W tabeli IV zestawiliśmy w końcu wielkości $V_2 . 10^{10}$: doświadczalne — w pierwszej kolumnie; obliczone według (58), z uwzględnieniem wartości B i obu wartości a z tabeli II — w kolumnie drugiej i trzeciej; obliczone według (60) — w kolumnie czwartej, a w ostatniej kolumnie — obliczone według teoryi Sommerfelda.

TABELA IV.

	$V_2 . 10^{10}$				
	Obserw.	Obl. według (58) dla $a = a_1$	Obl. według (58) dla $a = a_2$	Obl. według Drudego	Obl. według Sommerfelda
H_2	1,55	1,25	1,46	1,52	1,52
N_2	1,23	0,898	1,00	1,05	12,5

Zgodność teoryi z doświadczeniem można uważać za dobrą (zwłaszcza dla $a = a_2$), uwzględniając wielkość możliwych błędów doświadczalnych. Teorya klasyczna prowadzi do wartości zaledwie o 5% lepszych. Natomiast z teoryi Sommerfelda wynika wprawdzie dla wodoru wartość zgodna z pomiarem, dla azotu jednak zupełnie fałszywa.

Streszczenie wyników.

1. Teorya dyspersyi, oparta na równaniu anizotropowego oscylatora, usuwa trudności, związane z kwestyą ładunku właściwego elektronu, które są właściwe teoryi klasycznej.

2. Wielkość $v\Delta$ ($v =$ wartościowość drobiny; $\Delta = \frac{3}{2}\frac{B}{A}$; A i B stałe wzoru Cauchy'ego) stała uniwersalna u Drudego, okazuje w przypadku anizotropii zależność od parametrów wiązania quasi-elastycznego. Teorya przewiduje granice

$$12{,}36 \leqq v\Delta . 10^7 < 37{,}08.$$

Wyniki pomiarów są z tem zgodne.

3. W teoryi magnetorotacyi, w niektórych przypadkach, uwzględnienie anizotropii oscylatorów, obliczonej z przebiegu dyspersyi, ulepsza znacznie zgodność wzorów teoryi klasycznej z doświadczeniem.

Kraków, w sierpniu 1918.

AL. RAJCHMAN.

O szeregach trygonometrycznych sumowalnych metodą Poissona.

Sur les séries trigonométriques sommables par le procédé de Poisson.

Wstęp.

I. Formalne całkowanie szeregów trygonometrycznych wyraz za wyrazem posiada treść analityczną dzięki następującemu twierdzeniu Riemanna („Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe" Bernhard Riemanns Werke — w 2-em wyd. str. 247 i nast.):

„Jeżeli szereg

$$\sum_{u=1}^{n=\infty} a_n \cos nx + b_u \sin nx \tag{a}$$

jest zbieżny dla

$$x = x_0,$$

jeżeli oznaczymy przez $F(x)$ sumę szeregu otrzymanego przez formalne dwukrotne przecałkowanie szeregu (a)

$$F(x) = -\sum_{n=1}^{u=\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^2}, \tag{b}$$

to granica

$$\lim_{h=0} \frac{F(x_0+h) + F(x_0-h) - 2F(x_0)}{h^2} \tag{c}$$

istnieje i równa się sumie szeregu (a) dla $x = x_0$".

W pracy niniejszej wykazuję, że również w odniesieniu do szeregów trygonometrycznych rozbieżnych sumowalnych metodą Poissona o spółczynnikach dążących do zera — całkowanie formalne ma treść analityczną.

(Uwaga. Mówimy, że szereg

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \tag{d}$$

jest sumowalny metodą Poissona i ma sumę równą s, jeśli granica

$$\lim_{r=1} \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n r^n \tag{e}$$

istnieje i równa się s).

Udowadniam mianowicie twierdzenie następujące:

Jeżeli będzie

$$\lim_{n=\infty} a_n = \lim_{n=\infty} b_n = 0, \tag{f}$$

a nadto istnieje granica

$$s(x_0) = \lim_{r=1} \sum_{n=1}^{n=\infty} (a_n \cos n x_0 + b_n \sin n x_0) r^n, \tag{g}$$

to (przy zachowaniu oznaczenia (b)) zachodzą nierówności:

$$\liminf_{h=0} \frac{F(x_0+h)+F(x_0-h)-2F(x_0)}{h^2} \leqq s(x_0) \leqq \limsup_{h=0} \frac{F(x_0+h)+F(x_0-h)-2F(x_0)}{h^2}. \tag{h}$$

Dowodzę nawet twierdzenia ogólniejszego:

Jeżeli założenie (f) jest spełnione,

a nadto obie granice wahań (górna i dolna)

$$G(x_0) = \limsup_{r=1} \sum_{n=1}^{n=\infty} (a_n \cos n x_0 + b_n \sin n x_0) r^n \tag{i}$$

oraz

$$D(x_0) = \liminf_{r=1} \sum_{n=1}^{n=\infty} (a_n \cos n x_0 + b_n \sin n x_0) r^n \tag{j}$$

są skończone, to zachodzą nierówności:

$$\liminf_{h=0} \frac{F(x_0+h)+F(x_0-h)-2F(x_0)}{h^2} \leqq G(x_0), \tag{k}$$

$$D(x_0) \leqq \limsup_{h=0} \frac{F(x_0+h)+F(x_0-h)-2F(x_0)}{h^2} \tag{l}$$

(Uwaga. Górną granicą wahań funkcyi $\psi(t)$ dla $t \to a$ nazywamy wielkość M, posiadającą własności następujące:

1) do każdej liczby dodatniej η można dobrać taką liczbę ε, że będzie

$$\psi(t) < M + \eta, \quad \text{gdy} \quad |t-a| < \varepsilon;$$

2) jakkolwiek małemi byłyby liczby dodatnie η i ε, istnieją wartości t, czyniące zadość równocześnie obydwu następującym nierównościom:

$$\psi(t) > M - \eta; \quad |t-a| < \varepsilon.$$

Tak określoną górną granicę wahań oznaczamy przez $\limsup_{t=a} \psi(t)$. Dolną granicą wahań funkcyi $\psi(t)$ dla $t=a$ nazywamy wielkość następującą: $-\limsup_{t=a} [-\psi(t)]$. Dolną granicę wahań oznaczamy przez $\liminf_{t=a} \psi(t)$).

Jako zastosowanie naszego twierdzenia podamy wyniki następujące:

1⁰ (uogólnienie twierdzenia de la Vallée-Poussina[1] „szereg trygonometryczny o spółczynnikach dążących do zera sumowalny metodą Poissina „niemal[2] wszędzie" (t. zn. we wszystkich punktach mnogości, której dopełniająca nie zawiera żadnej podmnogości doskonałej) i mający za sumę funkcyę całkowalną[3] — jest szeregiem Fouriera[4]", i ogólniej:

„jeżeli obie granice wahań

$$D(x) = \liminf_{r=1} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) r^n\right]$$

---

[1]) Ch. J. de la Vallée Poussina: „Sur l'unicité du développement trigonométrique". Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des Sciences (Paryż) vol. **155**. 1912, str. 951—953.

[2]) Pozwalam sobie na neologizm językowy. Nie należy mieszać wyrażeń „niemal wszędzie" i „prawie wszędzie". „Prawie wszędzie" ma utarte znaczenie: „we wszystkich punktach mnogości, której dopełniająca ma miarę równą zeru" (podług Borela-Lebesgue'a).

[3]) Podług Lebesgue'a; por. Henri Lebesgue. Leçons sur l'intégration Paryż. Gauthier-Villars. 1904; używamy tu wyłącznie całki Lebesgue'a.

[4]) Szereg trygon. $\Sigma a_n \cos nx + b_n \sin nx$ nazywamy szeregiem Fouriera funkcyi $f(x)$, jeżeli $a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx$; $b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx$. Symbol całki we wzorach powyższych rozumiemy podług definicyi Lebesgue'a.

i

$$G(x) = \limsup_{r=1} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) r^n\right]$$

są funkcyami całkowalnemi i niemal wszędzie skończonemi, jeżeli nadto

$$\lim_{n=\infty} a_n = \lim_{n=\infty} b_n = 0,$$

to szereg

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

jest szeregiem Fouriera".

2⁰ (uogólnienie twierdzenia H. Steinhausa)[1]

a) „jeżeli szereg trygonometryczny o spółczynnikach dążących do zera jest niemal wszędzie sumowalny metodą Poissona i ma sumę uogólnioną niemal wszędzie dodatnią (lub ogólniej: jeśli obie granice wahań $D(x)$ i $G(x)$ są niemal wszędzie skończone i dodatnie),

to szereg ten jest szeregiem Fouriera".

Uwaga. W obydwóch twierdzeniach przytoczonych ostatnio założenie co do spółczynników szeregu (że dążą one do zera) jest istotne. Wskazują na to znane przykłady szeregów

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \cos nx,$$

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} n \sin nx,$$

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} n^2 \cos nx$$

i t. d.

Szeregi te są sumowalne metodą Poissona i mają sumę równą zeru (więc całkowalną): pierwszy i trzeci dla wszelkiego $x \neq 0$, drugi dla wszystkich wartości x. Żaden z nich nie jest oczywiście szeregiem Fouriera. Jeżeli dodać jakąkolwiek liczbę dodatnią do któregobądź z tych szeregów,

[1] H. Steinhaus „Niektóre własności szeregów trygonometrycznych i szeregów Fouriera". Rozprawy Wydziału matem.-przyrodn. Akademii Umiejętności w Krakowie. Tom **56**. Serya A. 1916, str. 175—225.

otrzymamy szereg mający sumę podług Poissona dodatnią, nie będący szeregiem Fouriera.

Dowodząc dwóch ostatnio przytoczonych twierdzeń, będziemy się powoływali na szereg wyników, dotyczących drugiej pochodnej uogólnionej. Najważniejsze z tych rezultatów są udowodnione w 3-em wydaniu 1-go tomu „Cours d'analyse infinitésimale" Ch.-J. de la Vallée Poussina (Paryż-Bruksela, 1914). Ponieważ jednak w obecnych warunkach[1] książkę tą trudno jest odnaleść (nie udało mi się znaleść w Warszawie żadnego jej egzemplarza), i cytując z pamięci, nie mógłbym ręczyć za dokładność cytat, przeto potrzebne do naszych rozumowań twierdzenia de la Vallée-Poussina udowodnię tu powtórnie.

Posiłkować się również będziemy jednem z twierdzeń podanych przez H. Steinhausa (loc. cit.). Wypadnie nam jednak zmienić nieco formę wysłowienia; zmusi to nas do ponownego podjęcia dowodu, który zresztą otrzymuje się łatwo przez zestawienie powtórzonych tu twierdzeń de la Vallée Poussina z twierdzeniami Lebesgue'a („Leçons sur l'intégration"). Twierdzenia Lebesgue'a, cytujemy nie dowodząc ich ponownie.

Własności pochodnych uogólnionych

(Twierdzenie de la Vallée Poussina; uzupełnione twierdzenie p. Steinhausa).

II. Określenie. Mówimy, że funkcya $F(x)$ jest gładka[2] dla danej wartości x, jeżeli dla tej wartości x będzie

$$\lim_{h=0} \frac{F(x+h) + F(x+h) - 2F(x)}{h} = 0. \tag{1}$$

Funkcyą gładką w przedziale danym nazywamy funkcyę gładką dla wszystkich punktów tego przedziału.

Twierdzenie o przyrostach skończonych da się wyrazić w następującej, nieco uogólnionej postaci:

Jeżeli funkcya $F(x)$ jest ciągła i gładka w przedziale danym (A, B), zaś a i b oznaczają jakiekolwiek dwie liczby, należące do przedziału (A, B),

$$A \leqq a < b \leqq B,$$

to dla pewnej liczby c, zawartej pomiędzy a i b,

$$a < c < b,$$

istnieje pochodna $F'(c)$ równa $\dfrac{F(b) - F(a)}{b-a}$.

[1] Pisane podczas okupacyi niemieckiej.

[2] Termin zaproponowany przez p. Steinhausa (l. c.).

Dowód. Wystarczy prawie dosłownie powtórzyć dowód twierdzenia Rollego.

Kładziemy

$$\varphi(x) = F(x) - F(a) - \frac{F(a) - F(a)}{b-a}(x-a). \qquad (2)$$

Z warunku gładkości (1) i z określenia (2) wynika gładkość funkcyi $\varphi(x)$; warunek gładkości można wyrazić w postaci następującej:

$$\lim_{h=0}\left[\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} + \frac{\varphi(x-h)-\varphi(x)}{h}\right] = 0. \qquad (3)$$

Funkcya ciągła $\varphi(x)$, która podług określenia (2) przybiera wartość zero dla $x=a$ i dla $x=b$, osiąga swe extremum (maximum, albo minimum) w pewnym punkcie c, zawartym pomiędzy a i b.

