le theorème precedent subsiste, si on y remplace l'hypothèse de l'integrabilité des fonctions $G(x)$ et $D(x)$ par la suivante: on a partout, sauf peut-être aux points d'un ensemble dénombrable: $D(x) \geqq 0$.

A côté de ces resultats nouveaux j'expose d'une manière systematique quelques theorèmes de de la Vallée Poussin et de M. Steinhaus, sur lesquels est basée une partie de nos raisonnements.

W. SIERPIŃSKI.

O pewnem uogólnieniu zbiorów Borela.

(Sur une généralisation des ensembles mesurables B).

Zbiory liniowe Borela stanowią, jak wiadomo, najmniejszą klasę K zbiorów, spełniającą następujące trzy warunki: [1]

1) Każdy przedział należy do klasy K.

2) Jeżeli $M_1, M_2, M_3, \ldots$ jest ciągiem skończonym albo przeliczalnym mnogości, z których każda należy do klasy K, to suma $M_1 + M_2 + M_3 + \ldots$ tych mnogości tworzy mnogość również należącą do klasy K.

3) Jeżeli $M_1, M_2, M_3, \ldots$ jest ciągiem skończonym albo przeliczalnym mnogości, z których każda należy do klasy K, to iloczyn ich $M_1 M_2 M_3 \ldots$ (o ile istnieje) jest również mnogością, należącą do klasy K [2].

(Innemi słowy, klasa K_0 wszystkich mnogości liniowych Borela jest częścią wspólną wszystkich klas K, spełniających powyższe trzy warunki).

Pp. Suslin i Łuzin dowiedli niedawno [3] istnienia funkcyi $f(x)$, określonej w zbiorze X wszystkich liczb niewymiernych przedziału $(0, 1)$ i ciągłej w tym zbiorze, dla której zbiór wszystkich wartości $f(x)$ (gdy x należy do X) nie jest zbiorem Borela. Wynika stąd, że istnieje obraz jednoznaczny i ciągły mnogości Borela (np. mnogości wszystkich liczb niewy-

[1]) Por moją notę: „Sur les définitions axiomatiques des ensembles mesurables B" Biuletyn Akademii Krakowskiej, Marzec 1918.

[2]) W warunku 2) możnaby nadto zakładać, że mnogości $M_1, M_2, M_3, \ldots$ nie posiadają elementów wspólnych, zaś w warunku 3) — że M_{k+1} jest częścią mnogości M_k (dla $k = 1, 2, 3, \ldots$).

[3]) Comptes Rendus, note du 8 janvier 1917.

miernych przedziału 0—1), który sam nie jest mnogością Borela.[1] Klasa wszystkich mnogości Borela nie spełnia więc następującego warunku:

4) Mnogość (liniowa), będąca jednoznacznym i ciągłym obrazem mnogości należącej do klasy K, jest zawsze mnogością należącą do klasy K.

Naturalnem uogólnieniem mnogości Borela będzie najmniejsza klasa K mnogości, spełniająca wszystkie cztery warunki 1), 2), 3) i 4): udowodnimy, że klasa taka istnieje. Zauważymy w tym celu przedewszystkiem, że: 1^0 istnieją klasy K, spełniające wszystkie cztery warunki 1) — 4), np. klasa wszystkich mnogości liniowych; 2^0 istnieją mnogości M, należące do każdej klasy K, spełniającej warunki 1) — 4), np., w myśl warunku 1), mnogość punktów każdego przedziału. Oznaczmy przez K_1 zbiór tych wszystkich mnogości liniowych, które należą do każdej klasy K, spełniającej warunki 1) — 4): zbiór K_1 nie będzie więc próżny i, jak łatwo widzieć, tworzyć będzie klasę mnogości, spełniającą wszystkie warunki 1) —4) i przytem zawartą w każdej innej klasie K, spełniającej te cztery warunki. Będzie to więc najmniejsza klasa K, spełniająca warunki 1) — 4).

Okazuje się, że określona w ten sposób klasa K_1 jest identyczna z klasą t. zw. mnogości (A), badanych przez Suslina i Łuzina[2]. Dowód tego twierdzenia jest właśnie celem niniejszej publikacyi.

Definicya zbiorów (A) jest następująca.

