STEFAN MAZURKIEWICZ.

Studya teratologiczne z teoryi mnogości.

I. O pewnym łuku prostym.

Études teratologiques sur la théorie des ensembles. I. Sur un arc simple.

P. Sierpiński podał w r. 1912 ciekawy przykład łuku prostego, którego rzuty prostokątne na trzy prostopadłe do siebie płaszczyzny wypełniają pola kwadratów.[1] Zadaniem pracy niniejszej jest posunięcie do możliwie najdalszych granic „osobliwości", występującej w pracy powyższej. Zbuduję mianowicie w zwyczajnej przestrzeni trójwymiarowej taki łuk prosty S, że zbiór przecinających go (t. zn. mających z nim punkt wspólny) prostych jest identyczny ze zbiorem prostych, przecinających pewną bryłę B zawierającą S. Jeżeli przez $\Gamma(A)$ oznaczymy zbiór prostych przecinających mnogość punktową A, wówczas mieć będziemy:

$$S \subset B, \tag{1}$$

$$\Gamma(S) \equiv \Gamma(B). \tag{2}$$

Rzut łuku S z dowolnego punktu na dowolną płaszczyznę jest obszarem płaskim domkniętym.

Zagadnieniom zbliżonym do powyższego poświęciłem kilka prac dawniejszych[2] z któremi wiąże notę niniejszą również pokrewieństwo metody.

W § 1-ym podaję twierdzenia pomocnicze, w 2-im — konstrukcyę łuku S i bryły B.

---

[1]) Prace mat.-fiz. t. **26**.

[2]) Prace mat.-fiz. t. **27**, Wektor t. **6**, 1, 2.

§ 1. Twierdzenia pomocnicze.

I. **Założenie:** punkty a, b należą do płaskiej, punktokształtnej, domkniętej mnogości P.

Wniosek: w płaszczyźnie zbioru P istnieje łuk prosty o końcach a i b, mający ze zbiorem P tylko te dwa punkty wspólne.

Dowód. Na mocy twierdzenia Riesza-Denjoy[1] istnieje w płaszczyźnie zbioru P krzywa zamknięta bez punktów podwójnych L, zawierająca zbiór P. Niech c oznacza dowolny punkt płaszczyzny, nie leżący na L. Wiadomo, że punkty krzywej L są zarówno z zewnątrz, jak i od wewnątrz „osiągalne" (erreichbar)[2]; wobec tego istnieją w naszej płaszczyźnie łuki proste J_1, J_2 o końcach odpowiednio: a i c, oraz c i b, z których pierwszy ma z krzywą L jedynie punkt a wspólny, drugi — jedynie punkt b. Kontynuum $J_1 + J_2$ jest, jak to odrazu widać, krzywą Jordana, zawiera więc łuk prosty J o końcach a, b[3]. Mamy dalej:

$$(J \times P) \subset [(J_1 + J_2) \times L]. \tag{3}$$

Ponieważ mnogość po prawej stronie wzoru (3) zawiera tylko punkty a, b, więc łuk J czyni zadość warunkom twierdzenia.

Uwaga. Twierdzenie nasze jest prawdziwe, jeżeli płaszczyznę zastąpimy przez elipsoidę.

II. **Założenie:** 1) punkty a, b należą do zbioru Q, złożonego ze skończonej liczby łuków prostych, 2) $\varepsilon > 0$.

Wniosek: Istnieje łuk J o końcach a, b, nie zawierający żadnego odcinka, mający ze zbiorem Q jedynie punkty a, b wspólne, złożony z punktów odległych conajwyżej o ε od odcinka ab.

Dowód. Ustalamy układ spółrzędnych kartezyańskich w taki sposób, aby punkty a i b miały odpowiednio spółrzędne $(-1, 0, 0)$, oraz $(1, 0, 0)$. Środek odcinka ab jest tym sposobem początkiem spółrzędnych. Oznaczmy przez E_λ elipsoidę obrotową:

$$x^2 + \frac{y^2 + z^2}{\lambda^2} = 1, \tag{4}$$

przez E — zbiór tych elipsoid E_λ, dla których:

$$\frac{\varepsilon}{2} \leqq \lambda \leqq \varepsilon. \tag{5}$$

[1]) C. R. 145.
[2]) Schönfliess, Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten t. II.
[3]) Mazurkiewicz, Spr. Warsz. Tow. Nauk. VI.

Ustalamy z łatwością fakty następujące:

(α_1) E_λ zawiera punkty a, b;

(α_2) dwie elipsoidy zbioru E odpowiadające różnym wartościom λ mają tylko te dwa punkty wspólne:

(α_3) każdy punkt dowolnej elipsoidy zbioru E jest conajwyżej o ε odległy od odcinka ab.

Połóżmy:

$$Q_\lambda \equiv Q \times E_\lambda \tag{6}$$

Oznaczamy przez F zbiór tych wartości (5), dla których Q_λ zawiera kontynuum, przyczem zauważymy, że kontynuum takie jest zawarte w jednym z łuków prostych, tworzących Q, samo zatem musi być łukiem prostym. Mamy dalej:

$$F \equiv \mathfrak{M}\{F_n\} \qquad n = 1, 2 \ldots \tag{7}$$

gdzie F_n jest zbiorem tych wartości (5), dla których Q_λ zawiera łuk prosty o średnicy niemniejszej niż $\frac{1}{n}$. Przypuśćmy, że dla pewnej wartości n mnogość F_n jest nieskończona. Każdemu λ tej mnogości F_n odpowiada łuk prosty $J(\lambda)$, zawarty w Q_λ, mający średnicę $\geqq \frac{1}{n}$. Łuków $J(\lambda)$ jest nieskończenie wiele; należą one wszystkie do Q. Q składa się ze skończonej liczby łuków prostych, na jeden więc conajmniej z tych ostatnich, oznaczmy go przez R, przypada nieskończenie wiele zawartych w nim łuków $J(\lambda)$. Odwzorujmy R w sposób jednojednoznaczny i odwracalnie ciągły na odcinek $(0, 1)$ przy pomocy wzorów:

$$x = \varphi_1(t), \quad y = \varphi_2(t), \quad z = \varphi_3(t) \qquad 0 \leqq t \leqq 1 \tag{8}$$

i dobierzmy (co z uwagi na ciągłość funkcyi (8) jest możliwe), liczbę $\eta > 0$ w taki sposób, aby nierówność:

$$|t_1 - t_2| \leqq \eta \tag{9}$$

pociągała za sobą:

$$|\varphi_i(t_1) - \varphi_i(t_2)| \leqq \frac{1}{4n}. \qquad i = 1, 2, 3 \tag{10}$$

Widzimy odrazu, że odcinkowi o długości $\leqq \eta$ zawartemu w $(0, 1)$ odpowiada na R łuk prosty o średnicy $\leqq \frac{1}{2n}$. Jeżeli więc przez $I(\lambda)$ oznaczymy odcinek, odpowiadający na $(0, 1)$ łukowi $J(\lambda)$, zawartemu w R, wówczas, wobec tego że średnica $J(\lambda)$ jest $\geqq \frac{1}{n}$, długość odcinka $I(\lambda)$ musi przekraczać η. Ponieważ odcinków $I(\lambda)$ jest nieskończenie wiele, zatem

będziemy mogli znaleść dwa takie $I(\lambda_1)$ i $I(\lambda_3)$, które na siebie zachodzą, a więc mają nieskończenie wiele punktów wspólnych. Odpowiadające im jednojednoznacznie łuki $J(\lambda_1)$, $J(\lambda_2)$ muszą wobec tego również mieć nieskończenie wiele punktów wspólnych. Ale łuki te należą przecież do dwu różnych elipsoid zbioru E, mogą więc mieć na mocy (α_2) conajwyżej dwa punkty wspólne a i b. Doszliśmy więc do sprzeczności. Zatem zbiór F_n musi być dla każdego n skończony, a zbiór F conajwyżej przeliczalny. Istnieje więc wartość λ, spełniająca warunek (5) i nie należąca do F. Dla tej wartości zbiór Q_λ jest punktokształtny na mocy zatem I elipsoida E_λ zawiera łuk prosty J o końcach a, b mający z Q_λ, a więc wobec:

$$J \times Q \equiv J \times (E_\lambda \times Q) \equiv J \times Q_\lambda \tag{11}$$

i z Q tylko te dwa punkty wspólne, nie zawierający odcinka, gdyż elipsoida go nie zawiera, wreszcie złożony z uwagi na (α_3) z punktów odległych od odcinka ab, conajwyżej o ε.

