Łatwo widzieć, że każda klasa K zbiorów, spełniająca warunki 2) i 4), spełnia też warunek 3): wynika to natychmiast z tożsamości

$$M_1 M_2 M_3 \ldots = M_1 - [(M_1 - M_2) + (M_1 - M_3) + (M_1 - M_4) + \ldots].$$

Klasa K_2 spełnia więc również warunek 3) i przeto, jako jedna z klas K, spełniających wszystkie cztery warunki 1) — 4), zawiera klasę K_1. Z drugiej strony, nie może być $K_2 = K_1$, gdyż klasa K_1 wszystkich mnogości (A) nie spełnia warunku 5): jak to bowiem udowodnił p. Suslin, istnieją mnogości (A), których dopełnienia nie są mnogościami (A).

Klasa K_2 jest więc istotnie szerszą niż klasa wszystkich mnogości (A). Z drugiej strony możnaby z łatwością udowodnić, że klasa K_2 zawiera tylko kontynuum różnych mnogości.

H. MÜNTZ.

Teorya ogólna bezpośredniego rozwiązywania równań.

Théorie générale de la résolution directe des équations.

I. Część algebraiczna.

W nocie przedstawionej w kwietniu r. 1917 Towarzystwu Naukowemu Warszawskiemu [1]) podałem dowód metody bezpośredniej stale zbieżnej rozwiązywania dowolnych równań algebraicznych, która przy niewielkich modyfikacyach daje się też zastosować do rozległych klas równań przestępnych. Metoda ta, wymagająca trzech kolejnych procesów granicznych, polega na odpowiedniem zestawieniu i uzupełnieniu znanych metod a) D. Bernoulli'ego, b) Eulera, c) Graeffego, d) Fr. Cohna i e) Hadamarda. Ma ona tę zaletę, że we wszystkich możliwych przypadkach daje wszystkie pierwiastki wraz ze stopniem ich wielokrotności. Wymienione zaś metody są albo w wielu przypadkach nieużyteczne, gdy ustanowienie i wyłączenie tych przypadków przy bezpośredniem rozwiązywaniu danego równania nie daje się przeprowadzić [a) — d)], albo — jak w metodzie daleko idącej Hadamarda — daje tylko bezwzględne wartości pierwiastków.

Podaję w pracy niniejszej teoryę zupełną z należnemi do niej dowodami czysto-algebraicznemi (§§ 1—6), przez co i teorye przestępne Hadamarda pozyskują algebraiczne uzasadnienie (§§ 3—5). Dalej podaję znaczne uproszczenie rozwiązania za pomocą jedynego procesu granicznego (§ 7), uogólnienie tego rozwiązywania (§§ 8—9) i ujęcie wyników, dogodne dla celów przestępnych.

---

[1]) Porówn. Sprawozdania Towarzystwa Naukowego, 1917.
a) — b) Introduction in anal. infinit. I. § 17.
c) Die Auflösung der höheren numerischen Gleichungen. Zürich, 1837.
d) Mathematische Annalen **44** (1894).
e) Journal de Mathématiques (4) **8 – 9** (1892 – 1893).

§ 1. Twierdzenie o rozwinięciu.

Niechaj w dziedzinie zespolonej dane będzie równanie

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0, \qquad a_n \neq 0, \quad a_0 \neq 0 \tag{1}$$

i niechaj będzie n stałych:

$$\xi^{(0)}, \quad \xi^{(1)}, \ldots, \quad \xi^{(n-1)} \tag{2}$$

dowolnie dobranych i ustalonych. Jeżeli utworzymy ciąg nieskończony

$$\xi^{n}, \ \ldots \ \xi^{(N)}, \quad \xi^{(N+1)} \tag{3}$$

według ogólnego prawa iteracyjnego

$$a_n \xi^{(N)} + a_{n-1} \xi^{(N-1)} + \ldots + a_1 \xi^{(N-n+1)} + a_0 \xi^{(N-n)} = 0, \tag{4}$$

to wyższe wielkości iterowane $\xi^{(N)}$ można wyrazić przez pierwiastki $x_1, \ldots, x_n$, danego równania i obrane stałe.

Dla

$$\xi^{(0)} = n, \quad \xi^{(1)} = \sum^{1\ldots n} x_\nu, \ \ldots, \quad \xi^{(n-1)} = \sum^{1\ldots n} x_\nu^{n-1}$$

otrzymujemy klasyczny przypadek Bernoulli'ego-Eulera z rozwinięciem $\xi^{(N)} = \sum_\nu x_\nu^N$.

Niechaj w przypadku najogólniejszym będzie

$$f(x) = (x - z_1)^{\alpha_1} (x - z_2)^{\alpha_2} \ldots (x - z_\lambda)^{\nu_\lambda}, \quad z_j \neq z_k \tag{5}$$

rozkładem funkcyi $f(x)$ na iloczyn jej różnych czynników liniowych. Wtedy można wykazać, że jest ogólnie:

$$\xi^{(N)} = A_1^{(1)} z_1^N + \ldots + A_1^{(\alpha_1)} \binom{N}{\alpha_1 - 1} z^{N-\alpha_1+1} + \ldots + \ldots + A_\lambda^{(1)} z_\lambda^N + \ldots + A_\lambda^{\alpha_\lambda} \binom{N}{\alpha_\lambda - 1} z_\lambda^{N-\alpha_\lambda+1}. \tag{6}$$

Wzór ten nazwiemy uogólnionem twierdzeniem Eulerowskiem o rozwinięciu.

Najprostszy lecz nie czysto algebraiczny dowód tego twierdzenia polega na rozwinięciu na ułamki cząstkowe i porównaniu tego rozwinięcia z szeregiem potęgowym. Wyobraźmy sobie uzupełnienie układu iteracyjnego (4) za pomocą równań

$$a_n \xi^{(\nu)} + a_{n-1} \xi^{(\nu-1)} + \ldots + a_{n-\nu} \xi^{(0)} = a_n c_\nu; \quad \nu = 0, \ldots n-1 \tag{7}$$

i połóżmy

$$c_0 x^{n-1} + \ldots + c_{n-2} x + c_{n-1} = \frac{1}{a_n} h(x), \tag{8}$$

wtedy wielkości $\xi^{(N)}$ dla wszystkich N są dane oczywiście przez spółczynniki rozwinięcia

$$\frac{h(x)}{f(x)} = \frac{\xi^{(0)}}{x} + \frac{\xi^{(1)}}{x^2} + \ldots + \frac{\xi^{(N)}}{x^{N+1}} + \ldots \tag{9}$$

według potęg rosnących wielkości x^{-1}. Z drugiej strony mamy rozwinięcie na ułamki cząstkowe

$$\begin{aligned} \frac{h(x)}{f(x)} &= \sum_{\mu_1}^{1\ldots\alpha_1} \frac{A_1^{(\mu_1)}}{(x - z_1)^{\mu_1}} + \ldots + \sum_{\mu_\lambda}^{1\ldots\alpha_\lambda} \frac{A_\lambda^{(\mu_\lambda)}}{(x - z_\lambda)^{\mu_\lambda}} \\ &= \sum_{k=1\ldots\lambda;\ \mu_k=1\ldots\alpha_k}^{\nu_k=0\ldots\infty} \frac{A_k^{(\mu_k)}}{x^{\mu_k}} \binom{\mu_k - 1 + \nu_k}{\mu_{k-1}} \cdot \frac{z_k^{\nu_k}}{x^{\nu_k}}. \end{aligned} \tag{10}$$

Jeżeli położymy tu $\mu_k + \nu_k = N + 1$, otrzymamy:

$$\frac{h(x)}{f(x)} = \sum_{k=1\ldots\lambda;\ \mu_k=0\ldots\alpha_k}^{N=0\ldots\infty} \frac{A_k^{(\mu_k)} \binom{N}{\mu_{k-1}} z_k^{N-\mu_k+1}}{x^{N+1}} \tag{11}$$

a porównanie z wzorem (9) daje nam bezpośrednio twierdzenie (6).

§ 2. Dowód algebraiczny twierdzenia o rozwinięciu.

Jest oczywiście możliwy czysto-algebraiczny dowód wzoru podstawowego (6). Związki przy tym dowodzie występujące są godne uwagi i dlatego je tu podamy.

Bez zmniejszenia ogólności połóżmy $a_n = 1$; będzie tedy:

$$a_n = 1; \quad a_{n-1} = -\sum_{\nu_1}^{1\ldots n} x_{\nu_1}; \quad a_{n-2} = \sum_{\nu_1 < \nu_2}^{1\ldots n} x_{\nu_1} x_{\nu_2}; \ldots \qquad a_0 = (-1)^n x_1 \ldots x_n; \tag{12}$$

sumowanie rozciąga się wszędzie na kombinacye bez powtórzenia. Z równań (7) i (4) otrzymujemy teraz:

$$\xi^{(0)} = c_0, \quad \xi^{(1)} = c_0 \sum x_{\nu_1} + c_1,$$
$$\xi^{(2)} = c_0 \sum x_{\nu_1}^2 + c_\nu \sum x_{\nu_1} x_{\nu_2} + c_1 \sum x_{\nu_1} + c_2, \ldots, \tag{13}$$

a przy pomocy indukcyi zupełnej ogólnie:

$$\xi^{(N)} = \sum_{\beta_0+\beta_1+\ldots+\beta_n=N} c_{\beta_0} x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_1} \ldots x_n^{\beta_n}; \quad \beta_0 < n, \quad \beta_k \geqslant 0. \tag{14}$$