Wyrażenia

$$\frac{\varphi(c+h)-\varphi(c)}{h} \quad \text{i} \quad \frac{\varphi(c-h)-\varphi(c)}{h}$$

są albo oba ujemne, albo oba dodatnie. Ze względu na wzór (3) suma ich dąży do zera, gdy $h \to 0$, przeto każde z nich osobno wzięte musi dążyć do zera równocześnie z h; innemi słowy: $\varphi'(c)$ istnieje i równa się zeru. Ze względu na wzór (2) wynika stąd istnienie pochodnej $F'(c)$ oraz następujący związek:

$$F'(c) = \frac{F(b)-F(a)}{b-a}. \qquad \text{c. b. d. d.}$$

III. Twierdzenie (de la Vallée Poussina).

Jeśli $F(x)$ jest funkcyą ciągłą i gładką w przedziale danym (A, B), jeśli nadto niemal wszędzie (t. zn. w mnogości, której dopełniająca nie zawiera żadnej podmnogości doskonałej) w tym przedziale sprawdza się następująca nierówność

$$\lim_{h=0}\inf \frac{F(x+h)+F(x-h)-2F(x)}{h^2} \leqq 0, \qquad (4)$$

to dla każdego układu trzech wartości x, należących do (A, B): a, x_1, b $(A \leqq a < x_1 < b \leqq B)$, będzie:

$$F(x_1) - F(a) - \frac{F(b)-F(a)}{b-a}(x_1 - a) \geqq 0. \qquad (5)$$

Dowód (przez sprowadzenie do niedorzeczności):

Niechaj a i b będą punktami danego przedziału $(a < b)$; kładę:

$$\varphi(x) = F(x) - F(a) - \frac{F(b)-F(a)}{b-a}(x-a). \qquad (2)$$

Przypuśćmy na chwilę, że teza (5) naszego twierdzenia nie sprawdza się; wówczas mielibyśmy dla pewnej wartości $x=\zeta$ przedziału (a, b)

$$\varphi(\zeta) < 0. \qquad (6)$$

Kładę

$$k = -\varphi(\zeta); \qquad (7)$$

mamy:

$$k > 0.$$

Kładę

$$\psi_\alpha(x) = \varphi(x) + \frac{\alpha k}{(b-a)^2}(x-a)(b-x). \qquad (8)$$

przyczem α spełnia warunek

$$\tfrac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1; \qquad (9)$$

mamy oczywiście:

$$\psi_\alpha(a) = \varphi(a) = 0; \quad \psi_\alpha(b) = \varphi(b) = 0; \qquad (10)$$

ponieważ zaś dla przedziału (a, b) mamy

$$(x-a)(b-x) \leqslant \frac{(b-a)^2}{4},$$

przeto:

$$\psi_\alpha(\xi) \leqslant -k + \tfrac{1}{4}k = -\tfrac{3}{4}k,$$

Istnieje przeto punkt y_α, w którym funkcya $\psi_\alpha(x)$ osiąga swe minimum bezwzględne dla przedziału (a, b).

(Gdyby minimum bezwzględne było osiągane przez funkcyę $\psi_\alpha(x)$ w danym przedziale więcej, niż jeden raz, — to y_α nazwalibyśmy największą wartość x, dla której owo minimum jest osiągnięte — taka największa wartość istnieje zawsze, nawet wtedy, gdy minimum bezwzględne jest osiągane nieskończoną liczbę razy. W rzeczy samej: jeśli funkcya ciągła osiąga dla wszystkich punktów jakiegoś zbioru tą samą wartość d, to musi oczywiście osiągać wartość d również dla punktów granicznych tego zbioru; innemi słowy: zbiór punktów, w których funkcya ciągła osiąga tą samą wartość, jest zawsze zamknięty; w zamkniętym i ograniczonym zbiorze jest zawsze jedna liczba największa ze wszystkich).

Nadając liczbie α wszystkie wartości od $\frac{1}{2}$ do 1, otrzymujemy zbiór wartości y_α, który nazwiemy M. Dołączając do niego zbiór jego punktów granicznych, otrzymujemy zbiór zamknięty, który nazwiemy N.

Udowodnimy, że:

1) Żaden punkt mnogości N nie spełnie warunku (4); t. j. dla każdego punktu x mnogości N zachodzi nierówność przeciwna do (4)

$$\lim_{h=0}\inf \frac{F(x+h)+F(x-h)-2F(x)}{h^2} > 0. \qquad (12)$$

2) Mnogość N zawiera podmnogość doskonałą.

a) Oczywistą niemal rzeczą jest, że każdy punkt zbioru M spełnia nierówność (12).

Istotnie:

byleby tylko punkty $y_\alpha - h$, y_α, $y_\alpha + h$ leżały wewnątrz (a, b), t. j. byleby było

$$a \leqslant y_\alpha - |h| < y_\alpha < y_\alpha + |h| \leqslant b \tag{13}$$

mamy (ponieważ y_α jest minimum funkcyi ψ_α):

$$\psi_\alpha(y_\alpha + h) + \psi_\alpha(y_\alpha - h) - 2\psi_\alpha(y_\alpha) \geqslant 0,$$

skąd robiąc podstawienia podług wzorów (8) i (2) i dzieląc przez h^2, mamy:

$$\frac{F(y_\alpha + h) + F(y_\alpha - h) - 2F(y)}{h^2} - \frac{2\alpha k}{(b-a)^2} \geqslant 0. \tag{14}$$

Uwzględniając warunek (9), wnioskujemy z (14) a fortiori:

$$\frac{F(y_\alpha + h) + F(y_\alpha - h) - 2F(y_\alpha)}{h^2} \geqslant \frac{k}{(b-a)^2}. \tag{15}$$

Jeśli uwzględnimy, że $k > 0$, mamy stąd odrazu (12).

b) Nietylko jednak punkty zbioru M, ale i wszelkie inne punkty N (t. zn. punkty graniczne zbioru M) spełniają warunek (12). Żeby tego dowieść, zauważymy przedewszystkiem, że ani punkt $x = a$, ani $x = b$ nie należy do N.

W rzeczy samej:

z uwagi na (8) mamy dla wszelkiej wartości x przedziału (a, b):

$$\varphi(x) \leqslant \psi_\alpha(x); \tag{16}$$

z (11) wynika a fortiori:

$$\psi_\alpha(y_\alpha) \leqslant -\tfrac{3}{4}k,$$

co w związku z (16) daje:

$$\varphi(y_\alpha) \leqslant -\tfrac{3}{4}k; \tag{17}$$

$\psi(x)$ jest funkcyą ciągłą: musimy więc mieć również dla każdego punktu granicznego zbioru M

$$\varphi(x) \leqslant -\tfrac{3}{4}k; \quad x = a \quad \text{i} \quad x = b \quad \text{nie spełniają tego warunku} \tag{18}$$

ze względu na (10).

Zbiór N posiada więc granicę górną $\beta < b$ i granicę dolną $\alpha > a$; oznaczmy ϑ mniejszą z dwóch liczb

$$(\alpha - a) \quad \text{i} \quad (b - \beta);$$

jasną jest rzeczą, że jeśli

$$|h| \leqslant \vartheta, \tag{19}$$

to warunek (13) jest spełniony.

W nierówności (15) będziemy uważali h za liczbę stałą ($\leqq \vartheta$), wielkości zaś y_α nadawać będziemy wszystkie wartości, należące do zbioru M, zawarte pomiędzy α i β. Wyrażenie

$$\frac{F(y_\alpha + h) + F(y_\alpha - h) - 2F(y_\alpha)}{h^2},$$

stanowiące lewą stronę (15) jest funkcyą ciągłą wielkości y_α; więc z nierówności (15) możemy wnioskować, że również dla wszelkiego punktu x będącego punktem granicznym zbioru M, (o ile tylko spełnia nierówności $\alpha \leqq y \leqq \beta$) mamy:

$$\frac{F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)}{h^2} \geqq \frac{k}{(b-a)^2}$$

(pod warunkiem, że $|h| \leqq \vartheta$).

Pamiętając, że k jest dodatnie, otrzymujemy nierówność (12) teraz już dla wszystkich punktów zbioru N.

2° a) Udowodnimy najpierw, że zbiór M jest nieprzeliczalny (wykażemy nawet, że posiada moc kontynuum).

Istotnie: każdej wartości α przedziału $(\frac{1}{2}, 1)$ odpowiada jedna ściśle określona wartość y_α; wykażemy, że odpowiedniość ta jest jedno-jednoznaczna, t. j. że i odwrotnie każdej wartości y_α odpowiada jedna ściśle określona wartość α.

(Wzorujemy się na rozumowaniu L. Scheeffera cytowanem w „Leçons sur l'intégration" Lebesgue'a, str. 77).

Dowodzimy tego przypominając, że y_α jest minimum bezwzględnem funkcyi $\psi_\alpha(x)$ dla przedziału (a, b); oba więc wyrażenia

$$\frac{\psi_\alpha(y_\alpha + h) - \psi_\alpha(y_\alpha)}{h} \quad \text{i} \quad \frac{\psi(y_\alpha - h) - \psi_\alpha(y_\alpha)}{h} \tag{21}$$

mają ten sam znak ($+$ jeśli $h > 0$, $-$ jeśli $h < 0$); a że ze względu na założenie (1) oraz definicye (2) i (8) suma tych wyrażeń (21) dąży do zera dla $h = 0$, przeto każde z nich dąży do zera; mamy więc:

$$\frac{d\psi_\alpha(x)}{dx} \quad \text{dla} \quad x = y_\alpha$$

istnieje i równa się zeru.

Ze względu na (8) wynika stąd:

$$\varphi'(y_\alpha)$$

istnieje i mamy

$$0 = \varphi'(y_\alpha) - \frac{2\alpha k y_\alpha}{(b-a)^2} + \frac{\alpha k (a+b)}{(b-a)^2},$$

skąd:

$$\alpha = \frac{(b-a)^2 \varphi'(y_\alpha)}{k(2y_\alpha - a - b)}. \tag{22}$$

Wzór (22) wykazuje, że każdej wartości y_α odpowiada jedna ściśle określona wartość α.

Istnieje więc odpowiedniość jedno-jednoznaczna pomiędzy punktami zbioru M i wszystkiemi liczbami rzeczywistemi α, spełniającemi warunek

$$\tfrac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1;$$

t. zn. zbiór M posiada moc kontynuum.

b) Ponieważ zbiór M jest nieprzeliczalny, więc a fortiori zbiór N (zawierający M) jest nieprzeliczalny.

c) Zbiór N jako zamknięty da się rozłożyć na dwie podmnogości A i B, z których pierwsza, A, jest przeliczalna albo pusta, druga, B, — doskonała albo pusta [1]. Podmnogość B nie może być pusta, gdyż w takim razie byłoby

$$N \equiv A,$$

t. zn. zbiór N byłby przeliczalny, co przeczy wykazanemu pod b).

Mnogość N zawiera zatem podmnogość doskonałą.

Jeżeliby więc nierówność (5) nie była spełniona chociażby dla jednej wartości $x = \zeta$, to nierówność (4) nie zachodziłaby dla wartości x, tworzących zbiór doskonały. Przeczy to jednak założeniu.

Nierówność (5) jest więc koniecznym wnioskiem naszych założeń. c. b. d. d.

Twierdzenie (równoważne powyższemu).

Jeśli w przedziale danym $F(x)$ jest funkcyą ciągłą i gładką (t. zw. spełniającą warunek (1)),

jeśli nadto w tym przedziale „niemal wszędzie“ sprawdza się nierówność

$$\limsup_{h=0} \frac{F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)}{h^2} \geqq 0, \tag{23}$$

to dla każdego układu trzech wartości x danego przedziału

$$a, \quad x_1, \quad b \qquad (a < x_1 < b)$$

[1]) Por. np. W. Sierpiński, Zarys teoryi mnogości (Warszawa, 1912) str. 114.

będzie:

$$F(x_1) - F(a) - \frac{F(b) - F(a)}{b-a}(x_1 - a) \leqq 0. \tag{24}$$

Dowód. Kładziemy

$$\Phi(x) = -F(x)$$

z uwagi na (23) mamy niemal wszędzie

$$\liminf_{h=0} \frac{\Phi(x+h) + \Phi(x-h) - 2\Phi(x)}{h^2} \leqq 0,$$

więc, w myśl twierdzenia poprzedniego, dla każdego układu trzech wartości x danego przedziału a, x_1, b

$$(a < x_1 < b)$$

zachodzi nierówność

$$\Phi(x_1) - \Phi(a) - \frac{\Phi(b) - \Phi(a)}{b-a}(x_1 - a) \geqq 0;$$

podstawiając w niej

$$\Phi = -F$$

otrzymujemy nierówność (24) c. b. d. d.

Wniosek. Wszelka funkcya $F(x)$ ciągła i gładka (t. zn. spełniająca warunek (1)), spełniająca warunki

$$\liminf_{h=0} \frac{F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)}{h^2} \leqq 0, \tag{4}$$

$$\limsup_{h=0} \frac{F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)}{h^2} \geqq 0 \tag{23}$$

niemal wszędzie w przedziale danym, jest funkcyą liniową (w rozważanym przedziale).

Dowód. Z zestawienia nierówności (5) i (24) otrzymujemy:

$$F(x_1) - F(a) - \frac{F(b) - F(a)}{b-a}(x_1 - a) = 0,$$

czyli

$$F(x) = \frac{F(b) - F(a)}{b-a}(x - a) + F(a),$$

t. zn. $F(x)$ jest funkcyą liniową. c. b. d. d.