III. Założenie: D jest obszarem wypukłym, I_n $(n = 1, 2, \ldots p)$ łukiem prostym o końcach a_n, b_n nie zawierającym żadnego odcinka; dwa różne łuki I_n nie mają punktów wspólnych, punkty b_2, a_p leżą wewnątrz D, podobnież łuki $I_2 \ldots I_{p-1}$.

Wniosek: Istnieje łuk prosty J, o końcach a_1, b_p, zawierający łuki I_n, $n = 1, 2 \ldots p$, nie zawierający żadnego odcinka i taki że część jego zawarta między b_2 i a_p leży wewnątrz D.

Dowód. Dla $n = 1, \ldots, p-1$ obszar D zawiera punkty b_n, a_{n+1}, a więc i odcinki $\overline{b_n a_{n+1}}$, gdyż jest wypukły. Oznaczmy przez 2ε minimum odległości odcinków powyższych od brzegu obszaru D. Każdy punkt odległy nie więcej niż o ε od jednego z odcinków $\overline{b_n a_{n+1}}$ leży wewnątrz D.

Określamy ciąg łuków prostych $\{J_n\}$, $n = 1, 2, \ldots, p-1$, o końcach b_n, a_{n+1} w taki sposób, aby:

1) łuk J_n nie zawierał żadnego odcinka,

2) łuk J_1 miał ze zbiorem $I_1 + I_2 + \ldots I_p$ tylko punkty b_1, a_2 wspólne, łuk J_n, dla $n > 1$, ze zbiorem $I_1 + I_2 + \ldots I_p + J_1 + \ldots J_{n-1}$ tylko punkty a_{n-1}, b_n wspólne.

3) wreszcie aby punkty łuku J_n były conajwyżej o ε odległe od odcinka $\overline{b_n a_{n+1}}$.

Istnienie łuków J_n wynika z twierdzenia II.

Połóżmy teraz:

$$J \equiv I_1 + J_1 + I_2 + J_2 + \ldots + J_{p-1} + I_p. \tag{12}$$

Jest to jak widzimy odrazu łuk prosty, czyniący zadość warunkom twierdzenia.

IV. Założenie: K_1, K_2 są kulami koncentrycznemi, przyczem K_1 ma promień mniejszy niż K_2; I_1, I_2—łukami prostemi bez punktów wspólnych, o końcach a_1, b_1 oraz a_2, b_2 nie zawierającemi żadnego odcinka, przyczem łuki te mogą się redukować do punktów b_1, a_2; punkty b_1, a_2 leżą wewnątrz kuli K_1.

Wniosek: Istnieje łuk prosty J o końcach a_1, b_2 zawierający łuki I_1, I_2 nie zawierający żadnego odcinka, taki, że każda prosta przecinająca kulę K_1 ma punkty wspólne z częścią łuku J, zawartą między b_1 i a_1, przyczem część ta leży wewnątrz kuli K_2.

Dowód. Przy odpowiednim doborze spółrzędnych prostokątnych równania kul K_1, K_2 brzmieć będą:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 1, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= \lambda^2. \qquad \lambda > 1. \end{aligned} \tag{13}$$

Zbiór punktów, leżących na kuli:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 \qquad 1 \leqq \rho \leqq \lambda \tag{14}$$

i odległych conajwyżej o β od punktu o spółrzędnych: $x = \rho \cos\varphi \sin\vartheta$, $y = \rho \sin\varphi \sin\vartheta$, $z = \rho \cos\vartheta$ nazywać będziemy czaszą $C(\rho, \varphi, \vartheta, \beta)$ przyczem ten ostatni punkt nazwiemy środkiem czaszy. Zbiór odcinków, łączących dowolny punkt czaszy $C(1, \varphi_1, \vartheta_1, \beta_1)$ z dowolnym punktem czaszy $C(\lambda, \varphi_2, \vartheta_2, \beta_2)$ nazywać będziemy snopem $S(\varphi_1, \vartheta_1, \beta_1, \varphi_2, \vartheta_2, \beta_2)$. Wreszcie zbiór punktów, należących do jednej z czasz $C(\rho, \varphi, \vartheta, \beta)$, dla:

$$1 < \sigma - \frac{\delta}{2} \leqq \rho \leqq \sigma + \frac{\delta}{2} < \lambda, \tag{15}$$

nazywamy warstwą $W(\sigma, \delta, \varphi, \vartheta, \beta)$, przyczem δ nazywa się grubością warstwy, zaś σ jej promieniem. Ograniczać się będziemy do rozważania takich czasz, dla których $\beta \leqq 1$. Łatwo widzieć, że przy takiem ograniczeniu każda czasza jest homeomorficzna ze zbiorem punktów kwadratu, z czego w następstwie skorzystamy.

Rozbijemy teraz dowód naszego twierdzenia na cztery części.

Część 1, elementarno-geometryczna. Zakładamy, że liczby β, ρ_1, σ, δ czynią zadość nierównościom:

$$\beta \leqq \tfrac{1}{2}; \quad 1 < \rho_1 < \lambda, \tag{16}$$

$$\rho_1 < \sigma < \begin{cases} \lambda \\ \rho_1 + \dfrac{\beta^2}{8\lambda} \end{cases} \tag{17}$$

$$\delta < \begin{cases} 2(\sigma - \rho_1) \\ 2(\lambda - \sigma) \\ 2\left(\rho_1 + \frac{\beta^2}{8\lambda} - \sigma\right) \end{cases} \tag{18}$$

i bierzemy pod uwagę czaszę $C(\rho_1, \varphi, \vartheta, \beta)$, której środek oznaczymy przez p_1, oraz warstwę $W(\sigma, \delta, \varphi, \vartheta, 2\beta)$. Załóżmy że a jest punktem tej warstwy; należy on wówczas do pewnej czaszy $C(\rho, \varphi, \vartheta, \beta)$, dla której ρ spełnia nierówność (15) i której środek niech będzie p_ρ.

Mamy wówczas:

$$\begin{aligned} \rho(a, p_1) &\leqq \rho(a, p_\rho) + \rho(p_\rho, p_1) \leqq 2\beta \\ &+ (\rho - \rho_1) \leqq 2\beta + \left(\sigma + \frac{\delta}{2} - \rho_1\right) < 2\beta + \frac{\beta^2}{8\lambda} < 3\beta. \end{aligned} \tag{19}$$

Załóżmy dalej że odcinek, łączący pewien punkt kuli K_1 z punktem kuli K_2 przecina czaszę $C(\rho_1, \varphi, \vartheta, \beta)$; niech b_1 będzie punktem przecięcia. Odcinek ten przecina też kulę (14) w punkcie b_ρ, przyczem łatwo widzieć, że

$$\rho(b_1, b_\rho) \leqq \sqrt{|\rho^2 - \rho_1^2|} \leqq \sqrt{2\lambda|\rho - \rho_1|}. \tag{20}$$

Jeżeli więc ρ spełnia nierówność (15), t. zn. jeżeli czasza $C(\rho, \varphi, \vartheta, 2\beta)$ należy do naszej warstwy, wówczas:

$$\begin{aligned} \rho(b_\rho, p_\rho) &\leqq \rho(b_\rho, b_1) + \rho(b_1, p_1) + \rho(p_1, p_\rho) \\ &\leqq \sqrt{2\lambda(\rho - \rho_1)} + \beta + (\rho - \rho_1) \\ &\leqq \sqrt{2\lambda \cdot \frac{\beta^2}{8\lambda}} + \beta + \frac{\beta^2}{8\lambda} < \frac{\beta}{2} + \beta + \frac{\beta}{2} = 2\beta, \end{aligned} \tag{21}$$

a więc:

$$b_\rho \subset C(\rho, \varphi, \vartheta, 2\beta). \tag{22}$$

Z powyższego z łatwością wynika rezultat następujący.

Jeżeli $C(\rho_1, \varphi, \vartheta, \beta)$ jest czaszą, dla której zachodzi (16) i jeżeli każdy odcinek pewnego snopa S przecina czaszę powyższą, wówczas istnieje nieskończenie wiele wartości σ, dla których warstwa $W(\sigma, \delta, \varphi, \vartheta, 2\beta)$, posiada, o ile tylko jej grubość δ jest dostatecznie mała — następujące dwie własności:

1) każdy jej punkt jest odległy od środka czaszy $C(\rho_1, \varphi, \vartheta, \beta)$ conajwyżej o 3β.

2) każdy odcinek snopa S przecina każdą wchodzącą w skład naszej warstwy czaszę $C(\rho, \varphi, \vartheta, 2\beta)$.

