mais si C est nul, u_1 et u_2 sont linéairement dépendants.

De l'équation (30) on déduit le théoréme de Sturm:

„Entre deux racines consécutives de $u_1(x)$ situées dans l'intervalle de continuité de $P(x)$ on a une racine et une seule de $u_2(x)$".

Supposons maintenant le point $x = \xi$ singulier. Nous avons les deux cas.

I. $q \geqq 0$. Le point $x = \xi$ est un point de détermination,

a) ρ_1, ρ_2 réels, différents.

Nous avons

$$u_1 u'_2 - u_2 u'_1 = c_0 d_0 (\rho_2 - \rho_1)(x - \xi)^{\rho_1 + \rho_2 - 1}[1 + \sigma(x - \xi)],$$

$\sigma(x - \xi)$ tendant vers zéro avec $x - \xi$. Soit $q = 0$ et $q_0 < 0$, alors on a $\rho_1 > 0$, $\rho_2 < 0$. Donc u_1 s'évanouit pour $x = \xi$. Soit ξ' le zéro le plus prochain de ξ à droite de ξ. Soit C positif, alors $c_0 d_0$ est négatif. Supposons $u_1(x)$ positif dans l'intervalle (ξ, ξ'), alors $c_0 > 0$, donc $d_0 < 0$. Au point $x = \xi'$, $-u_2 u'_1$ a le signe de C, donc est positif. Mais $u_1(x)$ étant positif dans l'intervalle (ξ, ξ') $u'_1(x)$ est positif pour $x = \xi$ et négatif pour $x = \xi'$, donc $u_2(x)$ est positif pour $x = \xi'$. Mais $u_2(x)$ est négatif au voisinage de $x = \xi$, puisque $d_0 < 0$ et devient infini négatif, lorsque x tend vers ξ. Donc $u_2(x)$ s'évanouit à l'intérieur de l'intervalle (ξ, ξ').

De même lorsque l'on a $q > 0$, $q_0 = 0$, $\rho_1 = 0$, $\rho_2 < 0$, l'intégrale $u_2(x)$ s'évanouit entre ξ et ξ', et de même lorsque l'on a $q = 0$, $q_0 > 0$, $\rho_1 < 0$, $\rho_2 < 0$, l'intégrale $u_2(x)$ s'évanouit entre ξ et ξ', mais dans ce cas il n'y a pas d'intégrale finie pour $x = \xi$.

b) ρ_1, ρ_2 réels égaux.

Nous avons

$$u_1 u'_2 - u_2 u'_1 = c c_0 (x - \xi)^{2\rho - 1}[1 + \sigma(x - \xi)].$$

On a $q = 0$, $q_0 > 0$, $\rho_1 = \rho_2 < 0$, ou bien $q > 0$, $q_0 = 0$, $\rho_1 = \rho_2 = 0$. Soit $D > 0$ alors $c c_0$ est positif. Supposons c_0 positif, alors $u_1(x)$ est positif dans (ξ, ξ'), donc $u'_1(x)$ est négatif au point ξ', donc $u_2(\xi') > 0$. Mais $\log(x - \xi)$ est négatif pour $x = \xi + \varepsilon$, donc $u_2(x)$ tend vers $-\infty$, lorsque x tend vers 0. L'intégrale $u_1(x)$ reste finie ou bien tend vers $+\infty$, lorsque x tend vers ξ. Donc $u_2(x)$ s'évanouit entre ξ et ξ'.

c) ρ_1, ρ_2 imaginaires conjugués.

Les intégrales (11) s'évanouissent pour

$$\rho'' \log(x - \xi) + \Pi''(x - \xi) = -k\pi + \frac{\pi}{2},$$

et pour

$$\rho'' \log(x - \xi) + \Pi''(x - \xi) = -k\pi,$$

k étant un entier arbitraire. Donc on a les expressions

$$x - \xi = e^{\left[-k\pi + \frac{\pi}{2}\right]\frac{1}{\rho''}}[1 + \varepsilon(k)],$$

$$x - \xi = e^{-k\pi \cdot \frac{1}{\rho''}}[1 + \varepsilon(k)],$$

qui tendent vers zéro, lorsque k augmente indéfiniment.

Entre deux zéros consécutifs d'une intégrale il y a un zéro et seulement un zéro de l'autre intégrale, et les zéros de toutes les intégrales tendent vers $x = \xi$ qui est un point d'accumulation.