IV. Określenie (p. Steinhausa, loc. cit. str. 180).

Mówimy, że funkcya $F(x)$ jest niewklęsła ku dołowi w przedziale (u, v), jeżeli zachodzi nierówność

$$\frac{F(x)-F(y)}{x-y} \leqq \frac{F(y)-F(z)}{y-z} \tag{25}$$

dla

$$u \leqq x < y < z \leqq v. \tag{26}$$

Twierdzenie. Wszelka funkcya $F(x)$ ciągła i gładka w przedziale danym (a, b), spełniająca w tym przedziale niemal wszędzie warunek

$$\limsup_{h=0} \frac{F(x+h)+F(x-h)-2F(x)}{h^2} \geqq 0, \tag{23}$$

jest niewklęsła ku dołowi w przedziale (a, b).

Dowód. Drugie z twierdzeń § III daje bezpośrednio (przez podstawienie w nierówności (24) $a = x$; $x_1 = y$; $b = z$)

$$\frac{F(y)-F(x)}{y-x} \leqq \frac{F(z)-F(x)}{z-x},$$

czyli

$$\frac{F(x)-F(y)}{x-y} \leqq \frac{F(x)-F(z)}{x-z}. \tag{27}$$

Stosując to samo twierdzenie do funkcyi

$$\Phi(x) = F(-x),$$

do przedziału

$$(-b, \ -a),$$

i do wartości

$$-z, \quad -y, \quad -x,$$

otrzymujemy:

$$\frac{\Phi(-y)-\Phi(-z)}{(-y)-(-z)} \leqq \frac{\Phi(-x)-\Phi(-z)}{(-x)-(-z)},$$

czyli

$$-\frac{F(y)-F(z)}{x-z} \leqq -\frac{F(x)-F(z)}{x-z}.$$

Możemy tej nierówności nadać również postać

$$\frac{F(x)-F(z)}{x-z} \leqq \frac{F(y)-F(z)}{y-z}. \tag{28}$$

Zestawiając nierówności (27) i (28), otrzymujemy:

$$\frac{F(x)-F(y)}{x-y} \leqq \frac{F(y)-F(z)}{y-z}. \quad \text{c. b. d. d.} \tag{25}$$

V. Twierdzenie (p. Steinhausa, loc. cit. str. 180).

Wszelka funkcya $F(x)$ ciągła i gładka, niewklęsła ku dołowi w przedziale (a, b), posiada wszędzie wewnątrz tego przedziału określoną, skończoną, ciągłą i niemalejącą pierwszą pochodną.

Uwaga. Twierdzimy, że $F'(x)$ istnieje dla $a < x < b$; dla $x = a$ udowadniamy istnienie tylko prawostronnej pochodnej, która równa się $\lim_{h=+0} F'(a+h)$; podobnie dla $x = b$ stwierdzamy tylko istnienie lewostronnej pochodnej, równej $\lim_{h=+0} F'(b-h)$.

Dowód. Wystarczy prawie dosłownie powtórzyć rozumowania p. Steinhausa, l. c. str. 181 i 182:

Zauważymy,[1] że według nierówności (25) (charakteryzującej funkcye niewklęsłe ku dołowi) wartość stosunku

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} \qquad (b-x \geqq h > 0) \tag{29}$$

nie rośnie, gdy liczba h dąży przez dodatnie wartości do zera (malejąc) w rzeczy samej z nierówności (25) wynika po dodaniu do siebie liczników i mianowników w obu ułamkach:

$$\frac{F(y)-F(x)}{y-x} \leqq \frac{F(z)-F(x)}{z-x},$$

skoro będzie $z > y > x$.

Podobnie wartość stosunku

$$\frac{F(x)-F(x-k)}{k}, \qquad (x-a \geqq k > 0) \tag{30}$$

która — według (25) — jest zawsze niewiększa niż wartość stosunku (29), nie maleje, gdy liczba k dąży przez wartości dodatnie do zera (malejąc).

Widzimy więc, że obydwa stosunki ((29) i (30)) mają określone skończone granice dla $h \to +0$, względnie $k \to +0$.

Warunek (1) gładkości funkcyi $F(x)$ daje:

$$\lim_{h=0} \left[\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - \frac{F(x)-F(x-h)}{h}\right] = 0, \tag{31}$$

co dowodzi, że granice wyrażeń (30) i (29) nie mogą być różne. Tem samem udowodniliśmy istnienie określonej i skończonej pochodnej $F'(x)$.

[1] Cytuję dowód p. Steinhausa z drobnemi zmianami.

Udowodnimy teraz, że $F'(x)$ jest funkcyą niemalejącą. Niech będzie

$$a < x_1 < x_2 < b.$$

Możemy znaleść takie liczby dodatnie h, k, aby było

$$x_1 + h < x_2 - k.$$

Warunek „niewklęsłości ku dołowi“ (25) daje wtedy:

$$\frac{F(x_1+h) - F(x_1)}{h} \leqq \frac{F(x_2-k) - F(x_1+h)}{(x_2-k) - (x_1+h)},$$

$$\frac{F(x_2-k) - F(x_1+h)}{(x_2-k) - (x_1+h)} \leqq \frac{F(x_2) - F(x_2-k)}{k},$$

a więc:

$$\frac{F(x_1+h) - F(x_1)}{h} \leqq \frac{F(x_2) - F(x_2-k)}{k}.$$

W granicy (dla $h \to +0$, $k \to +0$) będzie:

$$F'(x_1) \leqq F'(x_2),$$

czego należało dowieść.

Łatwo teraz udowodnić ciągłość funkcyi $F'(x)$.

Niechaj α i β będą dwiema zmiennemi dążącemi do x_1, α dąży do x_1 rosnąc, β malejąc:

$$\alpha < x_1 < \beta; \qquad \lim \alpha = \lim \beta = x_1.$$

Należy wykazać, że

$$F'(x_1) = \lim F'(\alpha) = \lim F'(\beta).$$

W myśl twierdzenia o przyrostach skończonych będzie:

$$\left.\begin{aligned} \frac{F(x_1+h) - F(x_1)}{h} &= F'(x_1 + \theta h), \\ \frac{F(x_1) - F(x_1-h)}{h} &= F'(x_2 - \theta_1 h); \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

θ i θ_1 oznaczają tu wielkości dodatnie [1] mniejsze od jedności.

[1] Możemy zawsze przyjąć $\theta \neq 0$; $\theta_1 \neq 0$; istotnie; $x_1 + \theta h$ to wartość x, dla której funkcya $\Phi(x) = F(x) - F(x_1) - \frac{F(x_1+h) - F(x_1)}{h}(x - x_1)$ osiąga maximum, względnie minimum bezwzględne dla przedziału (x_1, x_1+h); przyjąć $\theta = 0$, to znaczy przyjąć, że w przedziale (x_1, x_1+h) funkcya $\Phi(x)$ nie przybiera aai wartości mniejszych, ani większych od $\Phi(x_1) = 0$, t. j. że $\Phi(x) = 0$ dla $x_1 < x < x_1 + h$; ale wówczas $\Phi'(x) = 0$, t. j. $F'(x) = F'(x_1)$ i wzór (32) będzie prawdziwy dla wszelkiego $0 < \theta < 1$; w tym przypadku mamy więc prawo przyjąć np. $\theta = \frac{1}{2}$.

Zestawiając warunek gładkości (31) ze wzorami (32), otrzymujemy:

$$\lim_{h=0} [F'(x_1 + \theta h) - F'(x_1 - \theta_1 h)] = 0; \tag{31bis}$$

θ i θ_1 są to wielkości (które są funkcyami h) różne od zera. Ustalmy na chwilę wartość h (a co zatem idzie i θ i θ_1); ponieważ α i β dążą do x_1, więc poczynając od pewnych wartości będzie:

$$x_1 - \theta_1 h < \alpha < x_1 < \beta < x_1 + \theta h;$$

wynika stąd (ponieważ $F'(x)$ jest funkcyą niemalejącą);

$$F'(x_1 - \theta_1 h) \leqq F'(\alpha) \leqq F'(x_1) \leqq F'(\beta) \leqq F'(x_1 + \theta h),$$

a więc, ze względu na wzór (31bis):

$$\lim F'(\alpha) = F'(x_1); \qquad \lim F'(\beta) = F'(x_1) \qquad \text{c. b. d. d.}$$

VI. Twierdzenie (p. Steinhausa, nieco uogólnione).

Wszelka funkcya $F(x)$ ciągła i gładka w danym przedziale, spełniająca w tym przedziale niemal wszędzie warunek

$$\limsup_{h=0} \frac{F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)}{h^2} \geqq 0, \tag{23}$$

posiada w owym przedziale prawie wszędzie drugą pochodną $F''(x)$ całkowalną podług Lebesgue'a.

Dowód. W myśl twierdzeń §§ IV i V $F'(x)$ istnieje we wszystkich punktach przedziału uważanego i jest funkcyą ciągłą niemalejącą.

H. Lebesgue udowodnił, [1] że wszelka funkcya o wahaniu skończonem, a więc i wszelka funkcya niemalejąca, ma prawie wszędzie określoną i skończoną pochodną i że pochodna ta jest funkcyą całkowalną. [2] Przeto funkcya $F'(x)$ ma prawie wszędzie pochodną $F''(x)$, i $F''(x)$ jest funkcyą całkowalną. c. b. d. d.

VII. Twierdzenie. Druga pochodna uogólniona

$$\lim_{h=0} \frac{F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)}{h^2}$$

[1] Leçons sur l'intégration. Paryż, Gauthier-Villars, 1904 str. 128.

[2] Lebesgue (loc. cit.) wyraża się w sposób niezbyt udatny „cette dérivée est sommable (t. zn. całkowalna podług Lebesgue'a) dans l'ensemble des points où elle est finie“. Ale pochodna funkcyi o wahaniu skończonem może być nieskończoną tylko w mnogości o mierze zero (podług omawianego tu twierdzenia Lebesgue'a), zachowanie się zaś funkcyi w mnogości o mierze zero nie wpływa na jej całkowalność. Wyrazy „dans l'ensemble des points où elle est finie“ są więc zbyteczne.

istnieje i jest równa drugiej pochodnej zwyczajnej $F''(x)$ w każdym punkcie, w którym istnieje druga pochodna zwyczajna.

Dowód. Niechaj $F''(x)$ istnieje dla $x = x_0$; oznaczmy przez p jej wartość dla $x = x_0$:

$$p = F''(x_0).$$

Kładziemy

$$\Phi(x) = F(x) - \frac{p x^2}{2}; \tag{33}$$

mamy:

$$\Phi''(x_0) = 0. \tag{34}$$

Zakładając istnienie pochodnej $F''(x_0)$, przyjmujemy tem samem istnienie pochodnej $F'(x)$, a więc i pochodnej $\Phi'(x)$ w pobliżu $x = x_1$. Możemy więc stosować twierdzenie o przyrostach skończonych do funkcyi $\Phi(x)$ i do przedziałów $(x_0 - h, x_0)$, $(x_0, x_0 + h)$, byleby h było dostatecznie małe. Otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0) &= h\Phi'(x_0 + \theta h), \\ \Phi(x_0) - \Phi(x_0 - h) &= h\Phi'(x_0 - \theta_1 h); \end{aligned} \tag{35}$$

θ i θ_1 oznaczają tu wielkości dodatnie mniejsze od jedności.

Ze względu na (33) możemy napisać:

$$\begin{aligned} &\frac{F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)}{h^2} \\ &= \frac{\Phi(x+h) + \Phi(x-h) - 2\Phi(x)}{h^2} + p. \end{aligned} \tag{36}$$

Odejmując stronami dwa równania (35) i dzieląc obie strony przez h^2, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \frac{\Phi(x_0+h) + \Phi(x_0-h) - 2\Phi(x_0)}{h^2} &= \frac{\Phi'(x_0+\theta h) - \Phi'(x_0 - \theta_1 h)}{h} \\ &= \theta \cdot \frac{\Phi'(x_0+\theta h) - \Phi'(x_0)}{\theta h} + \theta_1 \frac{\Phi'(x_0) - \Phi'(x_0 - \theta_1 h)}{\theta_1 h}. \end{aligned} \tag{37}$$

Ze względu na (34) będzie:

$$\lim_{h=0} \frac{\Phi'(x_0+\theta h) - \Phi'(x_0)}{\theta h} = \lim_{h=0} \frac{\Phi'(x_0) - \Phi'(x_0 - \theta_1 h)}{\theta_1 h} = 0.$$

Ze wzoru (37) możemy więc wnioskować:

$$\lim_{h=0} \frac{\Phi(x_0+h) + \Phi(x_0-h) - 2\Phi(x_0)}{h^2} = 0,$$

skąd znowu, z uwagi na tożsamość (36), otrzymujemy

$$\lim_{h=0} \frac{F(x_0+h) + F(x_0-h) - 2F(x_0)}{h^2} = p$$

c. b. d. d.