Część 2, oparta na twierdzeniu Heine-Borela. Zbiór odcinków, łączących kule X_1 i X_2, możemy uważać jako przestrzeń abstrakcyjną, która stanie się zwartą i metryczną, o ile się umówimy, że za odległość odcinków D_1, D_2 łączacych odpowiednio punkt a_1 kuli K_1 z punktem b_1 kuli K_2, oraz punkt a_2 kuli K_1 z punktem b_2 kuli K_2 uważać będziemy liczbę:

$$\rho(D_1, D_2) = \sqrt{\rho^2(a_1, a_2) + \rho^2(b_1, b_2)} \tag{23}$$

i że związek:

$$\lim_{n=\infty} D_n = D_0 \tag{24}$$

znaczy to samo, co:

$$\lim_{n=\infty} \rho(D_n, D_0) = 0 \tag{25}$$

Oznaczmy tę przestrzeń przez Δ.

Weźmy teraz pod uwagę snop $S(\varphi_1, \vartheta_1, \beta_1; \varphi_2, \vartheta_2, \beta_2)$. Odcinek, łączący środki czasz $C(1, \varphi_1, \vartheta_1, \beta_1)$ oraz $C(\lambda, \varphi_2, \vartheta_2, \beta_2)$, nazwiemy osią snopa; każdy odcinek, którego końce leżą odpowiednio wewnątrz wspomnianych czasz (rzecz prosta „wewnątrz" w odniesieniu do kul K_1, K_2) nazwiemy wewnętrznym odcinkiem snopa; liczbę dodatnią $\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}$ nazwiemy promieniem snopa. Snop stanowi w naszej przestrzeni „odcinkowej" obszar domknięty, zbiór jego odcinków wewnętrznych obszar.

Jeżeli

$$1 < \rho_1 \leqq \rho \leqq \rho_2 < \lambda \tag{26}$$

wówczas spółrzędne punktu, w którym odcinek łączący punkt a_1 kuli K_1 z punktem b_1 kuli K_2 przecina kulę (14), są jednoznacznemi, ciągłemi funkcyami spółrzędnych punktów a_1, b_1 oraz liczby ρ. Wynika to z łatwych rozważań elementarnych, które pomijam. Prowadzi to natychmiast do następującego rezultatu. Jeżeli oś snopa przechodzi przez środek pewnej czaszy $C(\rho, \varphi, \vartheta, \beta)$, wówczas każdy odcinek snopa przecina tę czaszę, byleby promień snopa był dostatecznie mały. Niech D oznacza odcinek łączący kule K_1, K_2; ponieważ żaden z łuków I_1, I_2 nie zawiera odcinka, więc mnogość:

$$D \times (I_1 + I_2) \equiv (D \times I_1) + (D \times I_2) \tag{27}$$

jest nigdziegęsta na D, wewnątrz zatem D można znaleść punkt a, nie należący do (27). Oznaczamy przez ρ, φ, ϑ spółrzędne biegunowe punktu a i kładziemy:

$$\beta \leqq \begin{cases} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}\rho(a, I_1 + I_2) \end{cases} \tag{28}$$

$$C_D \equiv C(\rho, \varphi, \vartheta, \beta). \tag{29}$$

Na podstawie poprzedniego rozważania istnieje snop S_D, którego osią jest odcinek D, taki, że każdy należący do niego odcinek przecina czaszę (29). Weźmy teraz pod uwagę zbiór wszystkich w ten sposób otrzymanych snopów S_D. Każdy odcinek naszej przestrzeni „odcinkowej" Δ zawiera się wewnątrz jednego conajmniej snopa tego zbioru (mianowicie tego, którego jest osią). Stosując teraz twierdzenie Heine-Borela, co jest możliwe ze względu na to, że przestrzeń nasza jest zwartą i domkniętą, widzimy że można ze zbioru wspomnianego wybrać skończony ciąg snopów

$$S_1, \quad S_2 \ldots \quad S_m \tag{30}$$

w taki sposób, aby każdy odcinek łączący kule K_1 i K_2 należał do jednego conajmniej z tych snopów. Każdy snop S_k ciągu (30) odpowiada pewnej czaszy

$$C_k \equiv C(\rho_k, \varphi_k, \vartheta_k, \beta_k) \tag{31}$$

której środek oznaczymy przez a_k i dla której zachodzą okoliczności następujące:

$$\beta_k \leqq \begin{cases} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}\rho(a_k, I_1 + I_2); \end{cases} \tag{32}$$

każda prosta snopa S_k przecina czaszę (31).

Z uwagi na rezultaty części 1-ej możemy czaszy C_k przyporządkować warstwę

$$W_k \equiv W(\sigma_k, \delta_k, \varphi_k, \vartheta_k, 2\beta_k) \quad k = 1, 2 \ldots m \tag{33}$$

w taki sposób, aby zachodziły okoliczności następujące:

1) jeżeli punkt a należy do warstwy (33), wówczas:

$$\rho(a, a_k) \leqq 3\beta_k; \tag{34}$$

2) każdy odcinek snopa S_k przecina wszystkie czasze wchodzące w skład warstwy W_k;

3) jest:

$$\sigma_k \neq \sigma_l \qquad k \neq l \tag{35}$$

4) zachodzi nierówność:

$$\delta_k < \text{minimum } |\sigma_i - \sigma_l| \qquad i \neq l, \quad k, i, l = 1, 2 \ldots m \tag{36}$$

Widzimy odrazu, że dzięki warunkom 3) i 4) dwie różne warstwy (33) nie mają punktów wspólnych:

$$W_k \times W_l \equiv 0 \qquad k \neq l. \tag{37}$$

Dalej jeżeli a należy do W_k, wówczas zachodzi (34), z uwagi zatem na (32), punkt a nie może należeć do $I_1 + I_2$. Tym sposobem:

$$W_k \times (I_1 + I_2) \equiv 0 \qquad k = 1, 2 \ldots m. \tag{38}$$

Część 3-a, oparta na użyciu krzywej Peany. Weźmy pod uwagę równania specyalnej krzywej Peany, wypełniającej kwadrat o wierzchołkach (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1).

$$t_1 = \psi_1(\tau), \qquad t_2 = \psi_2(\tau) \qquad 0 \leqq \tau \leqq 1. \tag{39}$$

Połóżmy:

$$\begin{gathered} \Psi_1(\tau) = \psi_1(\psi_1(\tau)); \quad \Psi_2(\tau) = \psi_2(\psi_1(\tau)); \quad \Psi_3(\tau) = \psi_1(\psi_2(\tau)); \\ \Psi_4(\tau) = \psi_2(\psi_2(\tau)); \qquad 0 \leqslant \tau \leqslant 1 \end{gathered} \tag{40}$$

są to funkcye ciągłe. Krzywa:

$$u_i = \Psi_i(\tau) \qquad i = 1, 2, 3, 4; \qquad 0 \leqslant \tau \leqslant 1 \tag{41}$$

uskutecznia jednoznaczne i ciągłe odwzorowanie odcinka (0, 1) na czterowymiarową kostkę: $0 \leqq u_i \leqq 1$, $i = 1, 2, 3, 4$. Połóżmy dalej:

$$S_k \equiv S(\varphi'_k, \vartheta'_k, \beta'_k, \varphi''_k, \vartheta''_k, \beta''_k); \tag{42}$$

snop ten wyznaczony jest przez dwie czasze:

$$\begin{gathered} C'_k \equiv (1, \varphi'_k, \vartheta'_k, \beta'_k), \\ C''_k \equiv (\lambda, \varphi''_k, \vartheta''_k, \beta''_k), \end{gathered} \tag{43}$$

które są homeomorficzne z kwadratem o wierzchołkach (0, 0), (0, 1), (1, 0) (1, 1), dadzą się więc na kwadrat ten odwzorować w sposób jednojednoznaczny i odwracalnie ciągły za pośrednictwem funkcyj

$$\begin{gathered} x = f_k^{(1)}(u, v), \quad y = f_k^{(2)}(u, v), \quad z = f_k^{(3)}(u, v) \\ x = F_k^{(1)}(u, v), \quad y = F_k^{(2)}(u, v), \quad z = F_k^{(3)}(u, v) \end{gathered} \qquad 0 \leqq u, v \leqq 1 \tag{44}$$

