W. SIERPIŃSKI.

O pewnej definicyi całki, równoważnej całce Lebesgue'a.

Sur une définition de l'intégrale, équivalente à l'intégrale de M. Lebesgue.

W pracy niniejszej podamy, nie opierając się na teoryi miary Lebesgue'a, pewną definicyę całki, która, dla funkcyj ograniczonych, równoważna będzie całce Lebesgue'a. Całkę naszą określimy jako ewentualną wspólną wartość całki dolnej i całki górnej, przyczem definicye tych ostatnich (istniejących dla każdej funkcyi ograniczonej) będą przedstawiały wielką analogię z definicyą całek Darboux'a: różnica polegać będzie jedynie na tem, że zamiast rozbijać przedział całkowania na skończoną liczbę przedziałów częściowych (jak to się robi przy całkach Riemanna, względnie Darboux'a), będziemy go rozbijali na skończoną liczbę zbiorów zamkniętych lub otwartych.

1. Nazywamy otwartym każdy zbiór, którego każdy punkt jest wewnętrzny. Dowodzi się, że każdy zbiór otwarty liniowy jest sumą wnętrz skończonej lub przeliczalnej mnogości przedziałów, nie zachodzących na siebie. Sumę długości tych przedziałów nazywamy miarą uważanego zbioru otwartego. Dopełnienie (do przedziału) zbioru otwartego jest zbiorem zamkniętym. Miarą zbioru zamkniętego nazywamy dopełnienie miary zbioru otwartego, będącego jego dopełnieniem (do przedziału, w którym leży uważany zbiór zamknięty). Suma skończonej liczby zbiorów zamkniętych jest znowu zbiorem zamkniętym.

Niech $f(x)$ oznacza dowolną daną funkcyę ograniczoną, określoną w przedziale (skończonym) $P=(a, b)$. Rozbijmy w jakibądź sposób przedział P na skończoną liczbę zbiorów zamkniętych lub otwartych (nie mających punktów wspólnych)

$$P = E_1 + E_2 + \ldots + E_r,$$

i utwórzmy sumy

$$\sum_{k=1}^{r} m(E_k)\,\mathrm{Max}\,(f,\ E_k), \tag{1}$$

oraz

$$\sum_{k=1}^{r} m(E_k)\,\min\,(f,\ E_k), \tag{2}$$

gdzie $m(E_k)$ oznacza miarę zbioru E_k, $\mathrm{Max}\,(f,\ E_k)$ kres górny funkcyi $f(x)$ w zbiorze E_k, wreszcie $\min\,(f,\ E_k)$ kres dolny funkcyi $f(x)$ w zbiorze E_k.

Kres dolny zbioru wszystkich liczb (1), utworzonych w powyższy sposób, nazywamy całką górną funkcyi $f(x)$ w przedziale $(a,\ b)$ i oznaczamy przez

$$\overline{I} = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx,$$

zaś kres górny zbioru liczb (2) nazywamy całką dolną funkcyi $f(x)$ w przedziale $(a,\ b)$ i oznaczamy przez

$$\underline{I} = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Jeżeli zachodzi równość

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx,$$

to wspólną wartość tych całek nazywamy całką funkcyi $f(x)$ w przedziale $(a,\ b)$ i oznaczamy przez

$$I = \int_a^b f(x)\,dx.$$ [1]

Udowodnimy, że określona w powyższy sposób całka jest dla funkcyj ograniczonych równoważna całce Lebesgue'a. Mówiąc ściślej, udowodnimy, że 1°: każda funkcya ograniczona, mierzalna (w znaczeniu Lebesgue'a) jest całkowalna w naszem znaczeniu i daje zawsze całkę równą całce

[1] W podobny sposób określa całkę W. H Young, z tą jednak różnicą, że rozbija przedział całkowania na skończoną lub przeliczalną mnogość zbiorów mierzalnych. Zob. np. Encyclopédie des Sciences mathématiques T. II, vol. 1, fasc. 2, p. 186 (§ 34).

Lebesgue'a, [1] i 2°: każda funkcya ograniczona, całkowalna w naszem znaczeniu, jest mierzalna (a więc całkowalna w znaczeniu Lebesgue'a).