VIII. Łatwo uogólnić powyższe rozumowanie i wykazać, że, jeśli tylko $F'(x)$ istnieje w pewnym przedziale, to w każdym punkcie tego przedziału obie granice wahań (górna i dolna) wyrażenia

$$\frac{F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)}{h^2}$$

dla $h \to 0$ są niewiększe od największej i niemniejsze od najmniejszej z czterech granic wahań

$$\begin{aligned} &\liminf_{h=+0} \frac{F'(x) - F'(x-h)}{h}; \quad &&\liminf_{h=+0} \frac{F'(x+h) - F'(x)}{h}; \\ &\limsup_{h=+0} \frac{F'(x) - F'(x-h)}{h}; \quad &&\limsup_{h=+0} \frac{F'(x+h) - F'(x)}{h}. \end{aligned} \tag{38}$$

Dowód. Weźmy pod uwagę jakąś szczególną wartość x, którą oznaczymy przez x_0. Oznaczmy przez p_1 najmniejszą, przez p_2 największą z czterech liczb (38) dla $x = x_0$. Kładziemy

$$\Phi_1(x) = F(x) - p_1 \frac{x^2}{2}; \qquad \Phi_2(x) = F(x) - p_2 \frac{x^2}{2};$$

oczywiście będzie

$$\Phi_1'(x) = F'(x) - p_1 x; \qquad \Phi_2'(x) = F'(x) - p_2 x,$$

przeto granice wahań wyrażenia

$$\frac{\Phi_1'(x_0 \pm h) - \Phi_1'(x_0)}{\pm h} \tag{39}$$

dla $h \to 0$ będą dodatnie lub równe zeru, zaś granice wahań wyrażenia

$$\frac{\Phi_2'(x_0 \pm h) - \Phi_2'(x_0)}{\pm h} \tag{40}$$

będą ujemne lub równe zeru.

Wzory (35), (36) i (37) § poprzedniego utrzymują się oczywiście i wtedy, jeżeli zastąpimy w nich p przez p_1 lub p_2, zaś Φ przez Φ_1 względnie Φ_2. Z tak zmienionego wzoru (37) otrzymamy (mając na względzie zrobione przed chwilą uwagi o wyrażeniach (39) i (40)):

$$\limsup_{h=0} \frac{\Phi_2(x_0+h)+\Phi_2(x_0-h)-2\Phi_2(x_0)}{h^2} \leqq 0,$$

$$\liminf_{h=0} \frac{\Phi_1(x_0+h)+\Phi_1(x_0-h)-2\Phi_1(x_0)}{h^2} \geqq 0.$$

Nierówności powyższe dają z uwagi na tożsamość (36) (w której przez Φ rozumiemy jednę z funkcyj: Φ_1 albo Φ_2, przez p jednę z dwóch liczb p albo p_2):

$$\limsup_{h=0} \frac{F(x_0+h)+F(x_0-h)-2F(x_0)}{h^2} \leqq p_2,$$

$$\liminf_{h=0} \frac{F(x_0+h)+F(x_0-h)-2F(x_0)}{h^2} \geqq p_1,$$

c. b. d. d

IX. Twierdzenie de la Vallée Poussin'a o majorancie i minorancie.

Do każdej liczby dodatniej ε i do każdej funkcyi $f(x)$, całkowalnej [1] w przedziale danym (a, b) można dobrać dwie funkcye ciągłe: $M_{\varepsilon, f}(x)$ $m_{\varepsilon, f}(x)$, czyniące zadość warunkom następującym:

1) dla wszelkiego $a \leqq x \leqq b$ zachodzą nierówności:

$$0 \leqq M_{\varepsilon, f}(x) - \int_a^x f(t)\,dt \leqq \varepsilon,$$

$$0 \leqq \int_a^x f(t)\,dt - m_{\varepsilon, f}(x) \leqq \varepsilon.$$

2) dla wszystkich wartości x (należących do przedziału (a, b)), dla których $f(x)$ przybiera wartość skończoną, zachodzą nierówności:

$$\liminf_{h=0} \frac{M_{\varepsilon, f}(x \pm h) - M_{\varepsilon, f}(x)}{\pm h} \geqq f(x),$$

$$\limsup_{h=0} \frac{m_{\varepsilon, f}(x \pm h) - m_{\varepsilon, f}(x)}{\pm h} \leqq f(x).$$

Funkcyę $M_{\varepsilon, f}(x)$ nazywać będziemy majorantą, funkcyę $m_{\varepsilon, f}(x)$ — minorantą funkcyi $f(x)$.

[1]) Podług Lebesgue'a (jak w całej pracy niniejszej); w odniesieniu do funkcyi całkowalnych podług Riemanna omawiane twierdzenie byłoby banalne.

Dowód. A) Przypadek szczególny: $f(x)$ przybiera tylko dwie wartości: zero i jedność.

Rozważymy najpierw przypadek, gdy dla wszelkiego $a \leqq x \leqq b$ albo $f(x)=1$, albo $f(x)=0$.

Nazwijmy E_1 zbiór wartości x, dla których $f(x)=1$,

E_0 zbiór wartości x, dla których $f(x)=0$;

oznaczmy przez e_1 miarę zbioru E_1

przez e_0 miarę zbioru E_0.

Będzie oczywiście:

$$e_1+e_0=b-a. \tag{41}$$

Pokryjmy [1]) zbiór E_1 układem przedziałów, które nazwiemy

$$A_1^{(1)},\ A_2^{(1)} \ldots\ A_n^{(1)}, \ldots; \tag{42}$$

podobnie nazwiemy

$$A_1^{(0)},\ A_2^{(0)} \ldots\ A_n^{(0)}, \ldots \tag{43}$$

przedziały pewnego układu pokrywającego E_0. Niechaj α_1 będzie sumą długości przedziałów (42), α_0 sumą długości przedziałów (43). Oczywiście możemy dobrać układy (42) i (43) tak, aby było

$$\alpha_1 < e_1 + \frac{\varepsilon}{2}, \tag{44}$$

$$\alpha_0 < e_0 + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{45}$$

Nazwijmy $B_k^{(1)}(x)$ część wspólną przedziałom $A_k^{(1)}$ i (a, x),

" $B_k^{(0)}(x)$ " " " $A_k^{(0)}$ i (a, x)

i weźmy pod uwagę układy przedziałów

$$B_1^{(1)}(x),\quad B_2^{(1)}(x), \ldots\quad B_n^{(1)}(x), \ldots \tag{46}$$

$$B_1^{(0)}(x),\quad B_2^{(0)}(x), \ldots\quad B_n^{(0)}(x), \ldots \tag{47}$$

Układ (46) pokrywa część zbioru E_1 znajdującą się wewnątrz odcinka (a, x); podobnie: układ (47) pokrywa część E_0, znajdującą się na (a, x).

Niechaj $\beta_1(x)$ będzie sumą długości przedziałów (46), $\beta_0(x)$ — sumą długości przedziałów (47). Rozumiejąc przez $B_k^{(1)}(x)$ (względnie $B_k^{(0)}(x)$) długość przedziału tej nazwy, wyrazimy nasze definicye przez wzory:

[1]) Mówimy, że układ przedziałów (A) pokrywa zbiór (E), jeżeli każdy punkt zbioru (E) znajduje się wewnątrz przynajmniej jednego przedziału układu (A).

$$\beta_1(x)=\sum_{k=1}^{k=\infty} B_k^{(1)}(x), \tag{48}$$

$$\beta_0(x)=\sum_{k=1}^{k=\infty} B_k^{(0)}(x). \tag{49}$$

Oczywiście będzie:

$$\beta_1(b)=\alpha_1; \qquad \beta_0(b)=\alpha_0. \tag{50}$$

Wykażemy, że funkcya $\beta_1(x)$ jest majorantą funkcyi $f(x)$, zaś

$$\gamma(x)=x-a-\beta_0(x) \tag{51}$$

jej minorantą.

Jasną jest rzeczą przedewszystkiem, że szeregi (48) i (49) są jednostajnie zbieżne, ich wyrazy [1] są funkcyami ciągłemi zmiennej x. Funkcye $\beta_1(x)$ i $\beta_0(x)$, które są sumami tych szeregów, są więc ciągłe.

Dla wszelkiego [2] h i x będzie oczywiście:

$$\frac{\beta_1(x+h)-\beta_1(x)}{h}=\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{B_k^{(1)}(x+h)-B_k^{(1)}(x)}{h}. \tag{52}$$

Dla punktów x leżących wewnątrz przedziału $A_k^{(1)}$ i dla wszystkich dostatecznie małych [3] wartości h będzie

$$\frac{B_k^{(1)}(x+h)-B_k^{(1)}(x)}{h}=1. \tag{53}$$

Funkcye $B_k^{(1)}(x)$ są oczywiście niemalejącemi, przeto dla wszelkiego x i h będzie:

[1] Jeżeli oznaczymy przez a_k, b_k końce przedziału $A_k^{(1)}$, to funkcya $B_k^{(1)}(x)$ da się wyrazić w sposób następujący:

$$\begin{array}{lll} B_k^{(1)}(x)=0, & \text{jeśli} & x\leqq a_k \\ B_k^{(1)}(x)=x-a_k, & \text{„} & a_k\leqq x\leqq b_k \\ B_k^{(1)}(x)=b_k-a_k, & \text{„} & x\geqq b_k. \end{array}$$

Podobnie można wyrazić $B_k^{(0)}(x)$.

[2] Byleby tylko wartości x i $x+h$ należały do przedziału (a, b).

[3] Jeżeli również i $x+h$ należy do $A_k^{(1)}$, t. zn. jeżeli

$$-(x-a_k)<h<b_k-x.$$

$$\frac{B_k^{(1)}(x+h)-B_k^{(1)}(x)}{h}\geqq 0. \tag{54}$$

Każdy punkt zbioru E_1 należy przynajmniej do jednego z przedziałów $A_k^{(1)}$. Jeżeli więc x należy do E_1, t. j. jeżeli $f(x)=1$, to, przy dostatecznie małem h, przynajmniej jeden z wyrazów szeregu (52) równa się jedności; że zaś (podług (54)) żaden z wyrazów tego szeregu nie jest ujemny, przeto:

$$\frac{\beta_1(x+h)-\beta_1(x)}{h}\geqq 1, \tag{55}$$

byleby było $f(x)=1$ i h dość małe. O ile więc $f(x)=1$, będzie:

$$\liminf_{h=\pm 0}\frac{\beta_1(x+h)-\beta_1(x)}{h}\geqq f(x); \tag{56}$$

ze względu na wzory (52) i (54) będzie dla wszelkiego $a<x<b$ i dla $a-x\leqq h\leqq b-x$:

$$\frac{\beta_1(x+h)-\beta_1(x)}{h}\geqq 0; \tag{57}$$

nierówność (56) zachodzi [1] więc również i wówczas gdy $f(x)=0$: jest ona zatem prawdziwa dla wszelkiego

$$a<x<b$$

Skoro powtórzymy rozumowania powyższe, zastępując w nich

zbiór	E_1	przez	E_0	
i	E_0	przez	E_1,	wówczas:
zamiast	$B_k^{(1)}(x)$	wystąpi	$B_k^{(0)}(x)$,	
zamiast	$\beta_1(x)$	ukaże się	$\beta_0(x)$,	
zamiast	$f_1(x)$	wystąpi	$1-f(x)$.	

Zamiast nierówności (56) otrzymujemy wówczas [2] nierówność (spraw-

[1] Ze wzorów (55) i (57) wynika: iż do każdej wartości x można dobrać liczbę $h(x)$ tak małą, aby dla wszelkiego $|h|\leqq h(x)$ sprawdzała się nierówność następująca:

$$\frac{\beta_1(x+h)-\beta_1(x)}{h}\geqq f(x). \tag{M}$$

[2] Nierównością analogiczną do nierówności (M) będzie nierówność następująca:

$$\frac{\beta_0(x+h)-\beta_0(x)}{h}\geqq 1-f(x);$$

z nierówności tej wynika (nierówność prawdziwa dla wszelkiego x i odpowiednio małego h):

$$\frac{\gamma(x+h)-\gamma(x)}{h}\leqq f(x).$$

dzającą się, podobnie jak nierówność (56) dla wszelkiego

$$a < x < b)$$

$$\liminf_{h=\pm 0} \frac{\beta_0(x+h)-\beta_0(x)}{h} \geqq 1-f(x). \tag{56bis}$$

Dla funkcyi $\gamma(x)$, określonej przez wzór (51), będzie oczywiście:

$$\limsup_{h=\pm 0} \frac{\gamma(x+h)-\gamma(x)}{h} = 1 - \liminf_{h=\pm 0} \frac{\beta_0(x+h)-\beta_0(x)}{h}$$

nierówność (56bis) można więc przekształcić, nadając jej postać

$$\limsup_{h=\pm 0} \frac{\gamma(x+h)-\gamma(x)}{h} \leqq f(x). \tag{58}$$

Przez ustalenie wzorów (56) i (58) wykazaliśmy, iż funkcye $\beta_1(x)$ i $\gamma(x)$ spełniają warunki, zawarte w drugiej części naszego określenia majoranty i minoraty.

Pozostają do udowodnienia nierówności części 1-ej.

Dowód nie przedstawia trudności.