Kładziemy teraz:

$$\begin{gathered} x'_k(\tau) = f_k^{(1)}(\Psi_1(\tau), \Psi_2(\tau)), \\ y'_k(\tau) = f_k^{(2)}(\Psi_1(\tau), \Psi_2(\tau)), \\ z'_k(\tau) = f_k^{(3)}(\Psi_1(\tau), \Psi_2(\tau)), \end{gathered} \tag{45}$$

$$x_k''(\tau) = F_k^{(1)}(\Psi_3(\tau),\ \Psi_4(\tau)),$$
$$y_k''(\tau) = F_k^{(2)}(\Psi_3(\tau),\ \Psi_4(\tau)), \tag{46}$$
$$z_k''(\tau) = F_k^{(3)}(\Psi_3(\tau),\ \Psi_4(\tau)).$$

Oznaczmy przez $D(\tau)$ odcinek łączący punkt (45) z punktem (46), przez ξ, η, ζ spółrzędne punktu, w którym odcinek ten przecina kulę:

$$x^2 + y^2 + z^2 = [\sigma_k + \delta_k(\tau - \tfrac{1}{2})]^2. \tag{47}$$

Na podstawie uwagi w części 2-ej ξ, η, ξ są funkcyami ciągłemi zmiennych x_k', y_k', z_k', x_k'', y_k'', z_k'', $\sigma_k + \delta_k(\tau - \frac{1}{2})$, a więc funkcyami ciągłemi zmiennej τ, które oznaczyć możemy przez $\xi(\tau)$, $\eta(\tau)$, $\zeta(\tau)$ odpowiednio. Krzywa ciągła:

$$x = \xi(\tau),\quad y = \eta(\tau),\quad z = \zeta(\tau) \qquad 0 \leqq \tau \leqq 1 \tag{48}$$

jest łukiem prostym, gdyż dla $\tau_1 \neq \tau_2$ punkty o spółrzędnych $\xi(\tau_1)$, $\eta(\tau_1)$, $\zeta(\tau_1)$ oraz $\xi(\tau_2)$, $\eta(\tau_2)$, $\zeta(\tau_2)$ leżą na powierzchniach kul koncentrycznych o różnych promieniach, są zatem różne. Oznaczymy łuk ten przez J_k.

Zauważymy nasamprzód, że dla każdego τ przedziału (0, 1), punkty (45), (46) należą do czasz (43) odpowiednio, odcinek $D(\tau)$ zatem do snopa S_k. Wobec tego przecina on każdą czaszę warstwy W_k, punkt więc $\xi(\tau)$, $\eta(\tau)$, $\zeta(\tau)$ należeć musi do tej warstwy. Stąd wynika:

$$J_k \subset W_k. \tag{40}$$

Uwzględniając (37), (38) widzimy, że:

$$J_k \times J_l \equiv 0 \qquad k \neq l \tag{50}$$

$$J_k \times I_1 + I_2 \equiv 0. \tag{51}$$

Wreszcie, ponieważ warstwa W_k leży wewnątrz kuli K_2, więc i J_k zawiera się wewnątrz tej kuli.

Niechaj D_1 oznacza dowolny odcinek snopa S_k o końcach $\bar{x}'$, $\bar{y}'$, $\bar{z}'$; $\bar{x}''$, $\bar{y}''$, $\bar{z}''$; leżą one odpowiednio na czaszach (43). Istnieją w przedziale (0, 1), cztery liczby $\bar{u}_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, takie iż:

$$\bar{x}' = f_k^{(1)}(\bar{u}_1, \bar{u}_2);\quad \bar{y}' = f_k^{(2)}(\bar{u}_1, \bar{u}_2);\quad \bar{z}' = f_k^{(3)}(\bar{u}_1, \bar{u}_2);$$
$$\bar{x}'' = F_k^{(1)}(\bar{u}_3, \bar{u}_4);\quad \bar{y}'' = F_k^{(2)}(\bar{u}_3, \bar{u}_4);\quad \bar{z}'' = F_k^{(3)}(\bar{u}_3, \bar{u}_4). \tag{52}$$

Z kolei możemy dobrać w tymże przedziale dwie liczby $\bar{t}_1$, $\bar{t}_2$, takie, że:

$$\bar{u}_1 = \psi_1(\bar{t}_1);\quad \bar{u}_2 = \psi_2(\bar{t}_1);\quad \bar{u}_3 = \psi_1(\bar{t}_2);\quad \bar{u}_4 = \psi_2(\bar{t}_2). \tag{53}$$

Wreszcie dobrać możemy w przedziale (0, 1) wartość $\bar{\tau}$ w taki sposób, aby było:

$$\bar{t}_1 = \psi_1(\bar{\tau});\quad \bar{t}_2 = \psi_2(\bar{\tau}). \tag{54}$$

Jest wówczas:

$$\bar{u}_i = \Psi_i(\bar{\tau}), \qquad i = 1, 2, 3, 4, \tag{55}$$

$$\bar{x}' = x_k'(\bar{\tau});\quad \bar{y}' = y_k'(\bar{\tau});\quad \bar{z}' = z_k'(\bar{\tau})$$
$$\bar{x}'' = x_k''(\bar{\tau});\quad \bar{y}'' = y_k''(\bar{\tau});\quad \bar{z}'' = z_k''(\bar{\tau}) \tag{56}$$

i tym sposobem

$$D_1 \equiv D(\bar{\tau}). \tag{57}$$

Punkt łuku J_k o spółrzędnych $\xi(\bar{\tau})$, $\eta(\bar{\tau})$, $\zeta(\bar{\tau})$ należy ex definitione do odcinka D_1. A zatem: każdy odcinek snopa S_k przecina łuk J_k. Wobec powyższego, każdy odcinek przestrzeni Δ, i eo ipso każda prosta przecinająca kulę K_1 przecina również mnogość $J_1 + J_2 + \ldots + J_k + \ldots + J_m$.

Udowodnimy teraz że J_k nie może zawierać odcinka. Przypuśćmy że J_k zawiera odcinek s, punkty tego ostatniego odpowiadają wartościom τ pewnego przedziału (τ_1, τ_2) zawartego w przedziale (0, 1). Tym sposobem równania

$$x = \xi(\tau),\quad y = \eta(\tau),\quad z = \zeta(\tau) \qquad \tau_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_2 \tag{58}$$

przedstawiają odcinek s, ponieważ zaś odcinek $D(\tau)$ zawiera punkt o spółrzędnych $\xi(\tau)$, $\eta(\tau)$, $\zeta(\tau)$, więc jest dla każdego τ przedziału (τ_1, τ_2):

$$D(\tau) \times s \not\equiv 0. \tag{59}$$

Udowodnię, że związek ten jest niemożliwy. Z określenia krzywej specyalnej Peany wynika, że zbiór punktów (t_1, t_2), odpowiadających na mocy (39) wartościom τ przedziału (τ_1, τ_2), zawiera pewien obszar płaszczyzny dwu zmiennych rzeczywistych t_1, t_2, a zatem pewien prostokąt określony przez nierówności:

$$t_1' \leqslant t_1 \leqslant t_1'';\quad t_2' \leqslant t_2 \leqslant t_2''. \tag{60}$$

Raz jeszcze, posługując się wspomnianą własnością specyalnej krzywej Peany widzimy, że na mocy równań:

$$u_1 = \psi_1(t_1),\quad u_2 = \psi_2(t_1),\quad u_3 = \psi_1(t_2),\quad u_4 = \psi_2(t_2) \tag{61}$$

prostokątowi (60) odpowiada czterowymiarowy zbiór w przestrzeni u_1, u_2, u_3, u_4, zawierający pewien obszar, a więc pewną kostkę czterowymiarową:

$$u_i' \leqq u_i \leqq u_i'' \qquad i = 1,\ 2,\ 3,\ 4. \tag{62}$$

Zbiór więc punktów u_i ($i = 1, 2, 3, 4$), odpowiadających wartościom τ przedziału (τ_1, τ_2), na mocy równań (41), zawierać musi kostkę (62).