2. Okażemy przedewszystkiem, że dla każdej funkcyi ograniczonej $f(x)$ zachodzi nierówność:

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leqslant \overline{\int_a^b} f(x)\,dx. \tag{3}$$

Wobec definicyi całki górnej i dolnej wystarczy w tym celu oczywiście okazać, że każda z liczb (1) jest niemniejsza od każdej z liczb (2). Niech więc

$$P = G_1 + G_2 + \ldots + G_p,$$

oraz

$$P = H_1 + H_2 + \ldots + H_q \tag{4}$$

będą dwa rozkłady przedziału $P = (a,\ b)$ na sumę zbiorów zamkniętych lub otwartych, zaś

$$S_1 = \sum_{k=1}^{p} m(G_k)\,\mathrm{Max}\,(f,\ G_k)$$

oraz

$$S_2 = \sum_{k=1}^{q} m(H_k)\,\min\,(f,\ H_k) \tag{5}$$

odpowiadające tym rozkładom sumy (1) i (2); $m(E)$ oznacza tu więc miarę zbioru E w naszem znaczeniu, która, jak łatwo widzieć, jest dla zbiorów zamkniętych lub otwartych równa mierze Lebesgue'a.

Weźmy teraz pod rozwagę sumy:

$$T_1 = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} m(G_i H_j)\,\mathrm{Max}\,(f,\ G_i H_j),$$

oraz

$$T_2 = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} m(G_i H_j)\,\min\,(f,\ G_i H_j), \tag{6}$$

gdzie $m(G_i H_j)$ oznacza miarę zbioru $G_i H_j$ w znaczeniu Lebesgue'a (zbiory $G_i H_j$ są oczywiście mierzalne nawet w znaczeniu Borela).

[1] Twierdzenie to nie byłoby prawdziwe, gdyby przedział całkowania nie był skończony, lub gdybyśmy odrzucili warunek, że funkcya ma być ograniczona.

Wobec (6) będziemy mieli

$$T_1 \geqslant T_2, \tag{7}$$

gdyż dla każdego zbioru E jest oczywiście $\operatorname{Max}(f, E) \geqslant \min(f, E)$.

Zbiór $G_i H_j$ jest zawsze częścią zbiorów G_i oraz H_j: mamy więc

$$\operatorname{Max}(f, G_i H_j) \leqslant \operatorname{Max}(f, G_i)$$

i podobnież

$$\min(f, G_i H_j) \geqslant \min(f, H_j) \quad \text{dla} \quad \begin{cases} i = 1, 2, \ldots, p \\ j = 1, 2, \ldots, q \end{cases} \tag{8}$$

Lecz, wobec (4), mamy:

$$G_i = G_i H_1 + G_i H_2 + \ldots + G_i H_q$$

oraz

$$H_j = G_1 H_j + G_2 H_j + \ldots + G_p H_j,$$

skąd, z uwagi, że składniki szeregu na G_i nie posiadają punktów wspólnych:

$$\sum_{j=1}^{q} m(G_i H_j) = m(G_i),$$

i podobnież:

$$\sum_{i=1}^{p} m(G_i H_j) = m(H_j). \tag{9}$$

Wobec (8) i (9) znajdujemy w jednej chwili:

$$\sum_{j=1}^{q} m(G_i H_j) \operatorname{Max}(f, G_i H_j)$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{q} m(G_i H_j) \operatorname{Max}(f, G_i) = m(G_i) \operatorname{Max}(f, G_i),$$

oraz

$$\sum_{i=1}^{p} m(G_i H_j) \min(f, G_i H_j) \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{i=1}^{p} m(G_i H_j) \min(f, H_j) = m(H_j) \min(f, H_j),$$

skąd, wobec (6) i (5):

$$T_1 \leqslant S_1 \quad \text{oraz} \quad T_2 \geqslant S_2, \tag{10}$$

zatem, wobec (7):

$$S_1 \geqslant S_2, \qquad \text{c. b. d. o.}$$

Udowodniliśmy więc nierówność (3) dla każdej funkcyi $f(x)$, ograniczonej w przedziale (a, b).