II. $q < 0$. Le point $x = \xi$ est un point d'indétermination.

a) $p \geqq q$. Quoique ce cas ne puisse arriver dans le cas de l'équation de Lagrange (7), il y a lieu de l'étudier. On a

$$u_1 u'_2 - u_2 u'_1 = \alpha_{-p} c_0 f_0 (x - \xi)^{\rho - p - 1} e^{-M_1(x - \xi)}$$
$$\cdot (x - \xi)^{c_{1,k}}[1 + \varphi(x - \xi)],$$

si $u_1(x)$ est l'intégrale qui est indéterminée au point $x = \xi$ et $u_2(x)$ l'intégrale déterminée. La fonction $\varphi(x - \xi)$ tend vers zéro avec $x - \xi$. On a $\rho = -\frac{\beta_{-p}}{\alpha_{-p}}$, lorsque $p = q$, et $\rho = 0$, lorsque $p > q$.

Soit $f_0 > 0$, donc $u_1(x) > 0$ dans (ξ, ξ'), ξ' étant le zéro le plus voisin de $x = \xi$. Soit aussi $C > 0$. Alors on a $\alpha_{-p} c_0 > 0$, $u'_1(\xi') < 0$. Mais on a

$$-(u_2 u'_1)_{\xi'} > 0,$$

donc on a $u_2(\xi') > 0$. On a $c_0 < 0$, lorsque l'on a $\alpha_{-p} < 0$ et $c_0 > 0$, lorsque l'on a $\alpha_{-p} > 0$. Donc l'intégrale u_2 coupe l'axe des x, lorsque l'on a $\alpha_{-p} < 0$ et ne coupe pas cet axe en cas de $\alpha_{-p} > 0$. Cela veut dire que si $c_{1,0} = -\alpha_{-p}$ est positif, donc si u_1 tend vers zéro, u_2 coupe l'axe des x et ne coupe pas cet axe, lorsque $c_{1,0} = -\alpha_{-p}$ est négatif, donc si u_1 tend vers l'infini positif.

On peut donc dire que l'intégrale qui tend plus vite vers l'infini ou bien qui tend moins vite vers zéro coupe l'axe des x entre ξ et le zéro suivant de l'autre intégrale. Dans le cas d' indétermination il en est de même. On peut dire que lorsque $\frac{u_1}{u_2}$ tend vers zéro, alors $u_2(x)$ s'annulle devant u_1, c'est à dire le zéro le plus prochain de ξ est celui de u_2; si $\frac{u_1}{u_2}$ tend vers l'infini, les choses se passent inversement. Si $\frac{u_1}{u_2}$ ne tend vers aucune limite, toutes les intégrales ont une infinité de zéros.

b) $p < q$. On a trois cas à distinguer $2p \lesseqgtr q$. Nous avons aussi à distinguer le cas des intégrales réelles du cas des intégrales imaginaires.

A. Intégrales réelles:

α) $2p \leqq q$. On a

$$u_1 u'_2 - u_2 u'_1 = f_{0,1} \cdot f_{2,0} (c_{2,0} - c_{1,0}) (x - \xi)^{c_{1,k+1} + c_{2,k+1} - k - 2}$$
$$\cdot e^{-M_1(x-\xi) - M_2(x-\xi)} \cdot [1 + \sigma(x - \xi)]$$

en cas des intégrales normales, et

$$u_1 u'_2 - u_2 u'_1 = f_{10} f_{20} (d_{20} - d_{10}) (x - \xi)^{e_{1,k+\frac{1}{2}} + e_{2,k+\frac{1}{2}} - k - 2}$$
$$\cdot e^{-\frac{1}{(x-\xi)^{\frac{1}{2}}}[M_1(x-\xi) + M_2(x-\xi)] - N_1(x-\xi) - N_2(x-\xi)} \cdot [1 + \sigma(x - \xi)]$$

en cas des intégrales anormales. Soit $c_{1,0} > c_{2,0}$. Soit $f_{1,0} > 0$, donc $u_1(x)$ positif dans l'intervalle (ξ, ξ'), et $C > 0$. Alors au point ξ' on a

$$-(u_2 u'_1)_{\xi'} > 0,$$

donc $u_2(\xi')$ est positif. Ensuite on a $f_{2,0} < 0$, donc $u_2(x)$ est négatif au voisinage de $x = \xi$. Donc $u_2(x)$ change de signe et s'annulle dans l'intervalle. Le rapport $\frac{u_1}{u_2}$ tend évidemment vers zéro avec $x - \xi$.

Il en est de même dans le cas des intégrales anormales.