Przypuśćmy, że każdemu układowi skończonemu liczb naturalnych $n_1, n_2, \ldots, n_k$ podporządkowany jest pewien przedział $\delta_{n_1, n_2 \ldots n_k}$: będziemy wówczas mówili, że mamy układ określający $S = \{\delta_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$,

Jądrem układu S nazywamy zbiór wszystkich punktów x, dla których istnieje conajmniej jeden ciąg nieskończony wskaźników $n_1, n_2, n_3, \ldots$,

[1]) Nie wiadomo dotąd, czy każdy obraz wzajemnie-jednoznaczny i wzajemnie-ciągły mnogości Borela jest zawsze mnogością Borela, innemi słowy, czy każda mnogość homeomorficzna z pewną mnogością Borela musi być sama mnogością Borela. Pytanie to zostało rozstrzygnięte twierdząco przez Mazurkiewicza dla mnogości Borela w znaczeniu węższem, mianowicie dla mnogości, które są iloczynami zbiorów, utworzonych z samych tylko punktów wewnętrznych. Zob. jego notę: „Über Borelsche Mengen", Biuletyn Akademii Krakowskiej, 1916, str. 490—494.

[2]) Mnogości (A) posiadają wiele ciekawych własności, z których wymienimy tu następujące:

Każda mnogość Borela jest mnogością (A), lecz nie naodwrot. Na to, żeby mnogość (A) była mnogością Borela, potrzeba i wystarcza, iżby jej dopełnienie również było mnogością (A). Każda mnogość (A) jest iloczynem $\aleph_1$ mnogości Borela. Każda nieprzeliczalna mnogość (A) zawiera część doskonałą. Każda mnogość (A) jest mierzalna w znaczeniu Lebesgue'a. Zbiór wszystkich mnogości (A) jest mocy continuum. Zob. też pracę Łuzina i Sierpińskiego: „Sur quelques propriétés des ensembles (A)", Biuletyn Akademii Krakowskiej, Kwiecień 1918.

taki, iż x należy do każdego z przedziałów

$$\delta_{n_1}, \quad \delta_{n_1 n_2}, \quad \delta_{n_1 n_2 n_3}, \ldots$$

Zbiorem (A) nazywamy każdy zbiór, będący jądrem pewnego układu określającego.

Z definicyi tej wynika z łatwością, że klasa K wszystkich zbiorów (A) spełnia warunki 1), 2) i 3)[1]. Dla dowodu, że uważana klasa spełnia też warunek 4), oprzemy się na następującem twierdzeniu Łuzina:

Aby dana mnogość była zbiorem (A), potrzeba i wystarcza, iżby mnogość ta była zbiorem wszystkich wartości funkcyi $f(x)$, określonej w zbiorze liczb niewymiernych przedziału (0, 1) i ciągłej w tym zbiorze.

Dla wygody czytelnika podamy tu w skróceniu dowód twierdzenia Łuzina. Niech M oznacza daną mnogość (A), $S = \{\delta_{n_1 \ldots n_k}\}$ — układ określający, którego jądrem jest mnogość M. Możemy, jak łatwo widzieć, zawsze założyć, że długości przedziałów o k wskaźnikach, $\delta_{n_1 \ldots n_k}$, są $< \frac{1}{k}$. (Gdyby bowiem warunek ten nie był zachowany, wystarczyłoby rozbijać przedziały δ na części oraz odpowiednio zmienić znakowanie). Nadto możemy zawsze założyć, że przedział $\delta_{n_1 \ldots n_{k+1}}$ jest zawarty w przedziale $\delta_{n_1 \ldots n_k}$ (części bowiem przedziału $\delta_{n_1 \ldots n_{k+1}}$ nie leżące w przedziale $\delta_{n_1 \ldots n_k}$ możemy odrzucić, nie zmieniając przez to jądra układu S). Układ określający, posiadający te dwie własności, nazywa Łuzin regularnym.

Podporządkujmy teraz każdej liczbie niewymiernej x przedziału (0, 1), dającej rozwinięcie na ułamek łańcuchowy

$$x = \frac{1|}{|n_1} + \frac{1|}{|n_2} + \ldots,$$

punkt $y = f(x)$, będący (jedynym) punktem wspólnym ciągu nieskończonego przedziałów

$$\delta_{n_1}, \quad \delta_{n_1 n_2}, \quad \delta_{n_1 n_2 n_3}, \ldots$$

Jeżeli x jest liczbą niewymierną, dostatecznie mało różniącą się od liczby niewymiernej x_0, to k-te redukty ułamków łańcuchowych dla x i x_0 są równe, i przeto liczby $f(x)$ i $f(x_0)$ należą do tego samego przedziału $\delta_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ o długości $< \frac{1}{k}$; wartość bezwzględna różnicy $f(x) - f(x_0)$ jest więc dowolnie mała dla x dostatecznie bliskich x_0, co dowodzi ciągłości funkcyi $f(x)$ w zbiorze liczb niewymiernych przedziału (0, 1).

[1]) Zob. cytowane wyżej noty Suslina i Łuzina w C. R., t. **164**.