Wystarczy zauważyć, że część zbioru E_1, zawarta w przedziale $(x, x+h)$, ma miarę równą

$$\int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

i że daje się pokryć układem przedziałów[1]:

$B_1^{(1)}(x+h)-B_1^{(1)}(x)$; $B_2^{(1)}(x+h)-B_2^{(1)}(x)$; ...; $B_k^{(1)}(x+h)-B_k^{(1)}(x)$; ...

będzie więc

$$(\text{dla } a \leqq x < x+h < b)$$

$$\int_x^{x+h} f(t)\,dt \leqq \sum_{k=1}^{k=\infty} [B_k^{(1)}(x+h)-B_k^{(1)}(x)],$$

t. zn. (por. wzór (52)):

$$\int_x^{x+h} f(t)\,dt \leqq \beta_1(x+h)-\beta_1(x). \tag{59}$$

[1]) Definicya przedziałów $B_k^{(1)}(x)$ była podana na str. 37.

Jeżeli w rozumowaniu powyższem zastąpimy odpowiednio E_1 przez E_0, $B_k^{(1)}(x)$ przez $B_k^{(0)}(x)$, $\beta_1(x)$ przez $\beta_0(x)$, $f(x)$ przez $1-f(x)$, otrzymamy nierówność:

$$\int_x^{x+h} [1-f(t)]\,dt \leqq \beta_0(x+h)-\beta_0(x).$$

Nierówności tej możemy nadać postać następującą:

$$h-[\beta_0(x+h)-\beta_0(x)] \leqq \int_x^{x+h} f(t)\,dt;$$

dla funkcyi $\gamma(x)$, określonej przez wzór (51), będzie oczywiście:

$$\gamma(x+h)-\gamma(x) = h-[\beta_0(x+h)-\beta_0(x)].$$

Zestawiając dwa ostatnie wzory, otrzymujemy nierówność (prawdziwą dla wszelkiego $a \leqq x < x+h \leqq b$)

$$\gamma(x+h)-\gamma(x) \leqq \int_x^{x+h} f(t)\,dt. \tag{60}$$

Kładziemy

$$\delta_1(x) = \beta_1(x) - \int_a^x f(t)\,dt,$$

$$\delta_0(x) = \int_a^x f(t)\,dt - \gamma(x).$$

Podług wzorów (59) i (60) będzie dla wszelkiego

$$a \leqq x < x+h \leqq b,$$

$$\delta_1(x+h)-\delta_1(x) \geqq 0,$$

$$\delta_0(x+h)-\delta_0(x) \geqq 0.$$

$\delta_1(x)$ i $\delta_0(x)$ są więc funkcyami niemalejącemi: dla wszelkiego $a < x < b$ będzie

$$\delta_1(a) \leqq \delta_1(x) \leqq \delta_1(b), \tag{61}$$

$$\delta_0(a) \leqq \delta_0(x) \leqq \delta_0(b); \tag{62}$$

podług wzoru (50) będzie:

$$\delta_1(b) = \alpha_1 - \int_a^b f(t)\,dt = \alpha_1 - e_1. \tag{63}$$

Ze wzorów (50) i (51) otrzymamy

$$\delta_0(b) = \int_a^b f(t)\,dt - (b-a) + \alpha_0 = e_1 + \alpha_0 - (b-a);$$

podług wzoru (41)

$$e_1 = b - a - e_0,$$

będzie więc:

$$\delta_0(b) = \alpha_0 - e_0. \tag{64}$$

Zestawiając równość (63) z nierównością (44), otrzymujemy:

$$\delta_1(b) < \frac{\varepsilon}{2}; \tag{65}$$

podobnie, ze wzorów (64) i (45) otrzymamy:

$$\delta_0(b) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{66}$$

Oczywiście będzie:

$$\delta_1(a) = \delta_0(a) = 0. \tag{67}$$

Zestawiając (61), (65) i (67), otrzymamy:

$$0 \leqq \delta_1(x) \leqq \frac{\varepsilon}{2},$$

czyli

$$0 \leqq \beta_1(x) - \int_a^x f(t)\,dt \leqq \frac{\varepsilon}{2} \tag{68}$$

Podobnie ze wzorów (62), (66) i (67) znajdziemy:

$$0 \leqq \delta_0(x) \leqq \frac{\varepsilon}{2},$$

czyli

$$0 \leqq \int_a^x f(t)\,dt - \gamma(x) \leqq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{69}$$

Dzięki ustaleniu nierówności (56), (58), (68) i (69) możemy uważać funkcye ciągłe $\beta_1(x)$ i $\gamma(x)$ za majorantę i minorantę, odpowiadające liczbie ε i funkcyi $f(x)$ c. b. d. d.

B) Przypadek ogólniejszy: $f(x)$ jest funkcyą całkowalną nieujemną w przedziale (a, b).

Zakładamy, że dla wszelkiego $a \leqq x \leqq b$, $f(x) \geqq 0$ i że $f(x)$ jest funkcyą całkowalną.

Niechaj

$$l_1,\ l_2, \ldots,\ l_n \ldots \tag{70}$$

będzie ciągiem liczb dodatnich rosnących bez granic tak dobranym, aby dla wszelkiego naturalnego n było

$$l_{n+1} - l_n < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}. \tag{71}$$

Ustaliwszy ciąg (70), możemy łatwo zbudować malejący ciąg liczb dodatnich

$$\eta_1,\ \eta_2 \ldots\ \eta_n, \tag{72}$$

czyniący zadość warunkom następującym:

a) szeregi

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \eta_n \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{n=\infty} l_n \eta_n$$

są zbieżne.

b) zachodzą nierówności:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} l_n \eta_n < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{73}$$

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \eta_n < \frac{\varepsilon(b-a)}{3}. \tag{74}$$

Nazwijmy Z_p zbiór wartości x, dla których zachodzi nierówność

$$l_{p-1} \leqq f(x) < l_p$$

(przyjmujemy $l_0 = 0$).

Niechaj z_p będzie miarą zbioru Z_p; oznaczmy przez $\psi_p(x)$ funkcyę, określoną w sposób następujący:

$$\psi_p(x) = 1, \quad \text{gdy } x \text{ należy do } Z_p;$$
$$\psi_p(x) = 0, \quad \text{gdy } x \text{ nie należy do } Z_p.$$

Oczywiście będzie dla wszelkiego $a \leqq x \leqq b$ i wszelkiego naturalnego p:

$$0 \leqq \int_a^x \psi_p(t)\,dt \leqq z_p. \tag{75}$$

Z założenia całkowalności funkcyi $f(x)$ wynika zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} l_n z_n; \tag{76}$$

możemy znaleść taką liczbę całkowitą q, iżby było

$$\sum_{n=q+1}^{n=\infty} l_n z_u < \frac{\varepsilon}{6}; \tag{77}$$

ze względu na nierówność (75) będzie a fortiori dla wszelkiego

$$a \leqq x \leqq b;$$

$$\sum_{n=q+1}^{n=\infty} l_n \int_a^x \psi_n(t)\,dt < \frac{\varepsilon}{6}. \tag{78}$$

Funkcye $\psi_p(x)$ przybierają tylko dwie wartości: zero i jedność; w myśl wyłożonego pod A potrafimy zbudować dla nich majoranty i minoranty.

Niechaj $\beta_p(x)$ i $\gamma_p(x)$ będą majorantą i minorantą, odpowiadającemi liczbie η_p i funkcyi $\psi_p(x)$:

$$\beta_p(x) = M_{\eta_p,\,\psi_p}(x),$$

$$\gamma_p(x) = m_{\eta_p,\,\psi_p}(x);$$

kładziemy

$$G(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} l_n \beta_n(x), \tag{79}$$

$$D(x) = \sum_{n=1}^{n=q} l_{n-1} \gamma_n(x). \tag{80}$$

Szereg (79), jak to wykażemy za chwilę, jest zbieżny (nawet jednostajnie) dla wszelkiego $a \leqq x \leqq b$.

We wzorze (80) występuje tylko suma skończonej liczby wyrazów. Liczba q jest scharakteryzowana przez nierówność (77).

Wykażemy, że funkcye $G(x)$ i $D(x)$ są majorantą i minorantą, odpowiadającemi liczbie ε i funkcyi $f(x)$.

Podług określenia funkcyi $\beta_n(x)$ będzie:

$$\int_a^x \psi_n(t)\,dt \leqq \beta_n(x) \leqq \int_a^x \psi_n(t)\,dt + \eta_n. \tag{81}$$

Ze względu na nierówność (75) i zbieżność szeregu (76) szereg $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty} l_n \int\limits_a^x \psi_n(t)\,dt$ jest zbieżny; szereg $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty} l_n \eta_n$ jest zbieżny z założenia, przeto ze względu na wzór (81) szereg (79) jest zbieżny. Ze względu na wzory (79), (81) i (73) będzie:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} l_n \int_a^x \psi_n(t)\,dt \leqq G(x) \leqq \sum_{n=1}^{n=\infty} l_n \int_a^x \psi_n(t)\,dt + \frac{\varepsilon}{3}. \tag{82}$$

Bezpośrednio w definicyi całki Lebesgue'a zawarte są nierówności

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} l_{n-1} \int_a^x \psi_n(t)\,dt \leqq \int_a^x f(t)\,dt \leqq \sum_{n=1}^{n=\infty} l_n \int_a^x \psi_n(t)\,dt. \tag{83}$$

Różnica pomiędzy trzecią i pierwszą stroną wzoru (83)

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} (l_n - l_{n-1}) \int_a^x \psi_n(t)\,dt$$

nie przekracza, podług nierówności (71) i (75), wartości wyrażenia:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\varepsilon}{3(b-a)} z_n = \frac{\varepsilon}{3(b-a)}(b-a) = \frac{\varepsilon}{3}.$$

Z nierówności (83) możemy więc wnioskować, że będzie:

$$0 \leqq \int_a^x f(t)\,dt - \sum_{n=1}^{n=\infty} l_{n-1} \int_a^x \psi_n(t)\,dt \leqq \frac{\varepsilon}{3}, \tag{84}$$

$$0 \leqq \sum_{n=1}^{n=\infty} l_n \int_a^x \psi_n(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \leqq \frac{\varepsilon}{3}. \tag{85}$$

Zestawiając wzory (85) i (82), otrzymujemy

$$\int_a^x f(t)\,dt \leqq G(x) \leqq \int_a^x f(t)\,dt + \frac{2}{3}\varepsilon. \tag{86}$$

Podług określenia funkcyi $\gamma_n(x)$ będzie:

$$\int_a^x \psi_n(t)\,dt - \eta_n \leqq \gamma_n(x) \leqq \int_a^x \psi_n(t)\,dt, \tag{87}$$

skąd ze względu na wzór (80) i nierówność (73) wynika:

$$\sum_{n=1}^{n=q} l_{n-1} \int_a^x \psi_n(t)\,dt - \frac{\varepsilon}{3} < D(x) \leqq \sum_{n=1}^{n=q} l_{n-1} \int_a^x \psi_n(t)\,dt. \tag{88}$$

Zestawiając nierówności (84) i (78), otrzymamy:

$$\int_a^x f(t)\,dt - \frac{\varepsilon}{3} - \frac{\varepsilon}{6} \leqq \sum_{n=1}^{n=q} l_{n-1} \int_a^x \psi_n(t)\,dt \leqq \int_a^x f(t)\,dt; \tag{89}$$

przez zestawienie nierówności (88) i (89) otrzymamy wreszcie

$$\int_a^x f(t)\,dt - \frac{5}{6}\varepsilon < D(x) \leqq \int_a^x f(t)\,dt. \tag{90}$$

Wzory (86) i (90) okazują, że funkcye $G(x)$ i $D(x)$ spełniają jeden z warunków, wymaganych od majoranty i minoranty (odpowiadających liczbie ε i funkcyi $f(x)$).

Okażemy, że spełniają również i drugi. Przypominamy, iż obecnie używamy nieco odmiennych oznaczeń, niż pod A. Funkcya, którą obecnie nazywamy $\beta_n(x)$, występowała pod A jako $\beta_1(x)$; $\gamma_n(x)$ jako $\gamma(x)$; zbiór Z_n jako zbiór E_1 (funkcya, którą obecnie nazywamy $\psi_n(x)$, występowała pod A poprostu jako $f(x)$).

Wzór (56) przybierze obecnie postać

$$\liminf_{h=\pm 0} \frac{\beta_n(x+h) - \beta_n(x)}{h} \geqq \psi_n(x) \tag{91}$$

dla wszelkiego

$$a < x < b;$$

wzór (58) przybierze postać [1]:

[1]) Powtarzając uwagę zrobioną w odnośnikach do str. 39, możemy do każdej wartości x dobrać liczbę dodatnią $h_n^{(x)}$ taką, iżby dla $|h| \leqq h_n^{(x)}$ było

$$\frac{\gamma_n(x+h) - \gamma_n(x)}{h} \leqq \psi_n(x). \tag{92bis}$$

$$\limsup_{h=\pm 0} \frac{\gamma_n(x+h) - \gamma_n(x)}{h} \leqq \psi_n(x) \tag{92}$$

dla wszelkiego

$$a < x < b;$$

wreszcie wzór (57) przybierze postać:

$$\frac{\beta_n(x+h) - \beta_n(x)}{h} \geqq 0 \tag{93}$$

dla wszelkiego $a < x < b$ i wszelkiego $a - x \leqq h \leqq b - x$.