β) $2p > q$. Posons $2p - f = q$, on a

$$u_1 u'_2 - u_2 u'_1 = - c_{1,0} (x - \xi)^{c_{1,k+1} + c_{2,k+1} - k - 2}$$
$$\cdot e^{-M_1(x-\xi) - M_2(x-\xi)} \cdot f_{1,0} f_{2,0} \cdot [1 + \sigma(x - \xi)].$$

$M_1(x - \xi)$ commence par un terme en $\frac{1}{(x-\xi)^{k+1}}$ et $M_2(x - \xi)$ par un terme en $\frac{1}{(x-\xi)^{k+1-f}}$.

Soit $C > 0$, $f_{1,0} > 0$, alors on a $u'_1(\xi') < 0$, $u_2(\xi') > 0$ et f_{20} a le signe de $-c_{1,0}$. Lorsque l'on a $c_{1,0} > 0$, f_{20} est négatif et $u_2(x)$ s'annulle entre ξ et ξ', tandis que $u_2(x)$ ne s'annulle pas, lorsque l'on $c_{1,0} < 0$. Mais $u_1(x)$ s'annulle en cas de $c_{1,0} > 0$ au point $x = \xi$, et devient infini en cas de $c_{1,0} < 0$. Le rapport $\frac{u_1}{u_2}$ tend dans le premier cas vers zéro, dans le second vers l'infini.

B. Intégrales imaginaires.

Toutes les intégrales ont une infinité de zéros avec $x = \xi$ comme point limite, et entre deux zéros d'une integrale quelconque il y a un zéro unique de toute autre intégrale linéairement indépendante.

6. Appliquons ces théorêmes à l'étude de l'extrémum de l'intégrale (1). Soit $y(x)$ l'extrémale qui joint les deux points $A(x_0, y_0)$ et $B(x_1, y_1)$, et supposons le point singulier $x = \xi$ au commencement ou à l'intérieur de l'intervalle (x_0, x_1). Admettons toutes les courbes continues qui joignent les deux points A, B et dont les dérivées au point $x = \xi$ peuvent devenir infinies d'un ordre < 1.

Envisageons les extrémales, c'est à dire les intégrales de l'équation de Lagrange. Ces courbes, lorsqu'elles sont finies au point $x = \xi$ ont des dérivées finies ou infinies d'ordre < 1. Fait exception le cas des intégrales imaginaires dont les dérivées ne tendent vers aucune limite.

L'expression $f(x, y, y')$ est intégrable, puisque l'on a

$$\rho_1 + \rho_2 - 1 = -r$$

donc $2\rho_1 - 2 + r > -1$, dans le cas de détermination et des racines ρ_1, ρ_2 différentes. Il en est de même, lorsque les racines ρ_1, ρ_2 sont égales, puisque la dérivée y' est finie au point $x = \xi$ et de même dans le cas de l'indétermination des intégrales. Soit $Y(x) = y(x) + w(x)$ une courbe de comparaison. Pour que l'intégrale (1) ait un sens il suffit que l'ordre d'infinitude de $w'(x)$ ne surpasse pas celui de $y'(x)$ et plus généralement que cet ordre α moindre que 1 satisfasse à inégalité $r - 2\alpha > -1$.

Envisageons la différence

$$\Delta I = I(y + w) - I(y) = \int_{x_0}^{x_1} (f_y w + f_{y'} w')\, dx + \tfrac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} (\overline{f}_{y^2} w^2 + 2 \overline{f}_{yy'} w w' \tag{31}$$
$$+ \overline{f}_{y'^2} w'^2)\, dx,$$

où $\overline{f}_{y^2}$, $\overline{f}_{yy'}$, $\overline{f}_{y'^2}$ signifient que l'on remplace les arguments y, y' par $y + \theta w$, $y' + \theta w'$, θ étant une fonction de x dont la valeur absolue ne dépasse pas 1. Les intégrales ont un sens et la première intégrale peut être transformée par la transformation de Lagrange, puisque les intégrales de $\frac{d}{dx}(f_{y'}\, w)$ et $\frac{d}{dx} f_{y'}$ ont un sens. Donc parmi toutes les courbes admises $y(x)$ doit être une extrémale, et cette extrémale donne à ΔI la valeur

$$\Delta I = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} (\overline{f}_{y^2} w^2 + 2\overline{f}_{yy'}\, w\, w' + \overline{f}_{y'^2} w'^2)\, dx.$$

Nous désignons par ξ', ξ'' les deux zéros les plus voisins de l'intégrale finie pour $x = \xi$ situés à gauche et à droite de ξ. On démontre alors facilement que

1. Si l'intervalle (AB) est situé à l'intérieur de l'intervalle $(\xi' \xi'')$, la seconde variation

$$\delta^2 I = \int_{x_0}^{x_1} (f_{y^2} w^2 + 2 f_{yy'}\, w\, w' + f_{y'^2} w'^2)\, dx \tag{32}$$

est **positive** pour toute courbe admise.