Z definicyi funkcyi $f(x)$ wynika, że każda wartość, którą przybiera $f(x)$ dla niewymiernej wartości x w przedziale $(0, 1)$, jest punktem jądra układu S, czyli punktem mnogości M, oraz że każdy element tej ostatniej jest wartością funkcyi $f(x)$ dla pewnego niewymiernego x, leżącego w przedziale $(0, 1)$. Udowodniliśmy więc, że warunek Łuzina jest konieczny.

Niech teraz $f(x)$ oznacza funkcyę, określoną w zbiorze X liczb niewymiernych przedziału $(0, 1)$ i ciągłą w tym zbiorze. Oznaczmy, przy danych naturalnych $n_1, n_2, \dots, n_k$ przez $a_{n_1 \dots n_k}$ dolny, zaś przez $b_{n_1 \dots n_k}$ górny kres wartości $f(x)$, dla wszystkich niewymiernych x, których k-tym reduktem jest

$$\frac{1|}{|n_1} + \frac{1|}{|n_2} + \dots + \frac{1|}{|n_k},$$

oraz połóżmy

$$\delta_{n_1 \dots n_k} = (a_{n_1 \dots n_k}, b_{n_1 \dots n_k}).$$

Niech

$$x_0 = \frac{1|}{|n_1} + \frac{1|}{|n_2} + \dots$$

oznacza daną liczbę zbioru X. Z definicyi przedziału $\delta_{n_1 \dots n_k}$ wynika natychmiast, że będzie on zawierał liczbę $f(x_0)$, która w ten sposób, należąc do każdego z przedziałów $\delta_{n_1}, \delta_{n_1 n_2}, \delta_{n_1 n_2 n_3}, \dots$, będzie należała do jądra M układu $S = \{\delta_{n_1 \dots n_k}\}$.

Z drugiej strony, niech y_0 oznacza jakąkolwiek liczbę zbioru M. Istnieje więc ciąg nieskończony liczb naturalnych $n_1, n_2, n_3, \dots$, taki iż y_0 należy do każdego z przedziałów

$$\delta_{n_1}, \quad \delta_{n_1 n_2}, \quad \delta_{n_1 n_2 n_3}, \dots$$

Połóżmy

$$x_0 = \frac{1|}{|n_1} + \frac{1|}{|n_2} + \dots$$

Wobec ciągłości funkcyi $f(x)$ w zbiorze X dla punktu x_0, istnieje dla dodatniego ε takie k, iż dla każdego niewymiernego x, którego k-ty redukt jest równy k-temu reduktowi liczby x_0, będzie

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon;$$

wynika stąd, że długość przedziału $\delta_{n_1 \dots n_k}$ będzie $< 2\varepsilon$ i przeto, ponieważ y_0 oraz $f(x_0)$ należą jednocześnie do przedziału $\delta_{n_1 \dots n_k}$,

$$|y_0 - f(x_0)| < 2\varepsilon,$$

skąd, wobec dowolności liczby dodatniej ε:

$$y_0 = f(x_0).$$

Każda więc liczba zbioru M jest wartością funkcyi $f(x)$ dla pewnej niewymiernej wartości x w przedziale $(0, 1)$.

Zbiór wszystkich wartości, jakie przybiera funkcya $f(x)$ dla niewymiernych wartości x w przedziale $(0, 1)$ jest więc identyczny ze zbiorem M, będącym zbiorem (A). Dowodzi to, że warunek Łuzina jest wystarczający.

Twierdzenie Łuzina udowodniliśmy zatem w zupełności.

Przechodzimy teraz do dowodu twierdzenia:

Mnogość liniowa, będąca obrazem jednoznacznym i ciągłym mnogości (A) jest sama mnogością (A).

Niech P oznacza mnogość liniową, będącą obrazem jednoznacznym i ciągłym mnogości M, będącej zbiorem (A). Z twierdzenia Łuzina wynika natychmiast, ze każda mnogość (A) jest obrazem jednoznacznym i ciągłym mnogości X wszystkich liczb niewymiernych przedziału $(0, 1)$, jakoteż naodwrót. Ponieważ więc P jest obrazem jednoznacznym i ciągłym mnogości M, zaś mnogość M — obrazem jednoznacznym i ciągłym mnogości X, więc P jest obrazem jednoznacznym i ciągłym mnogości X, skąd wynika, że P jest zbiorem (A), c. b. d. o.

Udowodniliśmy więc, że klasa K wszystkich zbiorów (A) spełnia warunek 4). Klasa ta spełnia więc wszystkie cztery warunki 1) — 4). Okażemy teraz, że jest ona zawarta w każdej klasie K, spełniającej te cztery warunki.