Przy jednojednoznacznem odwracalnie ciągłem odwzorowaniu kwadratu na czaszę, prostokątowi zawartemu w kwadracie odpowiadać musi pewien, zawarty w czaszy obszar powierzchni kulistej na której czasza leży, z drugiej strony każdy taki obszar zawiera pewną czaszę. Przy odwzorowaniach zatem:

$$\begin{aligned} &x = f_k^{(1)}(u_1, u_2); \quad y = f_k^{(2)}(u_1, u_2); \quad z = f_k^{(3)}(u_1, u_2); \quad 0 \leqslant u_1,\ u_2 \leqslant 1 \\ &x = F_k^{(1)}(u_3, u_4); \quad y = F_k^{(2)}(u_3, u_4); \quad z = F_k^{(3)}(u_3, u_4) \quad 0 \leqq u_3,\ u_4 \leqq 1 \end{aligned} \tag{63}$$

prostokątom:

$$u_i' \leqq u_i \leqq u_i'' \qquad i = 1,\ 2 \tag{64}$$

$$u_i' \leqq u_i \leqq u_i'' \qquad i = 3,\ 4 \tag{65}$$

odpowiadają na czaszach C_k', C_k'' zbiory zawierające pewne czasze $C_k^{(3)}$, $C_k^{(4)}$ odpowiednio; wyznaczają one pewien zawarty w S_k snop S_k'. Niechaj odcinek $D(\tau)$ należy do tego snopa. Końce tego odcinka zawarte są w $C_k^{(3)}$, $C_k^{(4)}$ odpowiednio, zatem ex definitione odpowiadają one wartościom u_1, u_2 prostokąta (64) względnie wartościom u_3, u_4 prostokąta (65), innemi słowy — układowi u_1, u_2, u_3, u_4, należącemu do czterowymiarowej kostki (62), a więc ostatecznie wartości τ przedziału (τ_1, τ_2). Tym sposobem związek:

$$S_k' \supset D(\tau) \tag{66}$$

pociąga za sobą:

$$\tau_1 \leqq \tau \leqq \tau_2, \tag{67}$$

a zatem związek (59). Z drugiej strony prosta, zawierająca odcinek s, przecina czaszę $C_k^{(3)}$ conajwyżej w dwu punktach, czasza ta zawiera więc punkt p, nie należący do wspomnianej prostej. Punkt p i odcinek s wyznaczają jednoznacznie płaszczyznę H, która je zawiera. H nie może zawierać czaszy $C_k^{(4)}$, gdyż ta ostatnia nie jest zbiorem płaskim, istnieje zatem punkt p_1, zawarty w $C_k^{(4)}$, lecz nie w H. Odcinek $\overline{pp_1}$ jest jednym z odcinków $D(\tau)$, powiedzmy odcinkiem $D(\tau')$. Należy on do S_k', a więc:

$$\tau_1 \leqq \tau' \leqq \tau_2; \tag{68}$$

z drugiej strony $D(\tau)$ ma z H jeden tylko punkt p wspólny, gdyż nie leży w H. Ponieważ p nie należy do s, zaś:

$$H \supset s, \tag{69}$$

więc:

$$D(\tau') \times s = 0, \tag{70}$$

nie dla wszystkich więc τ przedziału (τ_1, τ_2) zachodzi (59). Doszliśmy zatem do sprzeczności; stąd wynika, że J_k nie zawiera odcinków prostoliniowych.

Część 4-a, oparta na zastosowaniu pomocniczego lemmatu III. Łuki proste $I_1, J_1 \ldots J_m, I_2$ wobec (50) i (51), wobec założenia i tego że J_k leży wewnątrz K_2, spełniają warunki lemmatu III, przyczem K_2 gra rolę obszaru wypukłego D. Istnieje zatem łuk J o końcach a_1, b_2 zawierający łuki $I_1, J_1 \ldots J_m, I_2$, nie zawierający żadnego odcinka i taki, że część jego między b_1 i a_2 przebiega wewnątrz K_2. Części między a_1 i b_1 oraz między a_2 i b_2 są identyczne z łukami I_1, I_2. Wspomniany łuk J czyni oczywiście zadość innym warunkom twierdzenia, tak że to ostatnie jest udowodnione w zupełności.

Przejdziemy obecnie do wprowadzenia pewnego nowego pojęcia, przy pomocy którego sformułujemy nieco inaczej rezultat twierdzenia IV.

Równania:

$$x = f_1(t); \quad y = f_2(t); \quad z = f_3(t) \quad 0 \leqq t \leqq 1 \tag{71}$$

w których funkcye $f_1(t)$ są jednoznaczne ciągłe i czynią zadość warunkowi:

$$\sum_{i=1}^{3} |\, f_i(t_1) - f_i(t_2) \,| > 0, \quad t_1 \neq t_2 \tag{72}$$

przedstawiają łuk prosty (trójwymiarowej przestrzeni), który oznaczymy przez $[f_i(t)]$. Każdy łuk prosty można przedstawić w postaci (71), przyczem spełnione są warunki (72). Jeżeli $0 \leqq t_1 < t_2 \leqq 1$, wówczas symbol $[f_i(t)]_{t_1}^{t_2}$ oznaczać będzie łuk prosty:

$$x = f_1(t); \quad y = f_2(t); \quad z = f_3(t); \quad t_1 \leqq t \leqq t_2 \tag{73}$$

innemi słowy część łuku $[f_i(t)]$, zawartą między punktami, odpowiadającemi wartościom t_1 i t_2 parametru t.

IVa. Założenie: Łuk prosty $[f_i(t)]$ nie zawiera odcinka; $\varepsilon > 0$; K_1 i K_2 oznaczają kule koncentryczne o promieniach ε i 2ε, łuk $[f_i(t)]_{t_1}^{t_2}$ leży wewnątrz K_2.

Wniosek: Istnieje łuk prosty $[f_i(t;\ K_1,\ t_1,\ t_2)]$ nie zawierający odcinka, czyniący zadość warunkom:

$$f_i(t;\ K_1,\ t_1,\ t_2) = f_i(t); \quad 0 \leqq t \leqq t_1, \quad t_2 \leqq t \leqq 1 \qquad i = 1,\ 2\ 3 \tag{74}$$

$$|\, f_i(t;\ K_1,\ t_1,\ t_2) - f_i(t) \,| \leqq 4\varepsilon; \quad t_1 < t < t_2 \tag{75}$$

$$\Gamma(K_1) \subset \Gamma([f_i(t,\ K_1,\ t_1,\ t_2)]_{t_1}^{t_2}). \tag{76}$$

Dowód. Oznaczamy punkty łuku danego, odpowiadające wartościom $0, t_1, t_2, 1$ parametru t, przez a_1, b_1, a_2, b_2, odpowiednio. I_1, I_2 niech będą łuki $[f_i(t)]_0^{t_1}$ i $[f_i(t)]_{t_2}^1$. Zastosujmy twierdzenie IV, J niechaj będzie łukiem prostym spełniającym wymagania tego twierdzenia, L częścią łuku J między b_1 i a_2. Możemy przedstawić L w formie:

$$L \equiv [\varphi_i(\tau)] \tag{77}$$

tak, aby wartościom $\tau = 0$, $\tau = 1$ odpowiadały punkty b_1 i a_2. Kładziemy następnie:

$$\begin{aligned} &f_i(t;\ K_1,\ t_1,\ t_2) = f_i(t); \quad 0 \leqq t \leqq t_1; \quad t_2 \leqq t \leqq 1 \\ &f_i(t;\ K_1,\ t_1,\ t_2) = \varphi_i\left(\frac{t-t_1}{t_2-t_1}\right) \qquad t_1 < t < t_2 \end{aligned} \qquad i = 1,\ 2,\ 3 \tag{78}$$

Sprawdzamy natychmiast, że określone w ten sposób funkcye są ciągłe i sprawdzają (72), symbol $[f_i(t;\ K_1,\ t_1,\ t_2)]$ oznacza łuk prosty, jak łatwo widzieć, identyczny z łukiem J. Wobec tego nie zawiera on żadnego odcinka; związek (74) jest spełniony ex definitione. Jeżeli $t_1 < t < t_2$, wówczas punkty o spółrzędnych $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$ oraz $f_1(t,\ K_1,\ t_1,\ t_2), f_2(t;\ K_1,\ t_1,\ t_2), f_3(t;\ K_1,\ t_1,\ t_2)$ leżą pierwszy na łuku $[f_i(t)]_{t_1}^{t_2}$, więc wewnątrz K_2, drugi na łuku L, więc znów wewnątrz K_2. Odległość zatem tych punktów nie przekracza średnicy kuli K_2 t. zn. 4ε:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{3} \{f_i(t) - f_i(t;\ K_1,\ t_1,\ t_2)\}^2} \leqq 4\varepsilon, \tag{79}$$

stąd zaś wynika (75)

Wreszcie, ponieważ każda prosta przecinająca K_1, przecina część łuku J między b_1 i a_2, t. zn. L, zaś:

$$L \equiv [f_i(t;\ K_1,\ t_1,\ t_2)], \tag{80}$$

więc ma miejsce (76) i IVa jest udowodnione.