Ze względu na określenie (79) i nierówność (93) będziemy mogli napisać dla wszelkiego naturalnego n wszelkiego $a < x < b$ i wszelkiego $a - x \leqq h \leqq b - x$ (należy pamiętać przytem, że wszystkie liczby $l_1, l_2 \ldots l_n \ldots$ są dodatnie)

$$\frac{G(x+h) - G(x)}{h} \geqq l_n \frac{\beta_n(x+h) - \beta_n(x)}{h}, \tag{94}$$

skąd, ze względu na (91) otrzymujemy:

$$\liminf_{h=\pm 0} \frac{G(x+h) - G(x)}{h} \geqq l_n \psi_n(x). \tag{94bis}$$

Dla wszelkiego punktu zbioru Z_n będzie:

$$\psi_n(x) = 1; \qquad f(x) < l_n,$$

z nierówności (94bis) wynika więc nierówność

$$\liminf_{h=\pm 0} \frac{G(x+h) - G(x)}{h} > f(x). \tag{95}$$

Nierówność powyższa zachodzi we wszystkich punktach przedziału (a, b), dla których $f(x)$ przybiera wartość skończoną. Istotnie: każdy z takich punktów należy do jednego ze zbiorów

$$Z_1, \quad Z_2 \ldots \quad Z_n, \ldots \tag{96}$$

zaś nierówność (95), nie zawierająca n, sprawdza się we wszystkich zbiorach układu (96).

Zajmiemy się teraz funkcyą $D(x)$ i funkcyami $\gamma_n(x)$. Podług wzoru (92) dla wszelkiego punktu x, nie należącego do Z_p, będzie:

$$\limsup_{h=\pm 0} \frac{\gamma_p(x+h) - \gamma_p(x)}{h} \leqq 0 \tag{97}$$

(bo, gdy x nie należy do Z_p, będzie $\psi_p(x) = 0$).

Na zasadzie nierówności podanej na str. 39 w 2-im odnośniku możemy nawet twierdzić, iż do każdej naturalnej wartości wskaźnika n różnej od m,

$$n \neq m,$$

i do każdej wartości x należącej do Z_m można dobrać liczbę dodatnią h_n^x taką, iżby dla

$$|h| \leqq h_n^{(x)}$$

było[2]

$$\frac{\gamma_n(x+h) - \gamma_n(x)}{h} \leqq 0.$$

Założmy, że x należy do Z_m

(co oznacza się przez $x \subset Z_m$);

oznaczmy przez $k(x)$ najmniejszą z pośród liczb $h_n(x)$, gdy n przebiega wszystkie różne od m wartości naturalne, nie przekraczające[1] q

(gdy $m \leqq q$, $k(x)$ będzie najmniejszą z pośród $q-1$ liczb

$$h_1(x),\ h_2(x) \ldots\ h_{m-1}(x),\ h_{m+1}(x) \ldots\ h_q(x);$$

gdy $m > q$, $k(x)$ będzie najmniejszą z pośród q liczb

$$h_1(x),\ h_2(x) \ldots\ h_p(x) \ldots\ h_q(x)).$$

Gdy

$$x \subset Z_m \ (x \text{ należy do } Z_m), \quad |h| \leqq k(x); \quad n \neq m \quad \text{i} \quad n \leqq q,$$

będzie

$$\frac{\gamma_n(x+h) - \gamma_n(x)}{h} \leqq 0. \tag{99}$$

Z określenia (80) i nierówności (99) wynika,[3] gdy

$$x \subset Z_m, \quad |h| \leqq k(x) \quad \text{i} \quad m \leqq q,$$

$$\frac{D(x+h) - D(x)}{h} \leqq l_{m-1} \frac{\gamma_m(x+h) - \gamma_m(x)}{h} \tag{100}$$

[1]) Liczba q występuje w nierówności (77) i określeniu (80).

[2]) Patrz nierówność (92bis) (w odnośniku na str. 46).

[3]) Podług określenia (80) będzie w każdym razie

$$\frac{D(x+h) - D(x)}{h} = \sum_{n=1}^{n=q} l_{n-1} \frac{\gamma_n(x+h) - \gamma_n(x)}{h} \tag{D}$$

gdy $x \subset Z_m$, $|h| \leqq k(x)$ i $m \leqq q$ wszystkie składniki sumy (D), prócz m-tego, są niedodatnie — wynika stąd nierówność (100); gdy $x \subset Z_m$, $|h| \leqq k(x)$ i $m > q$, to wszystkie bez wyjątku składniki sumy (D) są niedodatnie — otrzymujemy stąd nierówność (101).

gdy zaś

$$x \subset Z_m, \quad |h| \leqq k(x) \quad \text{i} \quad m > q,$$

będzie:

$$\frac{D(x+h) - D(x)}{h} \leqq 0, \tag{101}$$

Zestawiając nierówności (92) i (100), otrzymujemy:

dla $\qquad x \subset Z_m \quad \text{i} \quad m \leqq q$

$$\limsup_{h=+0} \frac{D(x+h) - D(x)}{h} \leqq l_{m-1}\psi_m(x); \tag{100bis}$$

wnioskiem z nierówności (92) i (101)

dla $\qquad x \subset Z_m \quad \text{i} \quad m > q$

będzie:

$$\limsup_{h=\pm 0} \frac{D(x+h) - D(x)}{h} \leqq 0. \tag{101bis}$$

Dla $x \subset Z_m$ zachodzą związki

$$\psi_m(x) = 1; \qquad 0 \leqq l_{m-1} \leqq f(x);$$

przeto, ze względu na (100bis) i (101bis) będzie:

$$\limsup_{h=\pm 0} \frac{D(x+h) - D(x)}{h} \leqq f(x). \tag{102}$$

Wzór (102) został udowodniony dla $x \subset Z_m$ zarówno, gdy $m \leqq q$, jakoteż gdy $m > q$.

Powtarzając uwagi zrobione o wzorze (95), przekonamy się o prawdziwości wzoru (102) dla wszelkiego punktu przedziału (a, b), dla którego $f(x)$ przybiera wartość skończoną.

(Oczywiście gdy $f(x) = +\infty$, wzór (102) jest banalny; — zachodzi on więc dla wszelkiego $a < x < b$).

Po ustaleniu nierówności (86), (90), (95) i (102) możemy uważać $G(x)$ i $D(x)$ odpowiednio za majorantę i minorantę, odpowiadające liczbie ε i funkcyi $f(x)$. c. b. d. d.

C) Przypadek ogólny: $f(x)$ jest jakąkolwiek funkcyą całkowalną w przedziale (a, b).

Zakładamy, że $f(x)$, a co zatem idzie i $|f(x)|$, jest funkcyą całkowalną podług Lebesgue'a w przedziale (a, b). Oznaczmy przez $f_1(x)$ funkcyę równą $f(x)$, gdy $f(x) > 0$ i równą zeru, gdy $f(x) \leqq 0$; podobnie oznaczymy przez $f_2(x)$ funkcyę równą $-f(x)$ gdy $f(x) < 0$ i równą zeru, gdy $f(x) \geqq 0$.

Będzie:

$$f_1(x) = f(x) \qquad f_2(x) = 0, \qquad \text{gdy} \quad f(x) \geqq 0;$$

$$f_1(x) = 0 \qquad f_2(x) = -f(x) \quad „ \quad f(x) < 0.$$

Oczywiście dla wszelkiego $a \leqq x \leqq b$ będzie:

$$f_1(x) \geqq 0, \qquad f_2(x) \geqq 0$$

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x). \tag{103}$$

Funkcye $f_1(x)$ i $f_2(x)$ są całkowalne i nieujemne; podług wyłożonego pod B umiemy zbudować takie funkcye ciągłe $G_1(x)$, $D_2(x)$ i $G_2(x)$, $D_2(x)$, aby było:

$$\liminf_{h=+0} \frac{G_i(x+h) - G_i(x)}{h} \geqq f_i(x), \tag{104}$$

$$\limsup_{h=\pm 0} \frac{D_i(x+h) - D_i(x)}{h} \leqq f_i(x), \tag{105}$$

$$0 \leqq G_i(x) - \int_a^x f_i(t)\,dt \leqq \frac{\varepsilon}{2}, \tag{106}$$

$$0 \leqq \int_a^x f_i(t)\,dt - D_i(x) \leqq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{107}$$

$$(i = 1, 2).$$

Wzory (104) i (105) mają być prawdziwe dla wszelkiej wartości x, należącej do przedziału (a, b), dla której $f(x)$ przybiera wartość skończoną; wzory (106) i (107) dla wszelkiego $a \leqq x \leqq b$.

Kładziemy

$$M(x) = G_1(x) - D_2(x),$$

$$m(x) = D_1(x) - G_2(x),$$

oczywiście będzie:

$$\liminf_{h=\pm 0} \frac{M(x+h) - M(x)}{h} \geqq \liminf_{h=\pm 0} \frac{G_1(x+h) - G_1(x)}{h}$$

$$- \limsup_{h=\pm 0} \frac{D_2(x+h) - D_2(x)}{h},$$

skąd ze względu na nierówności (104) i (105) otrzymujemy:

$$\liminf_{h=\pm 0} \frac{M(x+h) - M(x)}{h} \geqq f_1(x) - f_2(x),$$

czyli, ze względu na tożsamość (103), będzie:

$$\liminf_{h=\pm 0} \frac{M(x+h) - M(x)}{h} \geqq f(x). \tag{108}$$

Podobnie, z określenia funkcyi $m(x)$ wynika:

$$\limsup_{h=\pm 0} \frac{m(x+h) - m(x)}{h} \leqq \limsup \frac{D_1(x+h) - D_1(x)}{h}$$

$$- \liminf_{h=\pm 0} \frac{G_2(x+h) - G_2(x)}{h},$$

skąd, przy pomocy wzorów (104) i (105), wyprowadzamy:

$$\limsup_{h=\pm 0} \frac{m(x+h) - m(x)}{h} \leqq f_1(x) - f_2(x),$$

czyli (przy uwzględnieniu związku (103))

$$\limsup_{h=\pm 0} \frac{m(x+h) - m(x)}{h} \leqq f(x). \tag{109}$$

Wreszcie, zestawiając określenie funkcyi $M(x)$ i $m(x)$ z nierównościami (106) i (107) i związkiem (103), otrzymujemy:

$$\int_a^x f(t)\,dt - \varepsilon \leqq m(x) \leqq \int_a^x f(t)\,dt \leqq M(x) \leqq \int_a^x f(t)\,dt + \varepsilon. \tag{110}$$

Nierówności (108) i (109) zachodzą wszędzie tam w przedziale (a, b), gdzie $f(x)$ przybiera wartość skończoną; nierówności (110) sprawdzają się dla wszelkiego $a \leqq x \leqq b$.

Zbudowawszy funkcye ciągłe $M(x)$ i $m(x)$, czyniące zadość nierównościom (108), (109) i (110), udowodniliśmy istnienie majoranty i minoranty i odpowiadających dowolnie obranej liczbie dodatniej ε i dowolnej funkcyi całkowalnej $f(x)$. c. b. d. d.

Uwaga. Oczywiście będzie $M(a) = m(a) = 0$.

X. Twierdzenie de la Vallée Poussina, dotyczące całkowania drugiej pochodnej uogólnionej.

Jeżeli $F(x)$ jest funkcyą ciągłą i gładką (t. zn. spełniającą warunek

$$\lim_{h=0} \frac{F(x+h)+F(x-h)-2F(x)}{h} = 0)$$

wszędzie w przedziaie (a, b), $f(x)$ zaś funkcyą w tym przedziale całkowalną i niemal wszędzie skończoną, i jeśli niemal wszędzie w przedziale (a, b) zachodzą nierówności

$$\liminf_{h=0} \frac{F(x+h)+F(x-h)-2F(x)}{h^2} \leqq f(x)$$

$$\leqq \limsup_{h=0} \frac{F(x+h)+F(x-h)-2F(x)}{h^2},$$

to dla wszelkiego $a < x < b$ zachodzi związek

$$F(x) = \int_a^x dy \int_a^y f(t)\,dt + Ax + B,$$

gdzie A i B oznaczają wielkości stałe.

(Twierdzenie to zostało ogłoszone w paryskich „Comptes rendus de l'Ac. des Sc.", tom. 155 str. 951 i nast.; znajduje się ono również i w cytowanem 3-im wydaniu 1-go tomu „Cours d'analyse" de la Vallée Poussin a).

Dowód. Obieramy dowolnie liczbę dodatnią ε.

Niechaj $M(x)$ i $m(x)$ będą majorantą i minorantą, odpowiadającemi liczbie ε i funkcyi $f(x)$. Przy tych oznaczeniach sprawdzają się nierówności (108), (109) i (110). Możemy M i m tak dobrać, aby było $M(a) = m(a) = 0$.