Podstawiając wyniki (12), (14) w równania (7) i (4), otrzymujemy dla $M > 0$ w przypadku szczególnym $c_0 = 1$, $c_1 = \ldots = c_{n-1} = 0$ tożsamości:

$$\sum_{\Sigma\beta=M} x_1^{\beta_1} \ldots x_n^{\beta_n} - \sum x_{\nu_1} \sum_{\Sigma\beta=M-1} x_1^{\beta_1} \ldots x_n^{\beta_n} + \sum x_{\nu_1} x_{\nu_2} \sum_{\Sigma\beta=M-2} x_1^{\beta_1} \ldots x_n^{\beta_n}$$
$$- \ldots + (-1)^n x_1 \ldots x_n \sum_{\Sigma\beta=M-n} x_1^{\beta_1} \ldots x_n^{\beta_n} = 0; \tag{15}$$

Prosta redukcya skaźników daje podobnież:

$$\sum_{\Sigma\beta=M} x_2^{\beta_2} \ldots x_n^{\beta_n} - \sum x_{\nu_1} \sum_{\Sigma\beta=M-1} x_2^{\beta_2} \ldots x_n^{\beta_n} + \ldots$$
$$+ (-1)^{n-1} x_1 \ldots x_n \sum_{\Sigma\beta=M-n+1} x_1^{\beta_1} \ldots x_n^{\beta_n} = 0. \tag{16}$$

Niechaj najprzód wszystkie pierwiastki $x_1, \ldots, x_n$ równania danego będą różne. Z uwagi na wzór (8) i na założenie $a_n = 1$ otrzymujemy po łatwem przekształceniu wzoru (14) dla $N \geqslant n$:

$$\xi^{(N)} = h(x_1) \sum_{\Sigma\beta=N-n+1} x_1^{\beta_1} \ldots x_n^{\beta_n} + \sum_{\Sigma\beta=N}^{\beta_0<n,\ \beta_1<n-1} c_{\beta_0} x_1^{\beta_0} \ldots x_n^{\beta_n}. \tag{17}$$

Pomnóżmy obie strony przez

$$(x_1 - x_2) \ldots (x_1 - x_n) = x_1^{n-1} - x_1^{n-2} \sum^{2\ldots n} x_{\nu_1} + \ldots + (-1)^{n-1} x_2 \ldots x_n. \tag{18}$$

Tożsamość (16) pozwala nam spostrzedz, że wtedy po stronie prawej powstanie wyrażenie postaci:

$$h(x_1)\, x_1^N + \sum_{\nu}^{1\ldots 2n-3} B_\nu x_1^\nu, \tag{19}$$

gdzie B_ν nie zawiera już wcale x_1. Jeżeli przeto obie strony równania (17) pomnożymy przez wyznacznik Vandermonde'a

$$\prod_{j<k}^{1\ldots n} (x_j - x_k) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_1^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}, \tag{20}$$

to na podstawie symetryczności otrzymamy:

$$\xi^{(N)} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_1^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_1^{n-2} & h(x_1)\, x_1^N \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^{n-2} & h(x_n)\, x_n^N \end{vmatrix} + \eta_N, \tag{21}$$

gdzie η_N zawiera pierwiastki x_ν w potęgach, których wykładniki są $< 2n-2$. Jeżeli wymiar wielkości c_β przyjmiemy równym β, wymiar pierwiastków x_ν równym 1, to wymiar wielkości η_N na mocy równania (17) będzie wogóle równy $N + \dfrac{n(n-1)}{2}$. A zatem przynajmniej dla dostatecznie wysokich N musi być stale $\eta_N = 0$. Lecz na zasadzie definicyj (4) i (7) można to samo okazać wstecz dla skaźników niższych, mamy zatem dla pierwiastków nierównych zawsze:

$$\xi^{(N)} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_1^{n-2} & h(x_1)\, x_1^N \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^{n-2} & h(x_n)\, x_n^N \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_1^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \tag{22}$$

Przejście do pierwiastków najogólniejszego przypadku (5) uskuteczniamy najprościej, kładąc najprzód

$$x_1 = z_1, \quad x_2 = z_1 + \delta_1 \ldots \quad x_{\alpha_1} = z_1 + (\alpha - 1)\,\delta \tag{23}$$

i postępując podobnie dla dalszych grup stawających się równemi pierwiastków. Bierzemy następnie przy $0 \leqslant \nu < \alpha_1$ dla $(\nu+1)$-ych wierszy $\mathfrak{a}_{\nu+1}$ w wyznacznikach (22) kombinacye liniowe

$$\mathfrak{a}_{\nu+1}^* = \mathfrak{a}_{\nu+1} - \binom{\nu}{1} \mathfrak{a}_\nu + \binom{\nu}{2} \mathfrak{a}_{\nu-1} + \ldots + (-1)^\nu \mathfrak{a}_1; \tag{24}$$

wtedy nowe wiersze będą podzielne przez $\nu!\,\delta^\nu$, i po wykonaniu tych dzieleń pozostają wzory poprzednie prawdziwemi i dla $\delta = 0$. Zamiast poprzednich elementów wyznacznika (22) występują w wierszach zmienionych ich ν-te pochodne podzielone przez $\nu!$ Piszemy:

$$x^N h(x) = H(x), \quad H'(x) = h'(x)\, x^N + h(x)\, N x^{N-1};$$
$$H^{(\nu)}(x) = h^{(\nu)}(x)\, x^N + 1!\binom{\nu}{1} h^{(\nu-1)}(x) \binom{N}{1} x^{N-1} + \ldots + \nu!\, h(x) \binom{N}{\nu} x^{N-\nu} \tag{25}$$

i otrzymujemy po przeprowadzeniu podanego wyżej postępowania dla wszystkich grup pierwiastków równych:

$$\zeta^{(N)} = \begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 \ldots & z_1^{n-2} & H(z_1) \\ 0 & 1 & 2z_1 \ldots & (n-2)\, z_1^{n-3} & H'(z_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & z_2 & z_2^2 \ldots & z_2^{n-2} & H(z_2) \\ 0 & 1 & 2z_2 \ldots & (n-2)\, z_2^{n-3} & H'(z_2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & z_1 \ldots & z_1^{n-1} \\ 0 & 1 \ldots & (n-1)\, z_1^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & z_2 \ldots & z_2^{n-1} \\ 0 & 1 \ldots & (n-1)\, z_2^{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}. \tag{26}$$

Według podanego wyżej sposobu powstania z wzoru (20) wyznacznika Vandermonde'a można po prawej stronie równania (26) podać wyraźnie uogólniony wyznacznik Vandermonde'a dzielnika Δ; będzie:

$$\Delta = \prod_{k>j}^{1\ldots\lambda} (z_k - z_j)^{\alpha_k \alpha_j} \neq 0. \tag{27}$$

W dzielnej zaś, po wprowadzeniu wyrażeń (25), występuje jako czynnik wielkość $h(z_1)\binom{N}{\alpha_1-1} z_1^{N-\alpha_1+1}$, zupełnie podobnie jak (27) utworzony i obliczyć się dający wyznacznik, który powstaje po usunięciu ostatniej kolumny i α_1-tego wiersza tej dzielnej. Stosując oznaczenia (b), otrzymujemy bezpośrednio:

$$\begin{aligned} A_1^{(\alpha_1)} &= h(z_1) \prod_{k>j}^{2\ldots\lambda} (z_k - z_j)^{\alpha_k \alpha_j} \prod_{k}^{2\ldots\lambda} (z_k - z_1)^{\alpha_k(\alpha_1-1)} : \prod_{k>j}^{2\ldots\lambda} (z_k - z_j)^{\alpha_k \alpha_j} \\ &= h(z_1) \prod_{k}^{2\ldots\lambda} (z_k - z_j)^{-\alpha_k}. \end{aligned} \tag{28}$$

W następstwie stale przyjmować będziemy

$$h(z_1) \neq 0, \ldots, \quad h(z_\lambda) \neq 0, \tag{29}$$

co wyraża, że funkcye $h(x)$ i $f(x)$ nie posiadają pierwiastka wspólnego. Nakłada to na mające się obrać stałe $\xi^{(0)}, \ldots, \xi^{n-1}$ tylko prosty i łatwo spełnić się dający warunek, mianowicie by nie znikała wypadkowa funkcyj

$$f(x) = \sum^{0\ldots n} a_\nu x^\nu; \quad h(x) = \sum^{0\ldots n-1} a_\nu c_\nu x^{n-1-\nu} = \sum_{k \geqq \nu}^{0\ldots n-1} a_{n-k}\, \xi^{\nu-k} x^{n-1-\nu}. \tag{30}$$

W związku (26) zawarte jest właśnie żądane twierdzenie (6), a przy warunkach (29) na mocy równania (28) jest teraz:

$$A_1^{(\alpha_1)} \neq 0, \ldots, \quad A_\lambda^{(\alpha_\lambda)} = 0. \tag{31}$$

Twierdzenie (b) możemy napisać w postaci

$$\xi^{(N)} = \sum_{k}^{1\ldots\lambda} \psi_k(N)\, z_k^N, \tag{32}$$

gdzie $\psi_k(N)$ jest wielomianem stopnia $(\alpha_x - 1)$ względem N.

§ 3. Pierwszy proces graniczny.