En effet, prenons l'intégrale finie comme intégrale $u(x)$ de l'équation de Jacobi, qui coïncide avec l'équation homogène de Lagrange. La transformation de Legendre donne l'expression suivante de la seconde variation

$$\delta^2 I = \int_{x_0}^{x_1} \frac{R\,(w' u - w u')^2}{u^2}\, dx. \tag{33}$$

Cette transformation est légitime, car l'intégrale a un sens, puisque lorsque $r > 1$ l'ordre d'infinitude de $R u'^2$ et de $R w'^2$ est moindre que 1 et lorsque l'on a $r = 1$, on a $q > 0$, donc $\rho_1 = 0$ et u' est fini.

Cette seconde variation est positive, si $R(x)$ est $\geqq 0$, car $w(x)$ s'annulle pour $x = x_0$ et pour $x = x_1$, tandis que $u(x)$ est différent de zéro, donc on ne peut avoir identiquement $w' u - w u' \equiv 0$.

Pour obtenir une courbe $u(x)$ continue au point $x = \xi$ et possédant au point $x = \xi$ une tangente continue finie ou infinie, il faut changer en passant à gauche de $x = \xi$ l'intégrale $u(x)$ en $-\frac{u(x)}{(-1)^{\rho_1}}$, si l'on est dans le cas de détermination. La dérivée est finie continue ou bien $+\infty$, lorsque l'on a $0 < \rho_1 < 1$. Si $x = \xi$ est un point d'indétermination et si on a le cas normal, alors l'intégrale $u(x)$ s'annulle au point $x = \xi$ et pour le prolonger au delà de ce point à gauche, il faut la multiplier par une constante convenable. Si $k + 1$ est impair, il faut remplacer l'intégrale par l'intégrale obtenue en

changeant $c_{1,0}$ en $c_{2,0}$ et multipliant par une constante. Si l'on est dans le cas anormal, on ne peut avoir d'intégrales réelles à tangente déterminée que d'un côté de $x = \xi$. Mais si l'on admet les intégrales s'annullant une infinité de fois au voisinage de $x = \xi$, on a deux intégrales linéairement indépendantes finies ou infinies oscillant entre deux limites finies de signe opposé ou entre $+\infty$ et $-\infty$, ou bien tendant vers zéro, c'est à dire vers le point $x = \xi$.

2. Si le point ξ' ou bien le point ξ'' est situé entre le point ξ et le point A ou le point B, la seconde variation peut être rendue **négative** par un choix convenable de la fonction $u(x)$.

Soit p. ex. $\xi < \xi'' < x_1$ et soit $y_1(x)$ l'intégrale finie au point ξ. Envisageons l'intégrale $y_2(x)$ qui passe par le point x_2 situé entre ξ'' et x_1 et qui est infinie pour $x = \xi$. Soit $y_1(x)$ positif entre ξ et ξ''. La courbe $y_2(x)$ coupe $y_1(x)$ entre ξ et ξ'' en un point x_3, car $y_2(x)$ coupe l'axe des x entre ξ et ξ''.

Envisageons alors la variation

0	entre	x_0	et	ξ
$y_1(x)$	„	ξ	„	x_3
$y_2(x)$	„	x_3	„	x_2
0	„	x_2	„	x_1.

La seconde transformation de Jacobi est légitime et elle donne

$$\delta^2 I = R(x_3)\, w(x_3)\, [w'(x_3 - 0) - w'(x_3 + 0)]$$

$$- \int_{\xi}^{x_2} w(x)\, \Psi(w(x)),$$

$\Psi(y)$ étant l'expression homogène qui figure au côté gauche de l'équation de Jacobi. On a donc

$$\delta^2 I = -R(x_3)\, [y_1(x_3)\, y'_2(x_3) - y_2(x_3)\, y'_1(x_3)],$$

expression qui peut être rendue négative par un choix convenable du signe de $y_2(x)$.

7. Envisageons maintenant une intégrale finie au point $x = \xi$ de l'équation de Lagrange. Soit $y(x)$ cette intégrale. La famille $C y(x)$ de courbes (C constante arbitraire) forme un **champ singulier** d'extrémales. Ces courbes ont au point $x = \xi$ une même tangente égale à zéro ou in-

finie excepté le cas où ce point est un point de détermination et où l'on a $\rho = 1$.