Niech więc K oznacza jakąkolwiek klasę mnogości, spełniającą warunki 1) — 4). Z warunków 1), 2) i 3) wynika, że klasa K zawiera każdą (liniową) mnogość Borela, a więc, w szczególności, mnogość X wszystkich liczb niewymiernych przedziału $(0, 1)$. Z warunku 4) wynika stąd dalej, że klasa K zawiera każdy obraz jednoznaczny i ciągły mnogości X, a więc — każdą mnogość (A) (gdyż, jak zauważyliśmy wyżej, każda mnogość (A) jest obrazem jednoznacznym i ciągłym mnogości X). Klasa wszystkich mnogości (A) jest więc częścią klasy K, c. b. d. o.

Udowodniliśmy więc, że *klasa wszystkich mnogości (A) jest najmniejszą klasą K, spełniającą warunki 1) — 4).* Mnogości (A) stanowią więc naturalne uogólnienie mnogości Borela.

Warto zauważyć, że otrzymalibyśmy klasę zbiorów ogólniejszą niż klasa zbiorów (A), gdybyśmy zastąpili warunek 3) przez warunek:

5) Jeżeli M_1 i M_2 są mnogości, należące do klasy K, to różnica ich $M_1 - M_2$ (o ile istnieje) również jest mnogością, należącą do klasy K.

W samej rzeczy, oznaczmy przez K_2 najmniejszą klasę mnogości, spełniającą warunki 1), 2), 4) i 5). Jak wyżej dla klasy K_1, moglibyśmy udowodnić z łatwością, że taka klasa K_2 istnieje, jako część wspólna wszystkich klas K, spełniających warunki 1, 2, 4) i 5).

Łatwo widzieć, że każda klasa K zbiorów, spełniająca warunki 2) i 4), spełnia też warunek 3): wynika to natychmiast z tożsamości

$$M_1 M_2 M_3 \ldots = M_1 - [(M_1 - M_2) + (M_1 - M_3) + (M_1 - M_4) + \ldots].$$

Klasa K_2 spełnia więc również warunek 3) i przeto, jako jedna z klas K, spełniających wszystkie cztery warunki 1) — 4), zawiera klasę K_1. Z drugiej strony, nie może być $K_2 = K_1$, gdyż klasa K_1 wszystkich mnogości (A) nie spełnia warunku 5): jak to bowiem udowodnił p. Suslin, istnieją mnogości (A), których dopełnienia nie są mnogościami (A).

Klasa K_2 jest więc istotnie szerszą niż klasa wszystkich mnogości (A). Z drugiej strony możnaby z łatwością udowodnić, że klasa K_2 zawiera tylko kontynuum różnych mnogości.

H. MÜNTZ.

Teorya ogólna bezpośredniego rozwiązywania równań.

Théorie générale de la résolution directe des équations.

I. Część algebraiczna.

W nocie przedstawionej w kwietniu r. 1917 Towarzystwu Naukowemu Warszawskiemu [1] podałem dowód metody bezpośredniej stale zbieżnej rozwiązywania dowolnych równań algebraicznych, która przy niewielkich modyfikacyach daje się też zastosować do rozległych klas równań przestępnych. Metoda ta, wymagająca trzech kolejnych procesów granicznych, polega na odpowiedniem zestawieniu i uzupełnieniu znanych metod a) D. Bernoulli'ego, b) Eulera, c) Graeffego, d) Fr. Cohna i e) Hadamarda. Ma ona tę zaletę, że we wszystkich możliwych przypadkach daje wszystkie pierwiastki wraz ze stopniem ich wielokrotności. Wymienione zaś metody są albo w wielu przypadkach nieużyteczne, gdy ustanowienie i wyłączenie tych przypadków przy bezpośredniem rozwiązywaniu danego równania nie daje się przeprowadzić [a) — d)], albo — jak w metodzie daleko idącej Hadamarda — daje tylko bezwzględne wartości pierwiastków.

Podaję w pracy niniejszej teoryę zupełną z należnemi do niej dowodami czysto-algebraicznemi (§§ 1—6), przez co i teorye przestępne Hadamarda pozyskują algebraiczne uzasadnienie (§§ 3—5). Dalej podaję znaczne uproszczenie rozwiązania za pomocą jedynego procesu granicznego (§ 7), uogólnienie tego rozwiązywania (§§ 8—9) i ujęcie wyników, dogodne dla celów przestępnych.

[1]) Porówn. Sprawozdania Towarzystwa Naukowego, 1917.
a) — b) Introduction in anal. infinit. I. § 17.
c) Die Auflösung der höheren numerischen Gleichungen. Zürich, 1837.
d) Mathematische Annalen **44** (1894).
e) Journal de Mathématiques (4) **8**—**9** (1892—1893).