Wyobraźmy sobie najprzód (§§ 3—5), że pierwiastki równania są uporządkowane w ten sposób, iż po pierwsze: każdy pierwiastek o większej wartości bezwzględnej znajduje się przed każdym z pierwiastków o wartości bezwzględnej mniejszej:

$$|x_1| \geqq |x_2| \geqq \ldots \geqq |x_n|; \quad |z_1| \geqq |z_2| \geqq \ldots \geqq |z_\lambda|; \tag{33a}$$

po drugie: w każdej grupie pierwiastków o równej wartości bezwzględnej poprzedzają pierwiastki o wyższej wielokrotności, np.

$$\text{dla} \quad |z_1| = \ldots = |z_{\lambda_1}| > (z_{\lambda_1+1}) \quad \text{jest też} \quad \alpha_1 \geqq \ldots \geqq \alpha_{\lambda_1}. \tag{33b}$$

W wielu przypadkach w twierdzeniu (6) prawa strona będzie mogła być przedstawiona asymptotycznie[1)] przez jeden wyraz najwyższy, mianowicie $A_1^{(\alpha_1)} \binom{N}{\alpha_1-1} z^{N-\alpha_1+1}$ i wtedy stosuje się uogólniony związek Eulera

$$\lim_{N=\infty} \xi^{(N+1)} : \xi^{(N)} = z_1 = x_1. \tag{34}$$

Zachodzi to oczywiście wtedy:

a) gdy istnieje jeden pojedyńczy pierwiastek o największej wartości bezwzględnej,

t. j. $\quad |x_1| > |x_2|, \quad$ a przeto $\quad |z_1| > |z_2|, \quad \alpha_1 = 1;$

1) Dwie wielkości B_N, C_N nazywają się asymptotycznie równemi, $B_N \backsim C_N$, gdy mamy $\lim B_N . C_N = 1$.

b) jeżeli istnieje jedyny wielokrotny pierwiastek o największej wartości bezwzględnej, a więc

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_{\alpha_1}; \quad |x_{\alpha_1}| > |x_{\alpha_1+1}|, \text{ a przeto znów } |z_1| > |z_2|;$$

c) jeżeli istnieją wprawdzie pierwiastki różne o równej największej wartości bezwzględnej, lecz gdy tylko jeden pomiędzy niemi posiada najwyższą wielokrotność, a więc

$$|z_1| = |z_2| = \ldots = |z_{\lambda_1}| > |z_{\lambda_1+1}|; \quad \alpha_1 > \alpha_2, \ldots \alpha_1 > \alpha_{\lambda_1}.$$

We wszystkich tych przypadkach stosuje się wprost związek Graeffego

$$\lim_{N=\infty} \left|\sqrt[N]{\xi^{(N)}}\right| = |z_1| = |x_1|. \tag{35}$$

Ale w równaniu danem może zachodzić i ten przypadek, że równanie ma więcej pierwiastków o równej wartości bezwzględnej i o równej najwyższej wielokrotności, a więc

$$|z_1| = |z_2| = \ldots = |z_{\lambda_1}|, \quad \alpha_1 = \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_{\lambda_1},$$

wtedy oba związki graniczne (34), (35) są nieważne, albowiem lewe ich strony nie dążą wogóle do granicy. Wprawdzie można przypadek rozważany wyłączyć, stosując do danego równania (1) podstawienie $x = x' + \tau$ z odpowiednio wyszukaną wielkością τ; lecz zwykle polecane to wyjęcie nie daje się zastosować bez pewnej dostatecznie znajomości wszystkich pierwiastków, gdyż braknie kryterym dla należytego wyboru wielkości τ, lub że istotnie wyraźne rozwiązanie dowolnego równania nie da się na tej drodze osiągnąć. Otóż okażemy najprzód na drodze algebraicznej, że w każdym razie we wszystkich okolicznościach stosuje się twierdzenie Hadamarda

$$\limsup \left|\sqrt[N]{\xi^{(N)}}\right| = |z_\lambda| = |x_1|. \tag{36}$$

Dowód poprzedzimy następującem twierdzeniem pomocniczem:

Twierdzenie pomocnicze 1 Niechaj będzie m różnych argumentów rzeczywistych φ_k $(k=1, 2\ldots m)$, podległych warunkowi $-\pi < \varphi_k \leqslant \pi$, i niechaj będzie tyleż danych stałych $b_k \neq 0$ rzeczywistych lub zespolonych. Niechaj dalej δ będzie dowolną wielkością dodatnią, dowolnie małą. Wtedy począwszy od odpowiedniego $N_0 = N_0(\delta)$ jest stale niemożliwą nierówność

$$\left|\sum_k^{1\ldots m} b_k e^{iN\varphi_k}\right| < \delta. \tag{37}$$

Dowód. Niechaj przeniesienie dla $N = N_0, N_0+1, \ldots, N_0+m-1$, będzie:

$$\sum_k^{n\ldots n} b_k e^{iN\varphi_k} = \delta_N, \quad |\delta_N| < \delta.$$

Rozwiązujemy ten układ względem wielkości b_k. Jego wyznacznik (Vandermonde'a) D, na zasadzie założeń, jest różny od zera; a nadto jego wartość bezwzględna nie zależy wcale od N_0; każdy z jego elementów ma wartość bezwzględną równą 1, a więc wszystkie jego minory główne D_{jk} są co do wartości bezwzględnej mniejsze np. od stałej $c = m^{\frac{m}{2}}$. Jest zatem:

$$b_k = \sum \delta_{N_0+j-1} \frac{D_{ik}}{D}; \qquad |b_k| < \frac{mc}{|D|}\delta, \tag{38}$$

a z powodu dowolnie małego δ stałe b_k mogłyby być uczynione dowolnie małemi, wbrew założeniu $b_k \neq 0$. Twierdzenie nasze jest więc dowiedzione.

Niechaj będzie w naszym przypadku

$$\begin{gathered} |z_1| = \ldots = |z_{\lambda_1}| = r_1 > |z_{\lambda_1+1}|, \quad \alpha_1 = \ldots = \alpha_m = \alpha > \alpha_{m+1} \geqslant \ldots \geqslant \alpha_{\lambda_1}; \\ z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}, \ \ldots, \quad z_m = r_1 e^{i\varphi_m}. \end{gathered} \tag{39}$$

Z wzoru (6) wynika tożsamościowo:

$$\begin{aligned} \xi^{(N)} &= \binom{N}{\alpha-1} \{A_1^{(\alpha)} e^{-i\alpha\varphi_1} e^{iN\varphi_1} + \ldots + A_m^{(\alpha)} e^{-i\alpha\varphi_m} e^{iN\varphi_m} + \eta_N\} \\ &= \binom{N}{\alpha-1} r_1^N (\delta_N + \eta_N), \end{aligned} \tag{40}$$

gdzie część druga w nawiasie klamrowym, t. j. η_N, przy nieograniczenie rosnącem N, może się stać dowolnie mała; lecz część pierwsza musi pozostać skończoną, $|\delta_N| < \sum_k^{1\ldots m} A_k^{(\alpha)} = \delta^{(0)}$ i na zasadzie twierdzenia pomocniczego I przekraczać bezwzględnie pewien stały dodatni kres $\delta^{(1)}$. Stąd zaś, na podstawie związków

$$\lim_{N=\infty} \sqrt[N]{\binom{N}{\alpha-1}} = 1, \qquad \lim_{N=\infty} \sqrt[N]{\delta^{(0)}} = 1, \qquad \lim_{N=\infty} \sqrt[N]{\delta^{(1)}} = 1, \tag{41}$$

wynika w samej rzeczy wzór graniczny (36), którzy zamierzaliśmy udowodnić.

§ 4. Kilka twierdzeń pomocniczych.

Twierdzenie pomocnicze II. Niechaj $P_\alpha(N)$ oznacza wielomian stopnia α-tego względem N z najwyższym spółczynnikiem $A \neq 0$ i niechaj $k_1, \ldots, k_\beta$ będą wartości stałe nierówne. Wtedy przy jednoznacznie oznaczonych spółczynnikach $b_\gamma \neq 0$ istnieje tożsamość

$$\sum_{\gamma}^{1\ldots\beta} b_\gamma P_\alpha(N + K_\gamma) = P_{\alpha-\beta+1}(N), \tag{42}$$

gdzie po prawej mamy wielomian stopnia $(\alpha - \beta + 1)$ z tymże najwyższym spółczynnikiem A.

Dowód. Żądany związek (42) można, po uporządkowaniu strony lewej według potęg liczby N, zastąpić przez β warunków:

$$\sum^{1\ldots\beta} b_\gamma \frac{P_\alpha^{(\alpha)}(k_\gamma)}{\alpha!} = \sum^{1\ldots\beta} b_\gamma = 0;\quad \sum^{1\ldots\beta} b_\gamma \frac{P_\alpha^{(\alpha-1)}(k_\gamma)}{(\alpha-1)!} = \sum^{1\ldots\beta} b_\gamma (k_\gamma + c_{11}) = 0 \tag{43}$$

$$c_{11} = \text{const.};\quad m$$

a więc kolejno:

$$\sum^{1\ldots\beta} b_\gamma = 0;\quad \sum^{1\ldots\beta} b_\gamma k_\gamma = 0\ldots;\quad \sum^{1\ldots\beta} b_\gamma k_\gamma^{\beta-2} = 0, \tag{44}$$

przez co twierdzenie staje się widocznem. Zresztą można tożsamość (42) przedstawić w sposób wyraźny. Jest:

$$\begin{vmatrix} 1 & k_1 \ldots & k_1^{\beta-2} & P_\alpha(N+k_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & k_\beta \ldots & k_\beta^{\beta-2} & P_\alpha(N+k_\beta) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & k_1 \ldots & k_1^{\beta-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & k_\beta \ldots & k_\beta^{\beta-1} \end{vmatrix} = \binom{\alpha}{\beta-1} P_{\alpha+\beta-1}(N). \tag{45}$$

Sprawdzenie uskuteczniamy przy pomocy tożsamości

$$P_\alpha(N+k) = P_\alpha(N) + \frac{P_\alpha'(N)}{1!} k + \frac{P_\alpha''(N)}{2!} k^2 + \ldots + \frac{P_\alpha^{(\alpha)}(N)}{\alpha!} k^\alpha. \tag{46}$$

Wartość sumy pierwszych $\beta - 1$ wyrazów tego rozwinięcia w dzielnej wyrażenia (45) znika tożsamościowo na mocy zależności liniowej pierwszych $\beta - 1$ kolumn, reszta daje nam wielomian stopnia $\alpha - \beta + 1$ z najwyższym spółczynnikiem A. Stąd mamy odrazu;

IIa Jeżeli $k_0, k_1, \ldots k_\alpha, k_{\alpha+1}$ są różne, to przy jednoznacznie oznaczonych spółczynnikach $b_\gamma \neq 0$ zachodzi tożsamość

$$P_\alpha(N + k_{\alpha+1}) = \sum^{0\ldots\alpha} b_\gamma P_\alpha(N + k_\gamma).$$

IIb. Dla $\beta < \alpha + 1$ tożsamość

$$P_\alpha(N + k_{\beta+1}) = \sum^{1\ldots\beta} b_\gamma P_\alpha(N + k_\gamma)$$

jest niemożliwa.