V. Założenie: Łuk prosty $[f_i(t)]$ nie zawiera odcinka; $\eta > 0$.

Wniosek: Istnieje bryła $B(f_i(t);\ \eta)$ i łuk prosty $[f_i(t;\ \eta)]$, czyniące zadość następującym warunkom:

$$[f_i(t)] \subset B(f_i(t),\ \eta), \tag{81}$$

$$[f_i(t;\ \eta)] \times B(f_i(t),\ \eta) \not\equiv 0, \tag{82}$$

$$|f_i(t;\ \eta) - f_i(t)| \leqq \eta, \tag{83}$$

$$\Gamma(B(f_i(t);\ \eta)) \subset \Gamma([f_i(t;\ \eta)]). \tag{84}$$

Zauważymy nasamprzód, że symbol $[f_i(t;\ K_1,\ t_1,\ t_2)]$ nie jest przez warunki, którym musi podlegać, określony jednoznacznie. Umówimy się jednak, że przy danych $f_i(t), K_1, t_1, t_2$ będziemy przez ten symbol rozumieli pewien indywidualny łuk prosty, czyniący zadość wymaganiom twierdzenia IVa. Połóżmy dalej $\varepsilon = \frac{1}{4}\eta$ i opiszmy z każdego punktu łuku danego, z wyjątkiem końców kulę promieniem ε; każdy punkt łuku, nie wyłączając końców, leży wewnątrz jednej z kul wspomnianych. Opierając się na twierdzeniu Heine-Borela, możemy ze zbioru kul powyższych wybrać skończoną podmnogość (Z) w taki sposób, aby każdy punkt łuku $[f_i(t)]$ mieścił się wewnątrz jednej conajmniej z kul podmnogości (Z). Wartości parametru t, którym odpowiadają na łuku $[f_i(t)]$ środki kul zbioru (Z) ustawiamy w ciąg rosnący:

$$t_1 < t_2 \ldots < t_n; \qquad 0 < t_1, \quad t_n < 1. \tag{85}$$

Oznaczamy przez K_m, K'_m odpowiednio kule opisane promieniami ε, 2ε z punktu odpowiadającego na łuku danym wartości $t = t_m$. Kładąc:

$$B(f_i(t),\ \eta) \equiv K_1 + K_2 \ldots + K_n, \tag{86}$$

widzimy że warunek (81) jest spełniony. Dobieramy następnie ciąg rosnący:

$$u_1 < u_2 < u_3 \ldots < u_{2n} \qquad 0 < u_1, \quad u_{2n} < 1 \tag{87}$$

tak aby zachodziły związki:

$$u_{2m-1} < t_m < u_{2m}, \tag{88}$$

$$[f_i(t)]_{u_{2m-1}}^{u_{2m}} \subset \text{wnętrze } K'_m, \tag{89}$$

co, jak łatwo widzieć, jest możliwe, poczem kładziemy:

$$f_i^{(0)}(t) = f_i(t) \qquad 0 \leqq t \leqq 1, \quad i = 1,\ 2,\ 3 \tag{90}$$

$$f_i^{(m+1)}(t) = f_i^{(m)}(t;\ K_{m+1},\ u_{2m+1},\ u_{2m+2}), \qquad m = 0 \ldots n-1 \tag{91}$$

o ile symbol po prawej stronie ma sens, do czego potrzeba i wystarcza, aby: 1) łuk $[f_i^{(m)}(t)]$ nie zawierał żadnego odcinka, 2) łuk $[f_i^{(m)}(t)]_{u_{2m+1}}^{u_{2m+2}}$ leżał wewnątrz K'_{m+1}; wreszcie:

$$f_i(t;\ \eta) = f_i^{(n)}(t). \tag{92}$$

Udowodnimy teraz co następuje. Dla każdego $m < n$ prawa strona (92) ma sens, przyczem funkcya $f_i^{(m+1)}(t)$ określona przez ten wzór spełnia warunki:

$$f_i^{(m+1)}(t) = f_i(t), \qquad u_{2m+2} \leqq t \leqq 1 \tag{93}$$

$$f_i^{(m+1)}(t) = f_i^{(k)}(t), \qquad 0 \leqq t \leqq u_{2k+1}, \quad k \leqq m \tag{94}$$

$$|f_i^{(m+1)}(t) - f_i(t)| \leqq \eta = 4\varepsilon. \tag{95}$$

Dowód przeprowadzimy indukcyjnie, rozbijając go, jak zwykle, na dwie części.

a) Jeżeli $m = 0$, to twierdzenie jest prawdziwe; istotnie, wobec (90) symbol $f_i^{(0)}(t;\, K_1, u_1, u_2)$ ma sens, gdyż znaczy to samo co $f_i(t;\, K_1, u_1, u_2)$, ten zaś symbol ma sens wobec założenia dotyczącego $[f_i(t)]$ i wobec związku (89), dla $m = 1$. Dalej warunki (93) i (94) w jedynym tu możliwym przypadku $k = 0$ stają się identyczne ze związkiem (74), są zatem spełnione. Warunek wreszcie (95) jest identyczny z (75), zatem znów spełniony.

b) Twierdzenie zachodzi dla $m = l + 1$ (przyczem musi być $l \leqq n - 2$), jeżeli zachodzi dla $m \leqq l$. Na mocy założenia mamy:

$$f_i^{(l+1)}(t) = f_i^{(l)}(t;\, K_{l+1}, u_{2l+1}, u_{2l+2}), \tag{96}$$

przyczem symbol po prawej stronie ma sens; dalej:

$$f_i^{(l+1)}(t) = f_i(t), \qquad u_{2l+2} \leqq t \leqq 1 \tag{97}$$

$$f_i^{(l+1)}(t) = f_i^{(k)}(t), \qquad 0 \leqq t \leqq u_{2k+1} \qquad k \leqq l \tag{98}$$

$$|f_i(t) - f_i^{(l+1)}| \leqq \eta. \tag{99}$$

Stąd wnosimy przedewszystkiem, że łuk $[f_i^{(l+1)}(t)]$ nie zawiera żadnego odcinka; powtóre z (97) i (89), przy $m = l + 2$, mamy:

$$[f_i^{(l+1)}(t)]_{u_{2l+3}}^{u_{2l+4}} \equiv [f_i(t)]_{u_{2l+3}}^{u_{2l+4}} \subset \text{wnętrze } K'_{l+2}; \tag{100}$$

tym sposobem w równaniu:

$$f_i^{(l+2)}(t) = f_i^{(l+1)}(t,\, K_{l+2}, u_{2l+3}, u_{2l+4}) \tag{101}$$

symbol po prawej stronie ma sens. Dalej mamy, stosując (74), (75):

$$f_i^{(l+2)}(t) = f_i^{(l+1)}(t), \qquad 0 \leqq t \leqq u_{2l+3}, \quad u_{2l+4} \leqq t \leqq 1, \tag{102}$$

$$|f_i^{(l+2)}(t) - f_i^{(l+1)}(t)| \leqq 4\varepsilon = \eta \qquad u_{2l+3} \leqq t \leqq u_{2l+4}, \tag{103}$$

kombinując zaś związek (102) ze związkiem (97) względnie (98), a następnie (102), (103), (97), przekonywamy się z łatwością, że przy $m = l + 1$ mają miejsce związki (93), (94), (95).

Tym sposobem rezultat, o który chodzi, jest udowodniony indukcyjnie. Pisząc związki (93), (94), (95) dla $m = n - 1$ i uwzględniając (92), mamy:

$$f_i(t;\, \eta) = f_i(t), \qquad u_{2n} \leqq t \leqq 1, \tag{104}$$

$$f_i(t;\, \eta) = f_i^{(k)}(t), \qquad 0 \leqq t \leqq u_{2k+1}, \tag{105}$$

$$|f_i(t;\, \eta) - f_i(t)| \leqq \eta, \qquad 0 \leqq t \leqq 1. \tag{106}$$

Związek (106) jest identyczny z (83); ze związku (104) wynika:

$$[f_i(t)] \times [f_i(t;\, \eta)] \not\equiv 0, \tag{107}$$

stąd zaś, wobec (81); otrzymujemy (82). Ze związku (105) otrzymujemy, uwzględniając (91) i (76):

$$[f_i(t;\, \eta)]_{u_{2k-1}}^{u_{2k}} \equiv [f_i^{(k)}(t)]_{u_{2k-1}}^{u_{2k}} \equiv [f_i^{(k-1)}(t;\, K_k, u_{2k-1}, u_{2k})]_{u_{2k-1}}^{u_{2k}}$$
$$k = 1, 2 \ldots n, \tag{108}$$

$$\Gamma(B(f_i(t);\, \eta)) \equiv \sum_{k=1}^{n} \Gamma(K_k) \subset \sum_{k=1}^{n} \Gamma([f_i^{(k-1)}(t;\, K_k, u_{2k-1}, u_{2k})]_{u_{2k-1}}^{u_{2k}} \equiv$$
$$\equiv \sum_{k=1}^{n} \Gamma([f_i(t;\, \eta)]_{u_{2k-1}}^{u_{2k}} \equiv \Gamma\left(\sum_{k=1}^{n} [f_i(t;\, \eta)]_{u_{2k-1}}^{u_{2k}}\right) \subset \Gamma([f(t;\, \eta)]). \tag{108}$$

Tym sposobem twierdzenie V jest udowodnione.