3. Udowodnimy teraz, że jeżeli funkcya $f(x)$ jest ograniczona i mierzalna, to jest ona całkowalna w naszem znaczeniu i daje całkę równą całce Lebesgue'a:

$$L = (L) \int_a^b f(x)\, dx. \tag{11}$$

Jak wiadomo z teoryi całek Lebesgue'a, skoro L jest całką Lebesgue'a w przedziale (a, b) funkcyi mierzalnej i ograniczonej $f(x)$, to dla każdej liczby dodatniej ε istnieją liczby $l_0 < l_1 < l_2 < \ldots < l_{r-1}$, takie, iż

$$l_0 < f(x) < l_{r-1}, \quad \text{dla} \quad a \leqslant x \leqslant b, \tag{12}$$

oraz

$$\sum_{k=1}^{r-1} l_k m\,[E(l_{k-1} < f(x) \leqslant l_k)] < L + \varepsilon, \tag{13}$$

zaś

$$\sum_{k=1}^{r-1} l_{k-1} m\,[E(l_{k-1} \leqslant f(x) < l_k)] > L - \varepsilon. \tag{14}$$

Każdy zbiór mierzalny jest, jak wiadomo, sumą zbioru zamkniętego oraz zbioru o dowolnie małej mierze: możemy więc położyć:

$$E(l_{k-1} < f(x) \leqslant l_k) = F_k + G_k, \quad (k = 1, 2, \ldots, r-1), \tag{15}$$

gdzie F_k $(k = 1, 2, \ldots, r-1)$ są zbiory zamknięte, zaś

$$m(G_k) < \frac{\varepsilon}{r}, \qquad (k = 1, 3, \ldots, r-1), \tag{16}$$

(przyczem zbiory F_k i G_k nie posiadają punktów wspólnych, dla $k = 1, 2, \ldots, r-1$).

Przyjmijmy

$$E_k = F_k \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, \ldots, r-1, \tag{17}$$

zaś przez E_r oznaczmy zbiór

$$E_r = E(a \leqslant x \leqslant b) - \sum_{k=1}^{r-1} F_k; \tag{18}$$

będzie to zbiór otwarty, jako dopełnienie [do przedziału (a, b)] zbioru zamkniętego $F_1 + F_2 + F_3 + \ldots + F_{r-1}$.

Wobec (15), dla wszystkich punktów x zbioru F_k zachodzi nierówność $l_{k-1} < f(x) \leqslant l_k$: wynika stąd w jednej chwili, że

$$m(F_k) \leqslant m[E(l_{k-1} < f(x) \leqslant l_k)],$$

oraz

$$\operatorname{Max}(f, F_k) \leqslant l_k, \qquad (k = 1, 2, \ldots, r-1),$$

skąd, wobec (17):

$$\sum_{k=1}^{r-1} m(E_k) \operatorname{Max}(f, E_k) \leqslant \sum_{k=1}^{r-1} l_k m[E(l_{k-1} < f(x) \leqslant l_k)],$$

co daje, w myśl (13):

$$\sum_{k=1}^{r-1} m(E_k) \operatorname{Max}(f, E_k) < L + \varepsilon. \tag{19}$$

Funkcya $f(x)$ jest, jak zakładamy, ograniczona w przedziale (a, b): stnieje więc liczba M, taka iż

$$|f(x)| \leqslant M, \quad \text{dla} \quad a \leqslant x \leqslant b. \tag{20}$$

Wobec (12) i (15) mamy oczywiście:

$$E(a \leqslant x \leqslant b) = \sum_{k=1}^{r-1} E(l_{k-1} < f(x) \leqslant l_k) = \sum_{k=1}^{r-1} (F_k + G_k),$$

skąd, wobec (18), wnosimy w jednej chwili, że

$$E_r = \sum_{k=1}^{r-1} G_k,$$

co daje, wobec (16):

$$m(E_r) < \varepsilon,$$

zatem, wobec (20):

$$m(E_r) \operatorname{Max}(f, E_r) \leqslant \varepsilon M. \tag{21}$$

Wzory (19) i (21) dają:

$$\sum_{k=1}^{r} m(E_k) \operatorname{Max}(f, E_k) < L + \varepsilon(M + 1),$$

co dowodzi, wobec definicyi całki górnej, jako dolnego kresu liczb (1), że

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx < L + \varepsilon(M + 1),$$

skąd, wobec dowolności liczby dodatniej ε, znajdujemy:

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leqslant L. \tag{22}$$

Podobnież, wychodząc ze wzoru (14), dowiedlibyśmy, że

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \geqslant L. \tag{23}$$

Nierówności (22) i (23) dowodzą, wobec (3), że

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = L;$$

funkcya $f(x)$ jest więc w przedziale (a, b) całkowalna w naszem znaczeniu, przyczem, wobec definicyi naszej całki oraz w myśl (11), mamy:

$$\int_a^b f(x)\,dx = (L)\int_a^b f(x)\,dx,$$

c. b. d. o.