Twierdzenie pomocnicze III. Niechaj dla wszystkich dodatnich całkowito-liczbowych wartości M dane będzie wyrażenie n-wyrazowe

$$\xi_n^{(M)} = \sum_k^{1\ldots\lambda} \mathfrak{P}_k(N) z_k^N,\quad \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\lambda = n, \tag{47}$$

gdzie $\mathfrak{P}_k$ są wielomiany stopnia $\alpha_k - 1$ (porówn. 32). Wtedy przy jednoznacznie oznaczonych, od M niezależnych, spółczynnikach g_β, $g_{\beta_0} = 1$ zachodzi tożsamość ogólna:

$$\begin{gathered} \sum_\beta^{0\ldots\beta_0} g_\beta \xi^{(M+\beta)} = \xi_{n-\beta_0}^{(M)} = \sum_k^{1\ldots\lambda} \mathfrak{P}_k^*(N) z_k^N \\ \alpha_1^* + \alpha_2^* + \ldots + \alpha_\lambda^* = n - \beta_0, \end{gathered} \tag{48}$$

gdzie dla stopni α_{k-1}^* wielomianów $\mathfrak{P}_k^*$ zachodzi ogólnie związek:

$$\alpha_k^* \leqslant \alpha_k + 1. \tag{49}$$

Dowód. Uważamy wzór (48) jako mający się spełnić i starajmy się z niego wyznaczyć g_β. Jeżeli zamiast $\xi_n^{(M)}$ i $\xi_{n-\beta_0+1}^{(M)}$ podstawimy do równania (48) ich wartości na podstawie definicyj, to, przy uwzględnieniu rzędów wielkości, odpowiednie związki powinny pozostać bez zmiany, jeżeli tylko sumowania rozciągają się na wszystkie pierwiastki $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}, \ldots, z_{\lambda_1} = r_1 e^{i\varphi_{\lambda_1}}$ o równej najwyższej wartości bezwzględnej. Jest przeto:

$$\sum_{\beta=0\ldots\beta_0}^{k=1\ldots\lambda_1} g_\beta \mathfrak{P}_k(M+\beta) z_k^{M+\beta} = \sum^{N=1,\ldots\lambda_1} \mathfrak{P}_k^*(M) z_k^M, \tag{50}$$

i toż samo stosuje się do każdej innej grupy pierwiastków o wartościach bezwzględnych równych. Jeżeli podzielimy (50) przez r_1^N, uporządkujemy według potęg liczby N i podzielimy przez najwyższą potęgę N^α, to spełnią się założenia twierdzenia pomocniczego I (§ 3) i pełny spółczynnik przy N^α musi znikać w równaniu (50) pojedyńczo dla każdego z_k. Tożsamo stosuje się do spółczynników przy innych potęgach liczby N przy każdem oddzielnem z_k, tak że zbierając warunki, możemy napisać:

$$\mathfrak{P}(M) = \sum_{\beta}^{0\ldots\beta_0} g_\beta \mathfrak{P}_k (M+\beta)\, z_k^{M+\beta} = \mathfrak{P}_k^* (M)\, z_k^M ,$$
$$\mathfrak{P}_k(N) = P_{\alpha_k}(N). \tag{51}$$

Przez utworzenie różnic

$$\Delta^\nu \mathfrak{P} = \mathfrak{P}(M+\nu) - \binom{\nu}{1} \mathfrak{P}(M+\nu-1) + \binom{\nu}{2} \mathfrak{P}(M+\nu-2) + \ldots + (-1)^r \mathfrak{P}(M) \tag{52}$$

dla $\nu = \alpha_{k-1}, \quad \alpha_{k-1}, \ldots . \alpha_k^*$, otrzymujemy, po podzieleniu przez z_k^M:

$$\sum_{\beta}^{0\ldots\beta_0} g_\beta z_k^\beta = 0; \quad \sum_{\beta}^{0\ldots\beta_1} g_\beta P_1 (M+\beta)\, z_k^\beta = 0; \ldots \sum_{\beta}^{0\ldots\beta_0} g_\beta P_{\alpha_k - \alpha_k^* - 1}(M+\beta)\, z_k^\beta \tag{53}$$

gdzie P_α są wielomiany stopnia α. Widzimy zresztą według tej samej metody, że ostatnie z tych równań zawiera już wszystkie poprzedzające.

Przez uporządkowanie równań (53) według potęg liczby M, których spółczynniki znowu pojedyńczo znikać muszą, otrzymujemy po prostej redukcyi razem $\alpha_k - \alpha_k^*$ równań:

$$\sum_{\beta}^{0\ldots\beta_0} g_\beta z_k^\beta = 0; \quad \sum_{\beta}^{0\ldots\beta_0} g_\beta \beta z_k^{\beta-1} = 0; \quad \sum_{\beta}^{0\ldots\beta_0} g_\beta \beta(\beta-1) z_k^{\beta-2} = 0 \ldots \tag{54}$$

Jeżeli położymy

$$\sum_{\beta}^{0\ldots\beta_0} g_\beta x^\beta = F(x), \tag{55}$$

to równania (54) oznaczają, że:

$$F(z_k) = 0, \quad F'(z_k) = 0, \ldots \quad F^{(\alpha_k - \alpha_k^* - 1)}(z_k) = 0. \tag{56}$$

Jest przeto z_k przynajmniej $(\alpha_k - \alpha_k^*)$-krotnym pierwiastkiem równania $F(x) = 0$; $F(x)$ tedy musi być podzielne przez

$$F^*(x) = (x - z_1)^{\alpha_1 - \alpha_1^*} \ldots . (x - z_\lambda)^{\alpha_\lambda - \alpha_\lambda^*}, \quad (\alpha_1 - \alpha_1^* + \ldots + \alpha_\lambda - \alpha_\lambda^* = \beta_0), \tag{57}$$

a więc przy równości stopni być identyczne z tą funkcyą. Należy tedy za g_β wziąć spółczynniki rozwinięcia funkcyi $F^*(x)$ według rosnących potęg zmiennej x, a stąd znów wstecz spełniają się równania (48). Twierdzenie zatem zostało dowiedzione.

Dla zniżenia o β_0 wyrazów musi przeto jedno $\xi^{(M+\beta_0)}$ być liniowo skombinowane przynajmniej z β_0 poprzedzającemi takiemi wyrażeniami $\xi^{(M+\beta)}$, stąd dostrzegamy łatwo związki

$$B_k^{(\alpha_k^*)} \neq 0 \quad \text{dla} \quad \mathfrak{P}_k^*(M) = B_k^{\alpha_k^*} M^{\alpha_k^* - 1} + \ldots + B_k^{(0)}, \qquad \alpha_k^* \leqslant \alpha_k,$$

gdyż inaczej zachodziłoby obniżenie o stopień wyższy niż $\alpha_k - \alpha_k^*$; przeciwnie zaś dla $\alpha_k^* = \alpha_k + 1$ znika naturalnie w (48) część pochodząca od z_k tożsamościowo, jest przeto:

$$B_k^{(\alpha_k^*)} = \ldots = B_k^{(0)} = 0, \qquad \mathfrak{P}_k^*(M) = 0 \quad \text{dla} \quad \alpha_k^* > \alpha_\alpha.$$

IIIa. Zachodzi tożsamość

$$\sum_{\beta}^{0\ldots n} g_\beta \xi^{(M+\beta)} = 0,$$

gdy $g_\beta = a_\beta$ oznaczają spółczynniki rozwinięcia funkcyi

$$f(x) = (x - z_1)^{\alpha_1} \ldots . (x - z_\lambda)^{\alpha_\lambda} = \sum_{\nu}^{0\ldots n} a_\nu x^\nu$$

(jest to odwrócenie związków (4), (6)).

Dowód zawarty jest w dowodzie twierdzenia III, jak i dowód następującego twierdzenia.

IIIb. Tożsamość

$$\sum_{\beta}^{0\ldots n_0} g_\beta \xi^{(M+\beta)} = 0 \quad \text{dla} \quad n_0 < n, \quad g_{n_0} = 1$$

nie może zachodzić.

IIIc. Przy odpowiednio dobranych spółczynnikach $g_\beta^{(\nu)}$ dla $\nu > 0$ zachodzi tożsamość

$$\xi^{(M+n+\nu)} = \sum_{\beta}^{1\ldots n} g_\beta^{(k)} \xi^{(M+\beta)}. \tag{58}$$

Dochodzimy do niej przez ν-krotną iteracyę wzoru IIIa.

§ 5. Wyższe procesy graniczne.