Kładziemy

$$G(x) = \int_a^x M(t)\,dt; \qquad D(x) = \int_a^x m(t)\,dt;$$

ze względu na ciągłość funkcyi $M(x)$ i $m(x)$ będzie dla $a < x < b$:

$$G'(x) = M(x); \qquad D'(x) = m(x). \tag{111}$$

Z twierdzenia § VIII oraz wzorów (108) i (111) wynika dla tych punktów przedziału rozważanego, w których $f(x)$ przybiera wartość skończoną (a więc dla niemal wszystkich wartości x)

$$\liminf_{h=0} \frac{G(x+h)+G(x-h)-2G(x)}{h^2} \geqq f(x). \tag{112}$$

Kładziemy

$$\delta(x) = G(x) - F(x);$$

łatwo przekonać się [1], że będzie:

$$\begin{aligned} &\limsup_{h=0} \frac{\delta(x+h)+\delta(x-h)-2\delta(x)}{h^2} \\ &\geqq \liminf_{h=0} \frac{G(x+h)+G(x-h)-2G(x)}{h^2} \\ &-\liminf_{h=0} \frac{F(x+h)+F(x-h)-2F(x)}{h^2}. \end{aligned} \tag{113}$$

Z założenia, głoszącego, że niemal wszędzie zachodzi nierówność

$$\liminf_{h=0} \frac{F(x+h)+F(x-h)-2F(x)}{h^2} \leqq f(x),$$

oraz z nierówności (112) i (113) wynika sprawdzająca się niemal wszędzie nierówność

$$\limsup_{h=0} \frac{\delta(x+h)+\delta(x-h)-2\delta(x)}{h^2} \geqq 0;$$

---

[1]) Istotnie: oczywistem jest, że dla wszelkiego h będzie:

$$\frac{\delta(x+h)+\delta(x-h)-2\delta(x)}{h^2} = \frac{G(x+h)+G(x-h)-2G(x)}{h^2} - \frac{F(x+h)+F(x-h)-2F(x)}{h^2}.$$

Oznaczmy przez $h_1, h_2 \ldots h_p \ldots$ ciąg wielkości, dążących do zera równocześnie z $\frac{1}{p}$ tak dobrany, aby było

$$\lim_{p=\infty} \frac{F(x+h_p)+F(x-h_p)-2F(x)}{h_p^2} = \liminf_{h=0} \frac{F(x+h)+F(x-h)-2F(x)}{h^2}, \tag{G}$$

będzie oczywiście:

$$\begin{aligned} \limsup_{h=0} \frac{\delta(x+h)+\delta(x-h)-2\delta(x)}{h^2} &\geqq \limsup_{p=\infty} \frac{\delta(x+h_p)+\delta(x-h_p)-2\delta(x)}{h_p^2} \\ &= \limsup_{p=\infty} \frac{G(x+h_p)+G(x-h_p)-2G(x)}{h_p^2} - \lim_{p=\infty} \frac{F(x+h_p)+F(x-h_p)-2F(x)}{h_p^2} \\ &\geqq \liminf_{h=0} \frac{G(x+h)+G(x-h)-2G(x)}{h^2} - \lim_{p=\infty} \frac{F(x+h_p)+F(x-h_p)-2F(x)}{h_p^2}, \end{aligned}$$

skąd ze względu na równość (G) otrzymujemy wzór (113).

$\delta(x)$ jest oczywiście funkcyą gładką (bo $G(x)$ jest funkcyą gładką, jako funkcya posiadająca pochodną, zaś $F(x)$ jest gładką z założenia), więc podług twierdzeń §§ IV i V $\delta'(x)$ istnieje dla wszelkiego $a < x < b$, jest funkcyą ciągłą i niemalejącą Ze względu na związek

$$F(x) = G(x) - \delta(x)$$

wynika stąd istnienie i ciągłość pochodnej $F'(x)$.

Będzie więc (dla $a < x < b$)

$$\delta'(x) = G'(x) - F'(x) = M(x) - F'(x). \tag{114}$$

Podług twierdzenia § V (uwaga dodatkowa) istnieje granica $\lim\limits_{h=+0} \delta'(a+h)$; nazwiemy ją $-A$; $\delta'(x)$ jest funkcyą niemalejącą, więc dla $a<x<b$ będzie:

$$-A \leqq \delta'(x). \tag{115}$$

Ze względu na (114) będzie (gdyż $M(a) = 0$):

$$A = \lim_{h=+0} F'(a+h). \tag{116}$$

Zestawiając wzory (114) i (115), otrzymujemy (dla $a < x < b$):

$$-A + F'(x) \leqq M(x). \tag{117}$$

Wyprowadzimy teraz analogiczną nierówność dla minoranty $m(x)$. Rozumujemy w sposób najzupełniej analogiczny do powyższego.

Z twierdzenia § VIII oraz ze wzorów (109) i (111) wyprowadzamy nierówność następującą:

$$\limsup_{h=0} \frac{D(x+h) + D(x-h) - 2D(x)}{h^2} \leqq f(x). \tag{118}$$

Nierówność ta sprawdza się w tych punktach przedziału (a, b), w których $f(x)$ przybiera wartość skończoną, t. j. niemal wszędzie (jak głosi założenie).

Kładziemy: $\delta_1(x) = F(x) - D(x)$

łatwo się przekonać, [1] że będzie:

[1]) Istotnie: oznaczmy przez $h_1, h_2 \ldots h_n \ldots$ ciąg wielkości tak dobranych, aby było: $\lim\limits_{p=\infty} h_p = 0$ oraz

$$\lim_{p=\infty} \frac{F(p+h_p) + F(x-h_p) - 2F(x)}{h_x^2} = \limsup_{h=0} \frac{F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)}{h^2} \tag{D}$$

będzie oczywiście

$$\begin{aligned} \limsup_{h=0} & \frac{\delta_1(x+h) + \delta_1(x-h) - 2\delta_1(x)}{h^2} \\ & \geqq \limsup_{h=0} \frac{F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)}{h^2} \\ & - \limsup_{h=0} \frac{D(x+h) + D(x-h) - 2D(x)}{h^2}. \end{aligned} \tag{119}$$

Z założenia, podług którego ma być niemal wszędzie

$$\limsup_{h=0} \frac{F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)}{h^2} \geqq f(x),$$

oraz z nierówności (118) i (119) wynika dla niemal wszystkich punktów x przedziału (a, b):

$$\limsup_{h=0} \frac{\delta_1(x+h) + \delta_1(x-h) - 2\delta_1(x)}{h^2} \geqq 0. \tag{120}$$

Oczywiście będzie (ze względu na wzór (111)):

$$\delta_1'(x) = F'(x) - m(x) \tag{121}$$

skąd znowu

$$\lim_{h=+0} \delta_1'(a+h) = \lim_{h=+0} F'(a+h) = A. \tag{122}$$

Podług twierdzeń §§ IV i V ze wzorów (120) i (122) wynika dla $a < x < b$:

$$A < \delta_1'(x) \tag{123}$$

(to samo rozumowanie, co przy ustalaniu nierówności (115)).

Ze wzorów (121) i (123) wynika

(dla $a < x < b$):

$$m(x) \leqq -A + F'(x). \tag{124}$$

$$\limsup_{h=0} \frac{\delta_1(x+h) + \delta_1(x-h) - 2\delta_1(x)}{h^2} \geqq \limsup_{p=\infty} \frac{\delta_1(x+h_p) + \delta_1(x-h_p) - 2\delta_1(x)}{h_p^2} \tag{E}$$

$$= \lim_{p=\infty} \frac{F(x+h_p) + F(x-h_p) - 2F(x)}{h_p^2} - \liminf_{p=\infty} \frac{D(x+h_p) + D(x-h_p) - 2D(x)}{h_p^2}$$

oczywiście będzie:

$$\liminf_{p=\infty} \frac{D(x+h_p) + D(x-h_p) - 2D(x)}{h_p^2} \leqq \limsup_{h=0} \frac{D(x+h) + D(x-h) - 2D(x)}{h^2} \tag{F}$$

Zestawiając wzory (D), (E), (F) otrzymujemy bezpośrednio nierówność (119).

Zestawiając nierówności (110), (117) i (124) otrzymujemy:

$$\int_a^x f(t)\,dt - \varepsilon \leqq -A + F'(x) \leqq \int_a^x f(t)\,dt + \varepsilon. \tag{125}$$

Wzór (125) jest prawdziwy dla wszelkiego $\varepsilon > 0$, a więc musi być

$$-A + F'(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \tag{126}$$

czyli

$$F'(x) = A + \int_a^x f(t)\,dt. \tag{127}$$

$F'(x)$ jako suma funkcyj ciągłych $(\delta(x) + M(x)$ albo $\delta_1(x) + m(x))$ jest funkcyą ciągłą, więc (kładąc $B = F(a)$)

$$F(x) = \int_a^x F'(y)\,dy + B. \tag{128}$$

Z równości (127) i (128) wynika

$$F(x) = \int_a^x dy \int_a^y f(t)\,dt + Ax + B,$$

gdzie B (podobnie, jak A) oznacza stałą. c. b. d. d.

Szeregi trygonometryczne zbieżne i szeregi Fouriera.

XI. Lemmat. Jeżeli $f(x)$ jest funkcyą całkowalną i niemal wszędzie skończoną w przedziale $(0, 2\pi)$, $F(x)$ zaś funkcyą, spełniającą warunki

$$\lim_{n=\infty} n^2 \int_0^{2\pi} F(x)\cos nx\,dx = \lim_{n=\infty} n^2 \int_0^{2\pi} F(x)\sin nx\,dx = 0, \tag{129}$$

jeżeli nadto dla niemal wszystkich wartości x w przedziale $(0, 2\pi)$ sprawdzają się nierówności

$$\begin{gathered}\liminf_{h=0} \frac{F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)}{h^2} \\ \leqq f(x) \leqq \limsup_{h=0} \frac{F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)}{h^2},\end{gathered} \tag{130}$$

to dla wszelkiego naturalnego n będzie:

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx = -n^2 \int_0^{2\pi} F(x)\cos nx\,dx,$$

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx = -n^2 \int_0^{2\pi} F(x)\sin nx\,dx.$$

Dowód.
Kładziemy: (dla $n = 0, 1, 2\ldots$)

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(x)\cos nx\,dx; \qquad \beta_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(x)\sin nx\,dx. \tag{131}$$

Założenie (129) przybiera postać

$$\lim_{n=\infty} n^2\alpha_n = \lim_{n=\infty} n^2\beta_n = 0. \tag{132}$$

Będzie oczywiście dla $0 \leqq x \leqq 2\pi$:

$$F(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx. \tag{133}$$

Ze względu na założenie (132) szereg (133) jest jednostajnie zbieżny; wyrazy jego są funkcyami ciągłemi i peryodycznemi, więc suma jego jest również ciągłą i peryodyczną. Wynika stąd

$$F(0) = F(2\pi). \tag{134}$$

Podług znanego twierdzenia Riemanna[1] z warunku (132) wynika gładkość funkcyi $F(x)$.

Do ciągłej i gładkiej funkcyi $F(x)$ oraz do spełniającej nierówność (130) funkcyi całkowalnej $f(x)$ stosuje się twierdzenie § X. Podług tego twierdzenia będzie:

$$F(x) = \int_0^x dy \int_0^y f(t)\,dt + Ax + B \tag{135}$$

(A i B oznaczają tu wielkości stałe); nadto podług (128) będzie:

[1] „Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe" § 8, twierdzenie 2-gie.

$$F(x) = \int_0^x F'(y)\,dy + B, \tag{135bis}$$

zaś podług (127)

$$F'(x) = \int_0^x f(t) + A. \tag{136}$$

Przekształcimy wzory (131) przy pomocy całkowania przez części [1]. Podług wzorów (135bis) i (136) będzie:

$$\pi\alpha_n = \int_0^{2\pi} F(x)\cos nx\,dx = \int_0^{2\pi} [F(x) - B]\cos nx\,dx$$

$$= \left[(F(x) - B)\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} F'(x)\frac{\sin nx}{n}\,dx$$

$$= -\frac{1}{n}\int_0^{2\pi} F'(x)\sin nx\,dx = -\frac{1}{n}\int_0^{2\pi}[F'(x) - A]\sin nx\,dx$$

$$= \left[(F'(x) - A)\frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{n^2}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx,$$

czyli

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx = -n^2\alpha_n + K, \tag{137}$$

jeżeli oznaczymy dla krótkości

[1]) Twierdzenie o całkowaniu przez części głosi ogólnie: jeśli $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ są funkcyami całkowalnemi w przedziale danym $(a: b)$; jeśli

$$\Phi(x) = \int_a^x \varphi(t)\,dt; \quad \Psi(x) = \int_a^x \psi(t)\,dt,$$

to dla wszelkiego

$$a \leqq u < v \leqq b$$

będzie

$$\int_u^v \Phi(x)\psi(x)\,dx = \Phi(v)\Psi(v) - \Phi(u)\Psi(u) - \int_u^v \Psi(x)\varphi(x)\,dx. \tag{C}$$

Dowód tego twierdzenia podałem w „Wektorze" (tom VI, Warszawa 1918). Twierdzenie to jest udowodnione i w cytowanym „Cours d'analyse" de la Vallée Poussin'a (Tom I. 3 wydanie).

$$K = \frac{F'(2\pi) - F'(0)}{\pi}.$$

Spółczynniki Fouriera wszelkiej funkcyi całkowalnej dążą do zera (por. np. H. Lebesgue, Leçons sur séries trigonométriques str. 61), więc całka lewej strony wzoru (137) dąży do zera równocześnie z $\frac{1}{n}$; to samo musi się dziać i z prawą stroną tej równości, więc

$$\lim_{n=\infty}[-n^2\alpha_n + K] = 0;$$

Podług wzoru (132) będzie

$$K = \lim_{n=\infty}[-n^2\alpha_n + K].$$

Zestawiając dwa wzory powyższe, otrzymujemy

$$K = 0;$$

wzór (137) upraszcza się więc; będzie:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx = -n^2\alpha_n. \tag{138}$$

Przecałkujmy przez części iloczyn $[F(x) - B] . \sin nx$. Pierwsze całkowanie, dokonane w zastosowaniu wzoru (135bis), wprowadzi wyraz wolny od całek

$$\left[(F(x) - B)\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{2\pi};$$

wyraz ten znika na skutek równości (134). Następne całkowanie, przy uwzględnieniu wzoru (136), daje nam bezpośrednio:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx = -n^2\beta_n. \tag{139}$$

Równości (138) i (139) stanowią właśnie to, czegośmy mieli dowieść.