Le coëfficient angulaire de la tangente de l'extrémale qui passe par le point (x_0, y_0), $p(x_0, y_0)$ est égal à $Cy'(x_0)$. Mais on a $C = \frac{y_0}{y(x_0)}$, donc

$$p(x_0, y_0) = y_0 \frac{y'(x_0)}{y(x_0)}.$$

Envisageons l'intégrale invariante de M. Hilbert

$$I_K^* = \int_K [f(x, \bar{y}, p(x, \bar{y})) + (\bar{y}' - p(x, \bar{y})) f_{y'}(x, \bar{y}, p(x, \bar{y}))]\, dx, \quad (35)$$

prise le long d'une courbe admise K, donnée par l'équation $y = \bar{y}(x)$ et joignant les points A, B. Cette intégrale a un sens, car si l'on a $r > 1$, alors l'intégrale de $Rp^2(x, \bar{y})$ a un sens, et si l'on a $r = 1$, alors $y(x)$ est holomorphe et $\neq 0$ au point $x = \xi$. La courbe $\bar{y}(x)$ peut avoir une dérivée infinie au point $x = \xi$ d'un ordre d'infinitude moindre que 1.

Nous avons

$$\Delta I = I_K - I_{K_0} = I_K - I_K^*$$

$$= \int_K [f(x, \bar{y}, \bar{y}') - f(x, \bar{y}, p(x, \bar{y})) - (\bar{y}' - p(x\ \bar{y})) f_{y'}(x, \bar{y}, p(x\ \bar{y}))]\, dx.$$

En introduisant la fonction $E(x, y, p(x, y), y')$ de Weierstrass on a donc la formule

$$\Delta I = \int_K E(x, \bar{y}, p(x, \bar{y}), \bar{y}')\, dx. \quad (36)$$

Or nous avons

$$E(x, \bar{y}, p(x, \bar{y}), \bar{y}') = \tfrac{1}{2}(\bar{y}' - p(x, \bar{y}))^2 f_{y'^2}(x, \bar{y}, p^*), \quad (37)$$

où p^* est un nombre situé entre $\bar{y}'$ et $p(x, \bar{y})$. Mais puisque l'on a $f_{y'^2} = R(x)$, nous parvenons à la formule

$$\Delta I = I_K - I_{K_0} = \tfrac{1}{2} \int_K (\bar{y}' - p(x, \bar{y}))^2 R(x)\, dx. \quad (38)$$

Donc toute courbe admise K autre que l'extrémale K_0 qui joint les points A, B donne une valeur de l'intégrale plus grande que K_0, pourvu

que les points A, B soient situés entre ξ et les zéros les plus voisins à gauche et à droite de ce point de l'intégrale finie au point ξ.[1]

STRESZCZENIE.

Badając warunki konieczne i wystarczające, aby dana całka pojedyńcza, rozciągnięta wzdłuż danej krzywej, posiadała wartość maximum lub minimum w porównaniu z wartościami tejże całki obliczonej dla krzywych sąsiednich, zakłada się zwykle, że problemat jest regularny. Znaczy to, że równanie Lagrange'a 2-go rzędu (lub równania Lagrange'a w przypadku przedstawienia parametrycznego krzywej lub w przypadku krzywej przestrzennej) nie posiada osobliwości wzdłuż danej krzywej. Gdy jednak istnieje przynajmniej jeden punkt osobliwy, badanie bardzo się komplikuje, gdyż twierdzenia klasyczne o drugiej waryacyi całki i twierdzenia o istnieniu pola ekstremalnego dokoła danej krzywej opierają się właśnie na regularności zagadnienia. Zachowanie się krzywych ekstremalnych w punkcie osobliwym może być najrozmaitsze.

Autor zajmuje się przypadkiem, gdy równanie Lagrange'a jest liniowe, co pozwala stosować teoryę Fuchsa rozwinięć w punktach osobliwych. Zarówno w przypadku punktu osobliwego oznaczoności (Bestimmtheitstelle) jak i w przypadku punktu nieoznaczoności (Unbestimmtheitsstelle) można przeprowadzić całkowicie badanie warunków koniecznych i wystarczających, ale w ostatnim przypadku trzeba założyć zbieżność rozwinięć. Osobliwe pola ekstremalnych, które się otrzymuje, pozwalają stosować kryterya Jacobi'ego i metodę Weierstrassa. Podobne rozważania dałyby się przeprowadzić w przypadku, gdy równanie Lagrange'a jest nieliniowe, ale kształtu

$$x^m y'' = f(x, y, y'),$$

m liczba całkowita dodatnia, f funkcya holomorficzna, albo też tylko ciągła i posiadająca pochodne ciągłe.

[1]) Un cas spécial de champs singuliers est étudié dans l'Ouvrage de M. Hadamard. „Calcul des variations".