Poprzedzające twierdzenia wiodą nas do rozważania wyznacznika

$$\Delta_\mu^{(N)} = \begin{vmatrix} \xi^{(N)} & \xi^{(N+1)} \ldots & \xi^{(N+\mu-1)} \\ \xi^{(N+1)} & \xi^{(N+2)} \ldots & \xi^{(N+\mu)} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi^{(N+\mu-1)} & \xi^{(N+\mu)} \ldots & \xi^{(N+2\mu-2)} \end{vmatrix} \tag{59}$$

Dla $\mu > n$ znikają wyznaczniki $\Delta_\mu^{(N)}$ na mocy twierdzenia IIIa tożsamościowo, ale nie znikają dla $\mu \leqslant n$ (według IIIb). Dla $\mu \leqslant n$ udowodnimy ogólny wzór Hadamarda

$$\limsup \left| \sqrt[N]{\Delta_\mu^{(N)}} \right| = |x_1| \cdot |x_2| \ldots |x_\mu| \,. \tag{60}$$

W tym celu pierwiastki x_ν, uporządkowane według malejących wartości bezwzględnych, rozdzielmy na trzy grupy. W pierwszej grupie $x_{\nu'}$, połączmy wszystkie pierwiastki wraz z $|x_{\nu'}| > |x_\lambda|$; ma ona zawierać wszystkie wartości aż do $z_{\lambda'}$ włącznie; ewentualnie ta grupa nie istnieje ($\lambda' = 0$), zresztą jest $\alpha_1 + \ldots + \alpha_{\lambda'} = \mu' < \mu$. W drugiej grupie niechaj będą zawarte wszystkie pierwiastki $x_{\nu''}$ wraz z $|x_{\nu''}| = |x_\mu|$ dla wartości $z_{\lambda'+1}, \ldots, z_{\lambda''}$, tak że będzie $\alpha_1 + \ldots + \alpha_{\lambda''} = \mu'' \geqslant \mu$. Trzecia grupa niechaj obejmie pozostałe pierwiastki $|x_{\nu'''}| < |x_\mu|$, o ile one istnieją.

Bezpośrednie rozwinięcie wyznacznika $\Delta_\mu^{(N)}$, po wstawieniu wartości na $\xi^{(N)}$ z wzoru (32) do (59), daje agregat czynników $z_{k_1}^N \ldots z_\mu^N$, przyczem jednak, według twierdzenia IIa, nie może występować czynnik z_k^N częściej niż wskazuje stopień α_k jego wielokrotności. Najwyższemi wyrazami dla N, przez które, podobnie jak we wzorze (40) w przypadku zasadniczym $\mu = 1$, można asymptotycznie zastąpić wyznaczniki $\Delta_\mu^{(N)}$, są to wyrazy, w których czynniki z_k^N pierwszej grupy (aż do $z_{\lambda'}^N$) występują po α_k razy, pozostałe zaś czynniki z_k^N są wszystkie wzięte z grupy drugiej ($z_{\lambda'+1}^N$ do $z_{\lambda''}^N$). Dla tych wyrazów jest atoli stale:

$$|z_{k_1}| \cdot |z_{k_2}| \ldots |z_{k_\mu}| = |x_1| \cdot |x_2| \ldots |x_\mu| \tag{61}$$

i wzór (60) można będzie uważać za stwierdzony, skoro upewnimy się co do nieznikania ogółu tych wyrazów.

Jeżeli w wyznaczniku $\Delta_\mu^{(N)}$ położymy ogólnie

$$\xi^{(M)} = \xi'^{(M)} + \xi''^{(M)} + \xi'''^{(M)};$$

$$\xi'^{(M)} = \sum^{1\ldots\lambda'} \mathfrak{P}_k(N)\, z_k^N; \quad \xi''^{(M)} = \sum^{\lambda'+1\ldots\lambda''} \mathfrak{P}_k(N)\, z_k^N; \quad \xi'''^{(M)} = \sum^{\lambda''+1\ldots\lambda} \mathfrak{P}_k(N)\, z_k^N, \tag{62}$$

to $\xi'''^{(M)}$ w niniejszem rozważaniu można wprost wypuścić. W każdej kolum-

nie $(\mu'+\delta)$-ej $\alpha_{\mu'+\delta}$ (gdzie $\delta > 0$; dla $\lambda' = 0$ także $\mu' = 0$, $\mu' = \alpha_1 + \ldots + \alpha_{\lambda'}$) można (według twierdzenia IIIc) usunąć części składowe $\xi'^{(M)}$, odnoszące się do wszystkich $x_{\nu'}$, przez dodanie agregatów liniowych $\sum^{1\ldots\mu'} g_\beta^{(\sigma)} \alpha_\beta$ pierwszych μ' kolumn. Najwyższe wyrazy wyznacznika $\Delta_\mu^{(N)}$ otrzymujemy, jeżeli jeszcze w pierwszych μ' kolumnach przekreślimy najniższe części składowe $\xi''^{(M)}$, Znikanie tożsamościowe powstałego w ten sposób wyznacznika wymagałoby istnienia ogólnej tożsamości

$$\sum_\mu^{1\ldots\mu'} g_\beta\, \xi'^{(M+\beta)} + \sum_\mu^{\mu'+1\ldots\mu''} g_\beta\, \xi''^{(M+\beta)} = 0, \tag{63}$$

przy nieznikaniu wszystkich g_β. Podobnie, jak w dowodzie twierdzenia IIIb. można okazać że po wstawieniu wyrażeń (62) musiałby zachodzić związek analogiczny dla części odnoszących się do każdego pojedyńczego z_k; byłoby zatem dla $\mu > 0$:

$$\sum_{k=1\ldots\lambda'}^{\beta=1\ldots\mu'} g_\beta\, \mathfrak{P}_k(M+\beta)\, z_k^{(M+\beta)} = 0, \tag{64}$$

co jest możliwe tylko dla $g_\beta = 0$ (IIIb), w każdym razie byłoby:

$$\sum_{k=\lambda'+1\ldots\lambda''}^{\beta=\mu'+1\ldots\mu''} g_\beta\, \mathfrak{P}_k(M+\beta)\, z^{(M+\beta)} = 0, \tag{65}$$

co jest możliwe tylko dla $g_\beta = 0$. A więc żądany związek liniowy (63) nie istnieje i tym sposobem ważny związek (60) został udowodniony.

W przypadku szczególnie wyróżnionym

$$|z_1| > |z_2| > \ldots > |z_\lambda| \tag{66}$$

ten dowód daje jeszcze więcej. Istnieje wtedy mianowicie w wyznacznikach $\Delta_\mu^{(N)}$ jedyny iloczyn najwyższy $z_1^{N\alpha_1} \ldots z^{N\alpha_{\lambda'}} z_{\lambda'+1}^{N(\mu-\mu')}$, występujący jako czynnik wielomianu $\mathfrak{P}(N) \neq 0$, i otrzymujemy w tym przypadku związek udowodniony przez Fr. Cohna:[1)]

$$\lim_{N=\infty} \Delta_\mu^{(\mu N+1)} : \Delta_\mu^{(N)} = x_1 \,.\, x_2 \ldots x_\mu \,. \tag{67}$$

[1)] Dla prawdziwości tego związku przy stałem μ jest konieczne i dostateczne, aby gdy $x_\mu = z_{\lambda_0}$ było: albo a) $|z_{\lambda_0}| > |z_{\lambda_0+1}|$, albo b) $|z_{\lambda_0}| = |z_{\lambda_0+1}|$, $a_{\lambda_0} > a_{\lambda_0+1}$; zamiast lim sup, można w tych przypadkach we wzorze (60) pisać wprost lim.

§ 6. Przesunięcie pierwiastków.

Wynik główny (60) daje nam kolejno wartości bezwzględne wszystkich pierwiastków, uporządkowanych według malejących lub nie rosnących wielkości. W ten sposób w płaszczyźnie zespolonej x otrzymujemy pewną liczbę różnych kół o środku 0 z następującemi malejącemi promieniami:

$$r_1, \quad r_2 \ldots \quad r_{n_0}; \qquad r_1 > r_2 > \ldots > r_{n_0}, \tag{68}$$

tak że na każdem z tych kół znajduje się wiadoma liczba rozdzielonych od siebie lub dowolnie połączonych pierwiastków danego równania. Umawiamy się znów, jak poprzednio (33a), że pierwiastki są uporządkowane według malejących lub nie rosnących wartości bezwzględnych, ale, w przeciwieństwie do przyjęcia w (33b), niechaj przy równych wartościach bezwzględnych poprzedza ten pierwiastek, którego rzeczywista część składowa jest algebraicznie większa, którego obraz tedy na odpowiedniem kole leży więcej na prawo. Tylko przy pierwiastkach zespolonych sprzężonych to uporządkowanie usług swych odmawia, w tym tedy przypadku niechaj poprzedza pierwiastek górny, t. j. ten, którego część składowa urojona jest dodatnia. Związki (60) utrzymują się oczywiście bez zmiany.

Niechaj $2\varepsilon_0$ będzie odległość najmniejsza pomiędzy znalezionemi kołami:

$$\varepsilon_0 = \min \frac{r_{m+1} - r_m}{2}; \qquad m = 1, 2 \ldots n_0 - 1. \tag{69}$$

Jeżeli wprowadzimy podstawienie

$$x^* = x + \varepsilon, \qquad 0 < \varepsilon < \varepsilon_0 \tag{70}$$

ze stałem ε, to przy pomocy bardzo prostych rozważań geometrycznych okazuje się, że ustanowiona według powyższej zasady kolejność pierwiastków x_ν^* nie dozna zmiany, tak że dla wszystkich ν będzie:

$$x_\nu^* = x_\nu + \varepsilon; \tag{71}$$

pierwiastki nierówne mieć będą nierówne wartości bezwzględne z wyjątkiem par pierwiastków zespolonych sprzężonych, które pozostaną zespolonemi sprzężonemi.