4. Załóżmy teraz, że dla funkcyi ograniczonej $f(x)$ istnieje całka w naszem znaczeniu

$$I = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Z definicyi naszej całki wynika natychmiast, że, przy dodatniem ε, będzie dla pewnych rozkładów (4) przedziału $P = (a, b)$ na zbiory zamknięte lub otwarte:

$$S_1 < I + \frac{\varepsilon^2}{2}, \qquad S_2 > I - \frac{\varepsilon^2}{2},$$

gdzie S_1 i S_2 są sumy, wyznaczone ze wzorów (5). Nierówności te dają:

$$S_1 - S_2 < \varepsilon^2,$$

i, tembardziej, wobec (10):

$$T_1 - T_2 < \varepsilon^2,$$

czyli, w myśl (6):

$$\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} m(G_i H_j)\, \omega(f, G_i H_j) < \varepsilon^2, \tag{24}$$

gdzie $\omega(f, E) = M(f, E) - m(f, E)$ oznacza oscylacyę funkcyi $f(x)$ w zbiorze E.

Zbiory $G_i H_j$ $(i = 1, 2, \ldots, p;\ j = 1, 2, \ldots, q)$ są wszystkie mierzalne w znaczeniu Lebesgue'a. Nierówność (24) dowodzi więc, że dla każdego dodatniego ε istnieje rozkład przedziału (a, b) na sumę skończonej liczby zbiorów mierzalnych

$$M_1, \quad M_2, \ldots, \quad M_s, \tag{25}$$

takich, że

$$\sum_{k=1}^{s} m(M_k)\, \omega(f, M_k) < \varepsilon^2. \tag{26}$$

Niech $P_1, P_2, \ldots, P_g$ będą te zpośród zbiorów (25), dla których

$$\omega(f, M_k) < \varepsilon,$$

zaś $Q_1, Q_2, \ldots, Q_h$ te zpośród nich, dla których

$$\omega(f, M_k) \geqslant \varepsilon;$$

będzie więc, wobec (26):

$$\sum_{k=1}^{g} m(P_k)\, \omega(f, P_k) + \sum_{k=1}^{h} m(Q_k)\, \omega(f, Q_k) < \varepsilon^2, \tag{27}$$

zaś (wobec $\omega(f, Q_k) \geqslant \varepsilon$, dla $k = 1, 2, \ldots, h$):

$$\sum_{k=1}^{h} m(Q_k)\, \omega(f, Q_k) \geqslant \varepsilon \sum_{k=1}^{h} m(Q_k). \tag{28}$$

Nierówności (27) i (28) dają w jednej chwili (z uwagi, że $\sum_{k=1}^{g} m(P_k)\, \omega(f, P_k) \geqslant 0$):

$$\varepsilon \sum_{k=1}^{h} m(Q_k) < \varepsilon^2,$$

skąd

$$\sum_{k=1}^{h} m(Q_k) < \varepsilon.$$

Mamy więc w każdym ze zbiorów $P_1, P_2, \ldots, P_g$:

$$\omega(f, P_k) < \varepsilon, \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, \ldots, g.$$

miara zaś zbioru tych punktów przedziału (a, b), które nie należą do $P_1 + P_2 + \ldots + P_g$ (a więc należą do $Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_h$) jest $< \varepsilon$.

Określimy teraz w przedziale (a, b) funkcyę $\varphi(x)$ przez warunki:

$$\varphi(x) = \mathrm{Max}(f, M_k)$$

dla x należących do zbioru M_k $(k = 1, 2, \ldots, s)$.

W każdym ze zbiorów P_k $(k = 1, 2, \ldots, g)$ będzie, jak łatwo widzieć:

$$0 \leqslant \varphi(x) - f(x) \leqslant \omega(f, P_k) < \varepsilon;$$

możemy więc powiedzieć, że z wyjątkiem zbioru o mierze $< \varepsilon$ zachodzi w przedziale (a, b) nierówność

$$0 \leqslant \varphi(x) - f(x) < \varepsilon.$$

Funkcya $\varphi(x)$ jest oczywiście mierzalna: dowiedliśmy więc, że dla każdego dodatniego ε istnieje funkcya mierzalna $\varphi(x)$, różniąca się od $f(x)$ mniej niż o ε w całym przedziale (a, b), z wyjątkiem zbioru o mierze $< \varepsilon$.

Istnieje więc dla każdego naturalnego n funkcya mierzalna $\varphi_n(x)$, taka iż

$$0 \leqslant \varphi_n(x) - f(x) < \frac{1}{2^n} \tag{29}$$

w całym przedziale (a, b) z wyjątkiem zbioru R_n o mierze $< \frac{1}{2^n}$.