Co do wieloznaczności i możliwości ujednoznacznienia symbolów $f_i(t;\, \eta)$ i $B(f_i(t);\, \eta)$, to stosuje się do nich to samo, co do symbolów $f_i(t;\, K, t_1, t_2)$.

---

§ 2. Budowa bryły B i łuku S.

Załóżmy, że $[f_i(t)]$ jest łukiem prostym, nie zawierającym żadnego odcinka, np. łuk koła. Tworzymy ciąg liczb dodatnich $\{\eta_n\}$, ciąg łuków prostych $\{[f_i^{(n)}(t)]\}$ i ciąg brył $\{B_n\}$, w następujący sposób:

I. $\eta_1 = 1$; $f_i^{(1)}(t) = f_i(t;\, \eta_1)$; $B_1 \equiv B(f_i(t);\, \eta_1))$.

II. Załóżmy, że elementy naszych ciągów zostały wyznaczone, aż do n-tego włącznie i oznaczmy przez δ_k (dla $k = 1, 2 \ldots n$) minimum funkcyi

ciągłej dwu zmiennych $\sum_{i=1}^{3} |f_i^{(k)}(t) - f_i^{(k)}(\tau)|$ na zbiorze, określonym przez nierówności:

$$0 \leqq t \leqq 1, \quad 0 \leqq \tau \leqq 1, \quad |t - \tau| \geqq \frac{1}{k}; \tag{110}$$

minimum to jest dodatnie. Kładziemy teraz jako η_{n+1} największą liczbę dodatnią, spełniającą nierówności:

$$\eta_{n+1} \leqq \tfrac{1}{2}\eta_n, \tag{111}$$

$$\eta_{n+1} \leqq \tfrac{1}{24}\delta_n. \tag{112}$$

Następnie kładziemy:

$$B_{n+1} = B(f_i^{(n)}(t), \eta_{n+1}), \tag{113}$$

$$f_i^{(n+1)}(t) = f_i^{(n)}(t; \eta_{n+1}), \tag{114}$$

Symbol $f_i(t; \eta_1)$ ma sens w każdym razie. Jeżeli symbol po prawej stronie (114) ma sens, wówczas $f_i^{(n+1)}(t)$ jest łukiem prostym nie zawierającym odcinka, ma więc sens także symbol $f_i^{(n+1)}(t, \eta_{n+2})$. Stąd wynika, że elementy ciągów naszych są określone dla wszystkich wartości n, przez nasze umowy. Wobec I, (111), (83) mamy:

$$\begin{aligned} &|f_i^{(1)}(t) - f_i(t)| \leqq 1, \\ &|f_i^{(n+1)}(t) - f_i^{(n)}(t)| \leqq \frac{1}{2^n}. \end{aligned} \tag{115}$$

Szereg nieskończony $f_i^{(1)}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} (f_i^{(n+1)}(t) - f_i^{(n)}(t))$ jest wyraz po wyrazie bezwzględnie mniejszy od zbieżnego szeregu geometrycznego: 1+maximum $|f_i(t)| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, zatem zbieżny bezwzględnie i jednostajnie. Ciąg $\{f_i^{(n)}(t)\}$ jest zatem jednostajnie zbieżny, jego granica $F_i(t)$ jest funkcyą ciągłą w przedziale (0, 1). Równania:

$$x = F_1(t), \quad y = F_2(t), \quad z = F_3(t) \tag{116}$$

określają łuk prosty, jeżeli dla $t_1 \neq t_2$, $0 \leqq t_1 \leqq 1$, $0 \leqq t_2 \leqq 1$:

$$\sum_{i=1}^{3} |F_i(t_1) - F_i(t_2)| > 0. \tag{117}$$

Możemy do t_1, t_2 dobrać liczbę naturalną p tak, że:

$$|t_1 - t_2| \geqq \frac{1}{p}. \tag{118}$$

Mamy teraz wobec określenia $F_i(t)$ oraz (111) i (115):

$$|F_i(t) - f_i^{(p)}(t)| \leqq \sum_{n=p}^{\infty} |f_i^{(n+1)}(t) - f_i^{(n)}(t)| \leqq \sum_{n=p}^{\infty} \eta_{n+1} \leqq 2\eta_{p+1}. \tag{119}$$

Stosując tę nierówność dla wartości t_1, t_2, otrzymamy z łatwością

$$\left| \sum_{i=1}^{3} |F_i(t_1) - F_i(t_2)| - \sum_{i=1}^{3} |f_i^{(p)}(t_1) - f_i^{(p)}(t_2)| \right| \leqq 12\eta_{p+1} \leqq \frac{\delta_p}{2}. \tag{120}$$

Z drugiej strony wobec (118) mamy:

$$\sum_{i=1}^{3} |f_i^{(p)}(t_1) - f_i^{(p)}(t_2)| \geqq \delta_p. \tag{121}$$

Stąd zaś i ze związku (120):

$$\sum_{i=1}^{3} |F_i(t_1) - F_i(t_2)| \geqq \frac{\delta_p}{2} > 0. \tag{122}$$

Związek (117) ma więc zawsze miejsce; równania (117) określają tym sposobem pewien łuk prosty:

$$[F_i(t)] = S. \tag{123}$$

Łuk $[f_i(t)]$ możemy zamknąć w kuli o promieniu skończonym $= R$. Środek jej oznaczymy przez a. Mamy dalej:

$$|f_i(t) - f_i^{(n)}(t)| \leqq \sum_{k=1}^{n} \eta_k < 2, \tag{124}$$

skąd z łatwością wynika, że $[f_i^{(n)}(t)]$ mieści się w kuli o środku a i promieniu $R + 2\sqrt{3}$. Ponieważ każdy punkt bryły B_{n+1} jest odległy conajwyżej o $\frac{\eta_{n+1}}{4} < \frac{1}{4}$ od łuku $[f_i^{(n)}(t)]$, zaś każdy punkt bryły B_1 conajwyżej o $\frac{1}{4}$ od łuku $[f_i(t)]$, więc wszystkie bryły B_n zawierają się w kuli o środku a i promieniu $R + 2\sqrt{3} + \frac{1}{4}$ i zbiór $\mathfrak{M}\{B_n\}$ jest ograniczony.

Mamy dalej, wobec (81), (82):

$$[f_i^{(n)}(t)] \subset B_{n+1} \qquad n = 1, 2 \ldots \tag{125}$$

$$[f_i(t)] \subset B_1 \tag{126}$$

$$[f_i^{(n)}(t)] \times B_n \not\equiv 0, \tag{127}$$

a zatem:

$$B_n \times B_{n+1} \not\equiv 0. \tag{128}$$

Połóżmy:

$$C_n \equiv \sum_{k=1}^{n} B_k,$$

mamy wówczas:

$$C_{n+1} \equiv C_n + B_{n+1}, \tag{129}$$

$$C_n \times B_{n+1} \not\equiv 0 \tag{130}$$

C_1 jest bryłą; związki (129), (130) orzekają, że jeżeli C_n jest bryłą, to i C_{n+1} jest bryłą. Zatem wszystkie C_n są bryłami. Na tej zasadzie i na mocy poprzednich rozważań zbiór

$$B \equiv \overline{\mathfrak{M}\{B_n\}} \equiv \overline{\mathfrak{M}\{C_n\}} \tag{131}$$

jest bryłą ograniczoną. Na mocy (125), (126) mamy dalej:

$$B \supset \overline{\mathfrak{M}\{[f_i^{(n)}(t)]\}}. \tag{132}$$

Niech a oznacza dowolny punkt łuku (123), t_1 wartość parametru, której punkt ten odpowiada, a_n punkt o spółrzędnych $f_1^{(n)}(t_1)$, $f_2^{(n)}(t_1)$, $f_3^{(n)}(t_1)$. Mamy:

$$a = \lim a_n, \tag{133}$$

$$a_n \subset [f_i^{(n)}(t)] \subset \mathfrak{M}\{[f_i^{(n)}(t)]\}; \qquad n = 1, 2 \ldots \tag{134}$$