Zamiast wielkości ξ^N i $\Delta_\mu^{(N)}$ porówn. (6) i (59) — rozważmy wielkości analogiczne

$$\xi_*^N = \sum_{k=1\ldots\lambda}^{\mu_k = 1\ldots\alpha_k} A_k^{(\mu_k)} \binom{N}{\mu_k - 1} (z_k + \varepsilon)^{N-\mu_k+1}$$

$$= \xi^{(N)} + (N_1)\,\varepsilon\,\xi^{(N-1)} + (N_2)\,\varepsilon^2\xi^{(N-2)} + \ldots + \varepsilon^N\xi^{(0)}; \tag{71}$$

$$\Delta_{*\mu}^{(N)} = \begin{vmatrix} \xi_*^{(N)} \ldots\ldots & \xi_*^{(N+\mu-1)} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \xi_*^{(N+\mu-1)} \ldots & \xi_*^{(N+2\mu-2)} \end{vmatrix};$$

wtedy otrzymamy w tenże sam sposób, jak wyżej:

$$\limsup \left|\sqrt[N]{\xi_*^{(N)}}\right| = |x_1 + \varepsilon|,$$

$$\limsup \left|\sqrt[N]{\Delta_{*\mu}^{(N)}}\right| = |x_1 + \varepsilon| \ldots |x_\mu + \varepsilon|. \tag{72}$$

Otóż, jeżeli

$$x_\nu = \rho_\nu e^{i\varphi_\nu} = p_\nu + i q_\nu, \qquad -\pi < \varphi_\nu \leqslant \pi, \tag{73}$$

będzie:

$$|x_\nu|^2 = \rho_\nu^2, \qquad |x_\nu + \varepsilon|^2 = \rho_\nu^2 + 2\rho_\nu \cos\varphi_\nu\,\varepsilon + \varepsilon^2, \tag{74}$$

a więc:

$$p_\nu = r_\nu \cos\varphi_\nu = \frac{|x_\nu + \varepsilon|^2 - |x_\nu|^2}{2\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{2}, \tag{75}$$

tak że przez uskutecznione przesunięcie rzeczywiste (70), po nowym procesie nieskończonym (72), wszystkie rzeczywiste części składowe pierwiastków z ich wartościami bezwzględnemi są wiadome i pozostaje tylko rozstrzygnięcie co do znaku wielkości p_ν, φ_ν.

Ogół wartości $\rho_\nu e^{i|\varphi_\nu|}$ jest tedy znany; na każdem kole (r_k); umieśćmy różne od siebie dodatnie argumenty $|\varphi_\nu|$:

$$\varphi_k^{(1)}, \ldots, \varphi_k^{(\nu_k)}; \qquad 0 < \varphi_k^{(\nu)} \leqslant \pi, \qquad \varphi_k^{(1)} < \ldots < \varphi_k^{(\nu_k)} \tag{76}$$

według rosnących wielkości i niechaj będzie dla wszystkich k:

$$\min \frac{\varphi_k^{(\nu+1)} - \varphi_k^{(\nu)}}{2} = \omega_0. \tag{77}$$

Jeżeli teraz, utrzymując poprzednie znaczenie wielkości ε — porówn. (70) — położymy

$$x^{**} = x + \varepsilon e^{i\omega}, \qquad \omega < \omega < \omega_0, \tag{78}$$

to przy pomocy takich, jak wyżej, rozważań geometrycznych przekonamy się, że pierwiastki x_ν^{**}, uporządkowane według wskazanej tu zasady, zachowują tę samą kolej, co pierwiastki x_ν, x_ν^*, tak że:

$$x_\nu^{**} = x_\nu + \varepsilon e^{i\omega}, \tag{79}$$

lecz że poza tem teraz różne pierwiastki z_k^{**} otrzymują bez wyjątku różne wartości bezwzględne. Dość więc utworzyć wyrażenia

$$\xi_{**}^{(N)} = \sum_{k=1\ldots\lambda}^{\mu_k=1\ldots\alpha_k} A_k^{(\mu_k)} \binom{N}{\mu_k - 1} (z_k + \varepsilon e^{i\omega})^N$$

$$= \xi^{(N)} + \binom{N}{1} \varepsilon\, \xi^{(N+1)} + \ldots + \varepsilon^{(N)} \xi^{(0)}, \tag{80}$$

$$\Delta_{**p}^{(N)} = \begin{vmatrix} \xi_{**}^{(N)} \ldots\ldots \xi_{**}^{(N+\mu-1)} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \xi_{**}^{(N+\mu-1)} \ldots \xi_{**}^{(N+2\mu-2)} \end{vmatrix}$$

i będzie:

$$\lim_{N=\infty} \left| \sqrt[N]{\xi_{**}^{(N)}} \right| = |x_1 + \varepsilon e^{i\omega}|; \quad \lim_{N=\infty} \left| \sqrt[N]{\Delta_{**\mu}^{(N)}} \right| = |x_1 + \varepsilon e^{i\omega}| \ldots |x_\mu + \varepsilon e^{i\omega}| \tag{81}$$

$$|x_\nu + \varepsilon e^{i\omega}|^2 = \rho_\nu^2 + 2\rho_\nu \cos(\varphi_\nu - \omega) + \varepsilon^2,$$

$$|x_\nu + \varepsilon e^{i\omega}|^2 - |x_\nu + \varepsilon|^2 = 2 q_\nu \sin\omega - 2 p_\nu (1 - \cos\omega),$$

a stąd znajdziemy q_ν. Dalej, ponieważ spełniają się założenia (porówn. (66)), jest bezpośrednio:

$$\lim_{N=\infty} \xi_{**}^{(N+1)} : \xi_{**}^{(N)} = x_1; \quad \lim_{N=\infty} \Delta_\mu^{(N+1)} : \Delta_\mu^{(N)} = x_1 \ldots x_\mu; \tag{82}$$

tym sposobem zostały znalezione wszystkie pierwiastki zapomocą zbieżnych procesów granicznych.

Zresztą, przez związki (70), (78), przy pomocy podstawienia postaci $x' = x + \tau$, zadanie przeprowadzenia wszystkich pierwiastków nierównych na pierwiastki o nierównych wartościach bezwzględnych jest rozwiązane wyraźnie (porów. § 3).

§ 7. Rozwiązanie uproszczone.

Ostateczne wyznaczenie pierwiastków uskuteczniono (§ 6) za pomocą podstawienia $x^{**} = x + \varepsilon e^{i\omega}$, ze stałemi, dostatecznie małemi, dodatniemi wielkościami ε, ω.

Twierdzimy, że przy pomocy odpowiednio dobranego a priori i dającego się podać nieskończenie wieloma sposobami ciągu nieskończonego $\tau_N = \varepsilon_N e^{i\omega_N}$, mianowicie przy warunkach:

$$\varepsilon_N > 0, \quad \omega_N > 0, \quad \lim_{N=\infty} \varepsilon_N = 0, \quad \lim_{N=\infty} \omega_N = 0, \quad \lim_{N=\infty} N\varepsilon_N\omega_N = \infty,$$
$$\lim_{N=\infty} N(\varepsilon_{N+1} - \varepsilon_N) = 0; \quad \lim_{N=\infty} N\varepsilon_N(\omega_{N+1} - \omega_N) = 0 \text{ [1]} \tag{83}$$

obliczalne wyraźnie wielkości

$$\xi^{(M)}(\tau_N) = \sum_{k=1\ldots\lambda}^{\mu_k=1\ldots\alpha_k} A_k^{(\alpha_k)} \binom{M}{\mu_k - 1} (z_k + \tau_N)^M$$
$$= \xi^{(M)} + \binom{M}{1} \tau_N \xi^{(M-1)} + \binom{M}{2} \cdot \tau_N^2 \xi^{(M-2)} + \ldots + \tau_N^M \xi^{(0)}; \tag{84}$$
$$\xi(\tau_N) = \xi^{(N)}(\tau_N);$$

$$\Delta_\mu(\tau_N) = \begin{vmatrix} \xi^{(N)}(\tau_N) \ldots\ldots\ldots \xi^{(N+\mu-1)}(\tau_N) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \xi^{(N+\mu-1)}(\tau_N) \ldots \xi^{(N+2\mu-2)}(\tau_N) \end{vmatrix}$$

są tej natury, że otrzymujemy następujące proste związki graniczne, ważne przy wszystkich okolicznościach:

$$\lim_{N=\infty} \xi(\tau_{N+1}) : \xi(\tau_N) = x_1,$$
$$\lim_{N=\infty} \Delta_\mu(\tau_{N+1}) : \Delta_\mu(\tau_N) = x_1 x_2 \ldots x_\mu. \tag{85}$$

Dowód. Mamy według definicyi:

$$\xi(\tau_N) = \sum_{k=1\ldots\lambda}^{\mu_k=1\ldots\alpha_k} A_k^{(\mu_k)} \binom{N}{\mu_k - 1} (z_k + \varepsilon_N e^{i\omega_N})^{N+\mu_k-1}; \tag{86}$$

okażemy najprzód, że można $\xi(\tau_N)$ zastąpić asymptotycznie przez jeden jedyny wyraz najwyższy, mianowicie $A_1^{(\alpha_1)} \binom{N}{\alpha_1 - 1} (z_1 + \varepsilon_N e^{i\omega_N})^{N+\mu_k-1}$.

[1]) Bierzemy np. $\tau_N = N^{-\frac{1}{4}} + i N^{-\frac{1}{2}}$.

W tym celu dość udowodnić związek graniczny:

$$\lim_{N=\infty} A_1^{\alpha_1}\binom{N}{\alpha_1-1}(z_1+\varepsilon_N e^{i\omega_N})^{N-\alpha_1+1} : A^{(\mu_k)}\binom{N}{\mu_k-1}(z_k+\varepsilon_N e^{i\omega_N})^{N-p_k+1}=\infty \tag{87}$$

dla jednego nie znikającego jakiegokolwiek wyrazu wyrażenia $\xi(\tau_N)$, t. j. dla $A_k^{(\mu_k)} \neq 0$.