Łatwo widzieć, że z wyjątkiem conajwyżej punktów zbioru

$$R = (R_1 + R_2 + R_3 + \ldots)(R_2 + R_3 + \ldots)(R_3 + \ldots) \ldots \tag{30}$$

będziemy mieli w całym przedziale (a, b):

$$\lim_{n=\infty} \varphi_n(x) = f(x). \tag{31}$$

[Jeżeli bowiem punkt x nie należy do R, to, wobec (30), istnieje wskaźnik k taki, iż x nie należy do zbioru $R_k + R_{k+1} + \ldots$, zatem nie należy do żadnego ze zbiorów R_n, dla $n \geqslant k$; z własności zbiorów R_n wynika atoli, że dla punktów x przedziału (a, b), nie należących do R_n, zachodzi nierówność (29): mielibyśmy więc, dla uważanego punktu x, nierówność (29) dla $n \geqslant k$, co dowodzi wzoru (31)].

Wobec (30) i uwagi, że $m(R_n) < \frac{1}{2^n}$ wnosimy z łatwością, że zbiór R jest miary 0 (W myśl (30) jest bowiem R częścią zbioru $R_{n+1} + R_{n+2} + \ldots$ o mierze $\leqslant \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \ldots = \frac{1}{2^n}$): wzór (31) zachodzi więc w przedziale (a, b) prawie wszędzie. Funkcya $f(x)$ jest przeto prawie wszędzie granicą ciągu funkcyj mierzalnych, skąd, jak wiemy, wynika, że $f(x)$ jest funkcyą mierzalną.

Dowiedliśmy więc, że jeżeli istnieje całka $\int_a^b f(x)\,dx$ (w naszem znaczeniu), to funkcya $f(x)$ jest mierzalna, a więc (jako funkcya ograniczona) całkowalna w znaczeniu Lebesgue'a.

Zestawiając ten wynik z otrzymanym w § 3, dochodzimy do wniosku, że nasza całka jest (dla funkcyj ograniczonych i przedziałów skończonych) równoważna w zupełności całce Lebesgue'a.

RÉSUMÉ.

Nous donnons, pour les fonctions bornées, sans s'appuyer sur la théorie de la mesure lebesguienne, une définition de l'intégrale équivalente à celle de M. Lebesgue et analogue à la définition de l'intégrale riemannienne à l'aide des intégrales de Darboux.

Nous définissons l'intégrale d'une fonction bornée $f(x)$ comme suit. Divisons l'intervalle (fini) (a, b) en un nombre fini d'ensembles fermés ou ouverts [1] sans points communs; multiplions la mesure de chacun d'eux par la borne supérieure de $f(x)$ sur cet ensemble et prenons la somme S_1 de tous les produits obtenus: lorsqu'on divise l'intervalle (a, b) de toutes les manières possibles en un nombre fini d'ensembles fermés ou ouverts, les nombres S_1 ont une borne inférieure qui est l'intégrale supérieure de $f(x)$ dans (a, b). L'intégrale inférieure se définit d'une manière analogue. La fonction $f(x)$ est intégrable, si l'intégrale supérieure est égale à l'intégrale inférieure: leur valeur commune est l'intégrale de $f(x)$. [1]

Nous démontrons que toute fonction bornée mesurable (au sens de M. Lebesgue) est intégrable dans notre sens (dans l'intervalle fini), son intégrale étant égale à l'intégrale de Lebesgue, et que toute fonction bornée, intégrable dans notre sens, est mesurable (donc sommable).

[1]) On appelle ouvert tout ensemble dont tous les points sont intérieurs. On démontre que tout ensemble ouvert (linéaire) est une somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'intérieurs d'intervalles n'empiétant les uns sur les autres. La somme de longueurs de ces intervalles est la mesure de l'ensemble ouvert considéré. Tout ensemble fermé est complémentaire d'un ensemble ouvert et réciproquement. La mesure d'un ensemble fermé est le complémentaire de la mesure d'ensemble ouvert qui est son complémentaire.

[1]) Cf. la définition de l'intégrale donnée par M. W. H. Young (Voir Encyclopédie des Sciences math., T. II, vol. 1, fasc. 2, p. 186). M. Young divise l'intervalle d'intégration en un ensemble fini ou dénombrable d'ensembles mesurables.