a jest tym sposobem punktem skupienia zbioru $\mathfrak{M}\{[f_i^{(n)}(t)]\}$, a więc punktem tego zbioru, gdyż jest on domknięty. Stąd oraz ze (132) wynika:

$$a \subset B; \tag{135}$$

ponieważ zaś a jest dowolnym punktem łuku S, więc

$$S \subset B. \tag{136}$$

Weźmy teraz pod uwagę dowolną prostą zbioru $\Gamma(B)$; zaliczymy ją do pierwszej kategoryi, jeżeli należy zarazem do $\Gamma(\mathfrak{M}\{B_n\})$, do drugiej kategoryi w przeciwnym razie. Mamy teraz:

$$\Gamma(\mathfrak{M}\{B_n\}) \equiv \mathfrak{M}\{\Gamma(B_n)\} \tag{137}$$

oraz na mocy (84), (113), (114), (125):

$$\Gamma([f_i^{(n)}(t)]) \subset \Gamma(B_{n+1}), \tag{138}$$

$$\Gamma(B_n) \subset \Gamma([f_i^{(n)}(t)]), \tag{139}$$

stąd zaś:

$$\Gamma(B_n) \subset \Gamma(B_{n+1}) \tag{140}$$

i ogólnie

$$\Gamma(B_n) \subset \Gamma(B_{n+p}) \qquad p = 0, 1, 2 \ldots \tag{141}$$

Niech teraz będzie prosta pierwszej kategoryi, dana przez równania:

$$\begin{aligned} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 &= 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 &= 0. \end{aligned} \tag{142}$$

Ponieważ należy ona do zbioru (137) więc musi należeć do jednego ze zbiorów $\Gamma(B_n)$, przypuśćmy do $\Gamma(B_s)$, na mocy więc (141) do wszystkich zbiorów $\Gamma(B_{s+p})$ $p = 0, 1, 2 \ldots$, na mocy zatem związku (131) zastosowanego w przypadku $n = s + p$ do zbiorów $\Gamma([f_i^{(s-p)}(t)])$; $p = 0, 1 \ldots$

Znaczy to, że łuk $[f_i^{(s+p)}(t)]$ ma punkt wspólny z prostą (142); innemi słowy jest dla pewnej wartości t_p parametru t:

$$\begin{aligned} A_1 f_1^{(s+p)}(t_p) + B_1 f_2^{(s+p)}(t_p) + C_1 f_3^{(s+p)}(t_p) + D_1 &= 0, \\ A_2 f_1^{(s+p)}(t_p) + B_2 f_2^{(s+p)}(t_p) + C_2 f_3^{(s+p)}(t_p) + D_2 &= 0. \end{aligned} \tag{143}$$

Z ciągu $\{t_p\}$ wybrać można na zasadzie twierdzenia Bolzano-Weierstrassa ciąg zbieżny $\{t_{p_k}\}$, $k = 1, 2 \ldots$ Oznaczmy granicę tego ostatniego przez $t^{(0)}$. Wobec tego że ciąg $\{f_i^{(n)}(t)\}$ jest jednostajnie zbieżny do granicy $F_i(t)$, mamy:

$$\lim_{k=\infty} f_i^{(s+p_k)}(t_{p_k}) = F_i(t^{(0)}) \qquad i = 1, 2, 3. \tag{144}$$

Z drugiej strony, ponieważ każde t_{p_k} jest jednem z t_p, więc

$$\begin{aligned} A_1 f_1^{(s+p_k)}(t_{p_k}) + B_1 f_2^{(s+p_k)}(t_{p_k}) + C_1 f_3^{(s+p_k)}(t_{p_k}) + D_1 &= 0, \\ A_2 f_1^{(s+p_k)}(t_{p_k}) + B_2 f_2^{(s+p_k)}(t_{p_k}) + C_2 f_3^{(s+p_k)}(t_{p_k}) + D_2 &= 0. \end{aligned} \tag{144}$$

Przechodząc do granicy dla $\lim k = \infty$, otrzymamy wobec (144)

$$\begin{aligned} A_1 F_1(t^{(0)}) + B_1 F_2(t^{(0)}) + C_1 F_3(t^{(0)}) + D_1 &= 0, \\ A_2 F_1(t^{(0)}) + B_2 F_2(t^{(0)}) + C_2 F_3(t^{(0)}) + D_2 &= 0. \end{aligned} \tag{145}$$

Znaczy to że punkt łuku S odpowiadający wartości $t = t^{(0)}$ leży na

prostej (142), ta ostatnia należy zatem do $\Gamma(S)$. Widzimy tym sposobem że każda prosta pierwszej kategoryi należy do $\Gamma(S)$.

Weźmy teraz pod uwagę prostą drugiej kategoryi, przechodzi ona przez pewien punkt a_0 należący do $\overline{\mathfrak{M}\{B_n\}}$, lecz nie do $\mathfrak{M}\{B_n\}$, możemy więc znaleść ciąg punktów $\{a_p\}$, $p=1, 2\ldots$ należących do $\mathfrak{M}\{B_n\}$, taki że:

$$\lim_{p=\infty} a_p = a_0. \tag{146}$$

Oznaczmy dla $p=0, 1\ldots$ przez x_p, y_p, z_p spółrzędne punktu a_p. Równania danej prostej możemy napisać w postaci:

$$\begin{aligned} A_1(x-x_0)+B_1(y-y_0)+C_1(z-z_0)=0, \\ A_2(x-x_0)+B_1(y-y_0)+C_1(z-z_0)=0. \end{aligned} \tag{147}$$

Weźmy pod uwagę zbiór prostych:

$$\left.\begin{aligned} A_1(x-x_p)+B_1(y-y_p)+C_1(z-z_p)=0, \\ A_2(x-x_p)+B_2(y-y_p)+C_2(z-z_p)=0. \end{aligned}\right\} p=1, 2\ldots \tag{148}$$

Każda z nich jest pierwszej kategoryi, ma zatem z łukiem S punkt wspólny. Niech b_p oznacza punkt przecięcia prostej (148) z łukiem S; spółrzędne tego punktu oznaczymy przez x'_p, y'_p, z'_p. Wybierzmy z ciągu $\{b_p\}$ ciąg zbieżny $\{b_{p_k}\}$ i oznaczmy przez b_0 jego granicę, zaś przez x''_0, y''_0, z''_0 spółrzędne punktu b_0. Mamy:

$$\lim_{k=\infty} x'_{p_k}=x''_0; \quad \lim_{k=\infty} y'_{p_k}=y''_0; \quad \lim_{k=\infty} z'_{p_k}=z''_0 \tag{149}$$

jest dalej

$$b_{p_k} \subset S \tag{150}$$

ponieważ zaś S jest zbiorem domkniętym, a b_0 punktem skupienia ciągu $\{b_{p_k}\}$, więc:

$$b_0 \subset S. \tag{151}$$

Wreszcie na mocy określenia punktu b_{p_k}, jest:

$$\left.\begin{aligned} A_1(x'_{p_k}-x_p)+B_1(y'_{p_k}-y_{p_k})+C_1(z'_{p_k}-z_{p_k})=0, \\ A_2(x'_{p_k}-x_{p_k})+B_2(y'_{p_k}-y_{p_k})+C_2(z'_{p_k}-z_{p_k})=0; \end{aligned}\right\} k=1, 2\ldots \tag{152}$$

przechodząc do granicy dla $\lim k=\infty$, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} A_1(x''_0-x_0)+B_1(y''_0-y_0)+C_1(z''_0-z_0)=0 \\ A_2(x''_0-x_0)+B_2(y''_0-y_0)+C_2(z''_0-z_0)=0. \end{aligned} \tag{153}$$

Równania te orzekają, że b_0 leży na prostej (147), która tym sposobem przecina łuk S. Każda więc prosta drugiej kategoryi należy do $\Gamma(S)$. Reasumując, widzimy, że:

$$\Gamma(B) \subset \Gamma(S). \tag{154}$$

Z drugiej strony, wobec (136):

$$\Gamma(B) \supset \Gamma(S) \tag{155}$$

ostatecznie więc:

$$\Gamma(B) \equiv \Gamma(S). \tag{156}$$

Zbudowaliśmy zatem taką bryłę B i taki łuk prosty S, iż, po pierwsze B zawiera S, powtóre zbiór prostych przecinających bryłę B jest identyczny ze zbiorem prostych przecinających łuk S. Rozwiązaliśmy zatem zadanie nasze w zupełności.