Dla $|z_1 > |z_k|$ jest to widoczne; podobnież dla $|z_k| = |z_1|$, $\mu_k < \alpha_1$. Rozpatrzmy przypadek $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $r_k = r_1 e^{i\varphi_k}$, $\mu_k = \alpha_1$; według zasady pomyślanego podziału jest $\cos\varphi_1 \geqslant \cos\varphi_k$ i znak równości jest ważny tylko dla wartości sprzężonych zespolonych. Pomyślmy najprzód $\cos\varphi_1 > \cos\varphi_k$, mamy wtedy:

$$\begin{gathered} |z_k+\varepsilon_N e^{i\omega_N}|^2 = r_1^2+2r_1\cos(\varphi_k-\omega_N)\varepsilon_N+\varepsilon_N^2, \\ \left|\frac{z_1+\varepsilon_N e^{i\omega_N}}{z_k+\varepsilon_N e^{i\omega_N}}\right|^2 = 1+\frac{2r_1[\cos(\varphi_1-\omega_N)-\cos(\varphi_k-\omega_N)]\varepsilon_N}{r_1^2+2r_1\varepsilon_N\cos(\varphi_k-\omega_N)+\varepsilon_N^2} = 1+\frac{2E_N}{N} \end{gathered} \tag{88}$$

i dla wysokich wartości liczby N jest na mocy założeń — porówn. (83)

$$\lim_{N=\infty}\varepsilon_N = \lim_{N=\infty}\omega_N = 0, \quad \lim_{N=\infty} N\varepsilon_N = \infty, \quad \cos\varphi_1 - \cos\varphi_k > 0, \tag{88a}$$

jest

$$\lim_{N=\infty} E_N = +\infty, \quad \lim_{N=\infty}\left|\frac{z_1+\varepsilon_N e^{i\omega_N}}{z_k+\varepsilon_N e^{i\omega_N}}\right|^N = \lim_{N=\infty}\left(1+2\frac{E_N}{N}\right)^N \sim E^N = +\infty, \tag{88b}$$

przez co wzór (87) jest udowodniony i dla tego przypadku. Pozostaje jeszcze możliwość $z_k = r_1 \varepsilon^{-i\varphi_1}$, $k=2$, $\varphi_1 > 0$; mamy wtedy:

$$\left|\frac{z_1+\varepsilon_N e^{i\omega_N}}{z_k+\varepsilon_N e^{i\omega_N}}\right|^2 = 1+\frac{4r_1\sin\varphi_1\sin\omega_N\,\varepsilon_N}{r_1^2+2r_1\cos(\varphi_1+\omega_N)+\varepsilon_N^2} = 1+2\frac{E_N}{N}, \tag{89}$$

i na zasadzie związków

$$\lim_{N=\infty} N\varepsilon_N\sin\omega_N \sim \lim_{N=\infty} N\varepsilon_N\omega_N = +\infty; \quad \lim_{N=\infty}\varepsilon_N = \lim_{N=\infty}\omega_N = 0 \tag{89a}$$

jest podobnie, jak poprzednio:

$$\lim_{N=\infty} E_N = +\infty, \quad \lim_{N=\infty}\left|\frac{z_1+\varepsilon_N e^{i\omega_N}}{z_k+\varepsilon_N e^{i\omega_N}}\right|^N = \lim_{N=\infty}\left(1+\frac{2E}{N}\right)^{\frac{N}{2}} \sim e^N = +\infty, \tag{89b}$$

a więc wzór (87) jest prawdziwy. Jest tedy we wszystkich przypadkach:

$$\begin{aligned} &\lim_{N=\infty}\xi(\tau_{N+1}):\xi(\tau_N) \\ &= \lim_{N=\infty} A_1^{(\alpha_1)}\binom{N+1}{\alpha_1-1}(z_1+\varepsilon_{N+1}e^{i\omega_{N+1}})^{N+1} : A_1^{\alpha_1}\binom{N}{\alpha_1-1}(z_1+\varepsilon_N e^{i\omega_N})^N \\ &= \lim_{N=\infty}(z_1+\varepsilon_{N+1}e^{i\omega_{N+1}})\cdot\left[1+\frac{\varepsilon_{N+1}e^{i\omega_{N+1}}-\varepsilon_N e^{i\omega_N}}{z_1+\varepsilon_N e^{i\omega_N}}\right]^N, \end{aligned} \tag{90}$$

a wobec związków wynikających z (83):

$$\begin{gathered} \lim_{N=\infty} N\left|\varepsilon_{N+1}e^{i\omega_{N+1}}-\varepsilon_N e^{i\omega_N}\right| = 0\,^{1)}, \\ \lim_{N=\infty}\left|N\frac{\varepsilon_{N+1}e^{i\omega_{N+1}}-\varepsilon_N e^{i\omega_N}}{z_1+\varepsilon_N e^{i\omega_N}}\right| = |\delta^{(N)}| = 0, \end{gathered} \tag{90a}$$

jest istotnie:

$$\lim_{N=\infty}\xi(\tau_{N+1}):\xi(\tau_N) = z_1\lim_{N=\infty}\left(1+\frac{\delta^{(N)}}{N}\right)^N \sim z_1 e^{\delta^{(N)}} = z_1, \tag{90b}$$

c. b. d. o.

Aby otrzymać wzór (87b) dla stałego μ, zauważmy, że wyznacznik $\Delta_\mu(\tau_N)$ według wywodów poprzednich (§ 5, rozważania końcowe) można dla $x_\mu = z_{\lambda'+1}$, $\alpha_1+\alpha_2\ldots\alpha_{\lambda'} < \mu \leqslant \alpha_1+\ldots+\alpha_{\lambda'+1}$ przedstawić asymptotycznie w sposób wyraźny przez

$$\Delta_\mu(\tau_\mu) = \mathfrak{P}(N)(z_1+\tau_N)^{\alpha_1 N}\ldots(z_{\lambda'}+\tau_N)^{\alpha_{\lambda'}N}(z_{\lambda'+1}+\tau_N)^{\mu N-(\alpha_1+\ldots+\alpha_{\lambda'})N}, \tag{91}$$

gdzie $\mathfrak{P}(N)$ oznacza wielomian stały nie znikający argumentu N. Jest przeto ostatecznie na mocy wzoru (90a) ważnego dla każdego z_k:

$$\begin{aligned} &\lim_{N=\infty}\Delta_\mu(\tau_{N+1}):\Delta_\mu(\tau_N) \\ &= \lim_{N=\infty}\frac{\mathfrak{P}(N+1)}{\mathfrak{P}(N)}(z_1+\tau_N)^{\alpha_1}\ldots(z_{\lambda'}+\tau_N)^{\alpha_{\lambda_1}}(z_{\lambda'+1}+\tau_N)^{\mu-(\alpha_1+\ldots+\alpha_{\lambda'})} \\ &\cdot\left(1+\frac{\tau_{N+1}-\tau_N}{z_1+\tau_N}\right)^{\alpha_1 N}\ldots\left(1+\frac{\tau_{N+1}-\tau_N}{z_{\lambda_1}+\tau_N}\right)^{\alpha_{\lambda'}N}\left(1+\frac{\tau_{N+1}-\tau_N}{z_{\lambda'+1}+\tau_N}\right)^{\mu N-(\alpha_1+\ldots+\alpha_{\lambda'})N} \\ &= z_1^{\alpha_1}\ldots z_{\lambda'}^{\alpha_{\lambda'}} z_{\lambda'+1}^{\mu-(\alpha_1+\ldots+\alpha_{\lambda'})} = x_1 x_2\ldots x_\mu. \qquad \text{c. b. d. o.} \end{aligned} \tag{92}$$

---

1) Jest $N(\tau_{N+1}-\tau_N) = N[\varepsilon_{N+1}-\varepsilon_N)e^{i\omega_{N+1}}+\varepsilon_N(e^{i\omega_{N+1}}-e^{i\omega_N})$,
$N(\tau_{N+1}-\tau_N \leqslant N(\varepsilon_{N+1}-\varepsilon_N)+N\varepsilon_N(\omega_{N+1}\ \ \omega_N)$.

Pozyskane związki (90b), (92) są analogiczne do związków (34), (67), tylko z ograniczeniem ważnych i a priori nie stosowalnych, lecz są największej i najszerszej ogólności, dzięki której mogą być stosowane do każdego dowolnego równania algebraicznego.

§ 8. Dowolne układy podstawowe.

Wybór układu podstawowego (2) był związany (§ 2, zakończenie) z pewnem ograniczeniem, które zapewniało niezależność liniową n kolejnym wielkościom $\xi^{(N)}$ (§ 4, IIIb). Tę niezależność można stwierdzić na samym ciągu tych wielkości $\xi^{(N)}$, przyczem dla wysokich wartości N znikają wszystkie wyrażenia $\Delta^{(N)}$. Okażemy, że dla takiego znikania jest konieczne i dostateczne, aby było $\Delta_n^{(0)} = 0$. Gdy bowiem dla pewnego stałego N jest $\Delta_n^{(0)} = 0$, to oznacza to, że zachodzi układ

$$\sum_{r}^{0 \dots n-1} a_\nu^* \, \xi^{(M+\nu)} = 0; \quad M = N_0, \quad N_0 + 1 \dots \quad N_0 + n - 1 \tag{93}$$

o spółczynnikach, nie wszystkich równych zeru, stąd już równania określające (4) dają takiż układ dla $N_1 - 1$, $N_1 - 2, \dots, 0$, i odwrotnie. Zupełnie w ten sam sposób można udowodnić następujące twierdzenie dokładniejsze:

Niechaj przy dowolnym wyborze układu podstawowego $\xi^{(0)}, \dots, \xi^{(n-1)}$ będzie $\mu_0 \leqslant n$ największy skaźnik, dla którego przy wysokich wartościach liczby N nie znikają wielkości $\Delta_{\mu_0}^{(N)}$; aby to zachodziło, jest konieczne i dostateczne, by było:

$$\Delta_{\mu_0+1}^{(0)} = \Delta_{\mu_0+1}^{(1)} = \dots \ \Delta_{\mu_0+1}^{(n-\mu_0-1)} \tag{94}$$

lub — co na jedno wychodzi — aby było:

$$\sum_{\nu}^{0 \dots \mu_0} a_\nu^* \, \xi^{(M+\nu)} = 0 \quad \text{dla} \quad M = 0, \ 1 \dots \ n - 1. \tag{94a}$$

W twierdzeniu (6) o rozwinięciu odpadają wtedy odpowiednie wyższe spółczynniki, a wyrażenia resztowe

$$\overline{\xi^{(N)_0}} = \sum_{\nu}^{1 \dots \lambda} \mathfrak{P}_k^* \, (N) \, z_k^{(N)} \text{ [1]} \tag{95}$$

[1] Pojedyncze wielomiany $\mathfrak{P}_k^* \, (N)$ mogą znikać tożsamościowo.

są zbudowane zupełnie analogicznie i podlegają tym samym prawom dla odpowiednio niższego stopnia $\alpha_1^* + \dots + \alpha_\lambda^* = n^*$ i t. d. Otrzymujemy tedy dla $\mu = 1 \dots \mu_0$ tę część pierwiastków x_ν w tenże sposób i w odpowiedniej kolei, jak poprzednio (§§ 3, 4, 5) przy wszystkich pierwiastkach. Odpadają zatem pierwiastki wspólne wielomianów $h(x)$ i $f(x)$ (porów. § (30)), spółczynniki zaś a_ν^* znajdujemy z rozwinięcia

$$f^*(x) = (x - z_1)^{\alpha_1^*} \dots (x - z_\lambda)^{\alpha_\lambda^*} = \sum_{\nu}^{0 \dots n} a_\nu^* \, x^\nu \tag{96}$$

(§ 4, IIIa).

§ 9. Uogólnienie.

Podana wyżej droga wyznaczenia wszystkich pierwiastków (§§ 5—7) polegała: a) na nieznikaniu wielkości $\Delta_n^{(0)}$ — porówn. § 8 — a następnie wszystkich wielkości $\Delta_\mu^{(N)}$ dla dostatecznie wysokich liczb N: dla $\mu = 1, 2 \dots n$; b) na istotnem zachodzeniu wyższych czynników $z_{k_1}^N \dots z_{k_\mu}^N$ w wyrazach rozwinięcia wyrażenia $\Delta_\mu^{(N)}$, przyczem żaden z czynników z_k nie powinien był zachodzić częściej, niż wskazuje stopień jego wielokrotności α_k. Też same własności dają się ustanowić dla ogólniejszych wyznaczników $D_\mu^{(N)}$, które przejmują wtedy podobną rolę przy wyznaczaniu pierwiastków.

Zamiast układu $\xi^{(M)} = \xi_1^{(M)}$, z któregośmy wyszli, rozpatrzmy n takich układów $\xi_1^{(M)}, \dots, \xi_N^{(M)}$, które mają czynić zadość łatwo spełnić się dającemu warunkowi (patrz niżej) niezależności, tak że wyznaczniki

$$D_\mu^{(N)} = \begin{vmatrix} \xi_1^{(N)}, & \xi_1^{(N+1)} \dots, & \xi_1^{(N+\mu-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_n^{(N)}, & \xi_n^{(N+1)} \dots & \xi_n^{(N+\mu-1)} \end{vmatrix} \tag{97}$$

nie znikają tożsamościowo; wszystkie poprzednie rozważania pozostają bez zmiany. Wyznaczniki specyalniejsze $\Delta_\mu^{(N)}$ otrzymujemy wprost, kładąc $\xi_\nu^{(M)} = \xi^{(M+\nu-1)}$. Jeżeli układy początkowe $\xi_1^{(M)}, \dots, \xi_n^{(M)}$ nie są liniowo niezależne, to można przeprowadzić też same wyniki co poprzednio (§ 9) dla największego skaźnika μ_0, dla którego nie znika jeszcze $D_\mu^{(N)}$, przyczem jest koniecznie $\mu_0 \leqslant n$ i muszą spełniać się warunki:

$$D_{\mu_0}^{(0)} = 0, \ D_{\mu_0}^{(1)} = 0, \ \dots, \ D_{\mu_0}^{(n-\mu_0-1)} = 0, \tag{98}$$

tak że zbadanie danego układu wskazuje wprost liczbę μ_0 pierwiastków, które mogą być znalezione przez zastosowanie tego układu. Można też, jak we wzorze (93), podać wprost równanie, należące do tych pierwiastków.

Można postawić pytanie, dotyczące takiego szczególnie prostego układu początkowego $\xi_1^{(M)}, \ldots, \xi_N^{(M)} \ldots, \xi_n^{(M)}$, z którego powstałyby inne przy pomocy przekształcenia liniowego. Taki np. układ dany jest przez przyjęcie: $c_{\nu+1} = 1$, $c_0 = c_1 = \ldots = c_\nu = c_{\nu+2} = c_{n-1} = 0$ we wzorze (8); można też przyjąć $c_0 = 1$, $c_1 = \ldots = c_{n-1} = 0$ przy $\xi_1^M = \xi^{(M)}$ i $\xi_\nu^{(M)} = \xi^{(M+\nu-1)}$. Ten przypadek odpowiada rozwinięciu funkcyi $\frac{1}{f(x)}$ na szereg potęgowy $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$.

Inny szczególnie prosty, ale dający wszystkie wielokrotne pierwiastki tylko raz jeden, jest wspomniany wyżej przypadek Bernoulli'ego-Eulera $\xi_1^{(M)} = \xi^{(M)} = \sum^{1 \ldots n} x_1^M$, $\xi_\nu^M = \xi^{(M+N-1)}$; odpowiada on rozwinięciu funkcyi $\frac{f'(x)}{f(x)}$ na szereg $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$.

§ 10. Otrzymywanie pierwiastków rosnących.

Wszystkie otrzymane wyniki (§§ 1–9) dają się w sposób nadzwyczaj prosty tak przedstawić, aby stosowały się do pierwiastków uporządkowanych według ich rosnących wartości bezwzględnych.

Dość w tym celu położyć $x = \frac{1}{\bar{x}}$, przyczem dla zastosowania pozyskanych wzorów trzeba będzie, by z pomiędzy pierwiastków zespolonych x_ν poprzedzały niższe.

Wtedy z równaniem

$$\bar{f}(\bar{x}) = a_0 \bar{x}^n + a_1 \bar{x}^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \bar{x} + a_\nu = 0$$

należy postępować w sposób opisany, i wtedy zamiast równań określających (4), (7) wziąć następujące:

$$\begin{gathered} a_0 \bar{\xi}^N + a_1 \bar{\xi}^{(N-1)} + \ldots + a_{n-1} \bar{\xi}^{(N-n+1)} + a_n \bar{\xi}^{(N-n)}, \quad N \geqslant n; \\ a_0 \bar{\xi}^{(\nu)} + a_1 \bar{\xi}^{(\nu-1)} + \ldots + a_\nu \bar{\xi}^{(0)} = a_0 \bar{c}_\nu, \quad (\nu < n); \quad \sum_\nu^{0 \ldots u-1} \bar{c}_\nu \bar{x}^\nu = \bar{h}(\bar{x}), \end{gathered} \tag{100}$$

obliczyć spółczynniki $\bar{\xi}^{(M)}$ rozwinięcia funkcyi $\frac{\bar{h}(\bar{x})}{\bar{f}(\bar{x})}$ na szereg $\mathfrak{P}(\bar{x})$ i utworzyć odpowiednie wyznaczniki $\bar{\Delta}_\mu^{(N)}$, $\bar{\Delta}_\mu(\tau_N)$, Otóż mamy:

$$\begin{gathered} \limsup \left| \sqrt[N]{\bar{\xi}^{(N)}} \right| = |\bar{x}_1|; \qquad \limsup \left| \sqrt[N]{\bar{\Delta}_\mu^{(N)}} \right| = |\bar{x}_1| \ldots |\bar{x}_\mu|; \\ \lim_{N=\infty} \bar{\xi}(\tau_{N+1}) : \bar{\xi}(\tau_N) = x_1; \qquad \lim_{N=\infty} \bar{\Delta}^{(N+1)}(\tau_{N+1}) : \bar{\Delta}^{(N)}(\tau_N) = \bar{x}_1 \ldots \bar{x}_\mu. \end{gathered} \tag{101}$$

a zatem według definicyi wielkości $\bar{x}$:

$$\lim \bar{\Delta}_\mu(\tau_N) : \bar{\Delta}_\mu(\tau_{N+1}) = x_1 \ldots x_\mu. \tag{102}$$

W tej nowej kolei, w której poprzedzają pierwiastki o mniejszej wartości bezwzględnej, należy przy równych wartościach bezwzględnych brać najprzód położone więcej na prawo, przy pierwiastkach zaś zespolonych sprzężonych— położone niżej. Zamiast wyznaczników $\bar{\Delta}_\mu^{(N)}$ można brać odpowiednie wyznaczniki $D_\mu^{(N)}$ (§§ 8–9). Wyniki te dają się wprost przenieść do dziedziny przestępnej.