XII. Twierdzenie de la Vallée Poussin'a o jednoznaczności przedstawienia funkcyi przez szereg trygonometryczny (Comptes rendus Ak. Par., miejsce cytowane w § X).

Jeżeli szereg trygonometryczny niemal wszędzie zbieżny

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \tag{140}$$

ma za sumę funkcyę całkowalną $f(x)$, to szereg ten jest szeregiem Fourier'a (t. zn. zachodą związki

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx\, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx\, dx). \tag{140bis}$$

Dowód. Podług twierdzenia Cantora[1] (w uogólnieniu Lebesgue'a) spółczynniki szeregu trygonometrycznego, zbieżnego w mnogości o mierze dodatniej, dążą do zera. Będzie więc

$$\lim_{n=\infty} a_n = \lim b_n = 0. \tag{141}$$

Kładziemy:

$$F(x) = -\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{a_n}{n^2} \cos nx + \frac{b_n}{n^2} \sin nx. \tag{142}$$

Podług twierdzenia Riemanna (Über die Darstellbarkeit... § 8, twierdzenie 1-e) będzie wszędzie tam, gdzie szereg (140) jest zbieżny, t. j. niemal wszędzie

$$\lim_{h=0} \frac{F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)}{h^2} = f(x) - \frac{a_0}{2}. \tag{143}$$

Do funkcyi $F(x)$ i $f(x) - \frac{a_0}{2}$ możemy zastosować lemmat § XI. Z równości (141) i (142) wynika warunek (129). Warunek (130) sprawdza się w odniesieniu do funkcyi $f(x) - \frac{a_0}{2}$ (zamiast $f(x)$), jak to wynika ze wzoru (143). Będzie więc (szer. 142 jest szer. Fouriera):

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[f(x) - \frac{a_0}{2} \right] \cos nx\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx\, dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[f(x) - \frac{a_0}{2} \right] \sin nx\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx\, dx,$$

c. b. d. d.

[1]) H. Lebesgue, Leçons sur les séries trigonométriques, str. 110.

XIII. Twierdzenie p. Steinhausa[1]) o szeregach trygonometrycznych zbieżnych (nieco uogólnione).

Jeżeli suma $f(x)$ szeregu trygonometrycznego niemal wszędzie zbieżnego

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \tag{140}$$

jest dla zbioru niemal wszystkich wartości x ograniczona od dołu, t. zn. jeśli istnieje wielkość stała $-A$ taka, że niemal wszędzie sprawdza się nierówność

$$f(x) \geqq -A, \tag{144}$$

to szereg trygonometryczny rozważany (140) jest szeregiem Fouriera (t. zn. zachodzą związki (140bis)).

Dowód. Kładziemy:

$$\Phi(x) = \frac{Ax^2}{2} + \frac{a_0}{2} \cdot \frac{x^2}{2} - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{a_n}{n^2} \cos nx + \frac{b_n}{n^2} \sin nx.$$

Podług twierdzenia Riemanna (cytowanego w § poprzednim) będzie niemal wszędzie

$$\lim_{h=0} \frac{\Phi(x+h) + \Phi(x-h) - 2\Phi(x)}{h^2} = f(x) + A. \tag{145}$$

Zestawiając wzory (144) i (145), otrzymujemy niemal wszędzie:

$$\lim_{h=0} \frac{\Phi(x+h) + \Phi(x-h) - 2\Phi(x)}{h^2} \geqq 0. \tag{145bis}$$

Jasne jest (było to omawiane na początku rozumowań § XI), że $\Phi(x)$ jest funkcyą ciągłą i gładką; możemy więc zastosować twierdzenie § VI; podług tego twierdzenia $\Phi''(x)$ istnieje prawie wszędzie i jest funkcyą całkowalną. Podług twierdzenia § VII ze związku (145) wynika równość (wszędzie tam, gdzie $\Phi(x)$ istnieje t. j. prawie wszędzie):

$$\Phi''(x) = f(x) + A.$$

A więc $f(x) + A$, a zatem i $f(x)$ jest funkcyą całkowalną. Przeto, podług twierdzenia § XII szereg (140) jest szeregiem Fouriera. c. b. d. d.

Twierdzenie, równoważne powyższemu. Jeżeli suma szeregu trygonometrycznego niemal wszędzie zbieżnego jest dla zbioru niemal wszyst-

[1]) loc. cit. str. 178 i nast.

kich wartości x ograniczona od góry, to szereg rozważany jest szeregiem Fouriera.

Dowód. Jeżeli zmienimy znak wszystkich spółczynników szeregu, to suma jego zmieni znak; funkcya ograniczona od góry zamieni się na funkcyę ograniczoną od dołu; podług poprzedniego twierdzenia możemy teraz orzec, że szereg rozważany jest szeregiem Fouriera c. b. d. d.

Szeregi sumowalne metodą Poissona.

XIV. Lemmat: Jeżeli wielkości a_n i b_n, dążące do zera równocześnie z $\frac{1}{n}$, t. j. takie, że

$$\lim_{n=\infty} a_n = 0; \quad \lim_{n=\infty} b_n = 0 \tag{146}$$

są związane przez równanie

$$b_n - b_{n+1} = \frac{a_n}{n}, \tag{147}$$

to sprawdzają się nierówności

$$\liminf_{r=1} \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n r^n \leqq \liminf_{r=1} \sum_{n=1}^{n=\infty} b_n r^n \leqq \limsup_{r=1} \sum_{n=1}^{n=\infty} b_n r^n$$

$$\leqq \limsup_{r=1} \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n r^n.$$

Dowód. Kładziemy:

$$f(r) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{a_n}{n} r^n = \sum_{n=1}^{n=\infty} (b_n - b_{n+1}) r^n.$$

Będzie oczywiście dla $|r| < 1$:

$$f(r) = \sum_{n=1}^{n=\infty} b_n r^n - \sum_{n=1}^{n=\infty} b_{n+1} r^n$$

$$= \sum_{n=1}^{n=\infty} b_n r^n - \sum_{n=2}^{n=\infty} b_n r^{n-1} \tag{148}$$

$$= b_1 r - (1-r) \sum_{n=2}^{n=\infty} b_n r^{n-1} = b_1 - (1-r) \sum_{n=1}^{n=\infty} b_n r^{n-1};$$

ze względu na założenia (146) i (147) będzie:

$$f(1) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{a_n}{n} = \sum_{n=1}^{n=\infty} (b_n - b_{n+1}) = b_1. \tag{149}$$

Zestawiając równości (148) i (149), otrzymamy związek

$$f(1) - f(r) = (1-r) \sum_{n=1}^{n=\infty} b_n r^{n-1}. \tag{150}$$

Podług twierdzenia Abela $f(r)$ jest funkcyą ciągłą również dla $r=1$; pochodna $f'(r)$ istnieje oczywiście dla wszelkiego $|r| < 1$; możemy więc zastosować twierdzenie o przyrostach skończonych. Będzie:

$$f(1) - f(r) = (1-r) f'(\rho); \tag{151}$$

ρ oznacza tu pewną wielkość, czyniącą zadość nierówności:

$$r < \rho < 1. \tag{152}$$

Oczywiście będzie:

$$f'(\rho) = \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \rho^{n-1}. \tag{153}$$

Zestawiając równości (150), (151) i (153), otrzymujemy równanie:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \rho^{n-1} = \sum_{n=1}^{n=\infty} b_n r^{n-1}. \tag{154}$$

Ze względu na nierówność (152) ρ dąży do jedności, gdy r dąży do jedności; przeto granice wahań wyrażenia

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \rho^{n-1} \text{ dla } r \longrightarrow 1$$

są nie większe, niż

$$\limsup_{r=1} \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n r^{n-1}$$

i nie mniejsze, niż

$$\liminf_{r=1} \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n r^{n-1}.$$

Ale podług wzoru (154) będzie:

$$\liminf_{r=1} \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \rho^{n-1} = \liminf_{r=1} \sum_{n=1}^{n=\infty} b_n r^{n-1},$$

$$\limsup_{r=1} \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \rho^{n-1} = \limsup_{r=1} \sum_{n=1}^{n=\infty} b_n r^{n-1};$$

więc obie granice wahań wyrażenia $\sum_{n=1}^{n=\infty} b_n r^{n-1}$ (lub, co na jedno wyjdzie, wyrażenia $\sum_{n=1}^{n=\infty} b_n r^n$) dla $r \to 1$ są niewiększe, niż

$$\limsup_{r=1} \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n r^n,$$

i niemniejsze, niż

$$\liminf_{r=1} \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n r^n.$$

c. b. d. d.

XV. Twierdzenie Jeżeli wielkości A_n dążą do zera równocześnie z $\frac{1}{n}$, t. j. jeśli

$$\lim_{n=\infty} A_n = 0, \tag{155}$$

i jeśli obie granice wahań (dolna i górna) wyrażenia

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} A_n r^n \quad \text{dla} \quad r \to 1$$

$$I = \liminf_{r=1} \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n r^n,$$

oraz (156)

$$S = \limsup_{r=1} \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n r^n$$

są skończone, to:

1) szereg

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{A_n}{n} \tag{157}$$

jest zbieżny; skoro oznaczymy przez u_n jego resztę

$$u_n = \sum_{m=n}^{m=\infty} \frac{A_m}{m},$$

to obie granice wahań wyrażenia $\sum_{n=1}^{n=\infty} u_n r^n$ dla $r \to 1$

$$D = \liminf_{r=1} \sum_{n=1}^{n=\infty} u_n r^n,$$

(158)

$$G = \limsup_{r=1} \sum_{n=1}^{n=\infty} u_n r^n$$

są skończone i czynią zadość nierówności

$$I \leqq D \leqq G \leqq S.$$

2) szereg

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \sum_{m=n}^{m=\infty} \frac{A_m}{m^2} \tag{159}$$

jest zbieżny; skoro oznaczymy przez v_n jego resztę

$$v_n = \sum_{m=n}^{m=\infty} \sum_{p=m}^{p=\infty} \frac{A_p}{p^2},$$

to granice wahań wyrażenia $2\sum_{n=2}^{n=\infty} v_n r^n + v_1$ dla $r \to 1$

$$D_1 = 2\liminf_{r=1} \sum_{n=2}^{n=\infty} v_n r^n + v_1,$$

(160)

$$G_1 = 2\limsup_{r=1} \sum_{n=2}^{n=\infty} v_n r^n + v_1$$

czynią zadość nierównościom

$$D_1 \leqq S; \qquad G_1 \geqq I.$$

Uwaga. Nie twierdzimy wcale, że granice wahań (160) są skończone. Rozumowania nasze nie wykluczają bynajmniej możliwości, że $G_1 = +\infty$, lub $D_1 = -\infty$.

Dowód. 1) Kładziemy

$$\varphi(r) = \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n r^{n-1}.$$

Podług założenia funkcya $\varphi(r)$ pozostaje ograniczoną, gdy $r \longrightarrow 1$, jest więc ona całkowalna w przedziale $(0, 1)$.

Z istnienia całki $\int_0^1 \varphi(x)\,dx$ wynika istnienie granicy

$$\lim_{r=1} \int_0^r \varphi(x)\,dx = \lim_{r=1} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{A_n}{n} r^n.$$

Podług twierdzenia p. A. Taubera[1]) istnienie granicy powyższej wraz z założeniem (155) pociąga za sobą zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{A_n}{n}$.

Wielkości u_n istnieją więc, i będzie oczywiście

$$\lim_{n=\infty} u_n = 0; \qquad u_n - u_{n+1} = \frac{A_n}{n}. \tag{161}$$

Ze względu na założenie (155) i związki (161) możemy zastosować lemmat § XIV (kładąc $a_n = A_n$; $b_n = u_n$), otrzymamy

$$I \leqq D \leqq S \leqq G \tag{161bis}$$

c. b. d. d.

2) Kładziemy:

$$w_n = \sum_{m=n}^{m=\infty} \frac{A_m}{m^2}; \tag{162bis}$$

będzie oczywiście:

$$w_n - w_{n+1} = \frac{1}{n} \cdot \frac{A_n}{n}. \tag{162}$$

Z określenia wielkości w_n i z założenia (155) wynika:

$$\lim_{n=\infty} n w_n = 0, \tag{163}$$

więc tembardziej

$$\lim_{n=\infty} w_n = 0 \tag{164}$$

---

[1]) A. Tauber — notatka w „Monatshefte für Mathematik und Physik"; tom **8**; str. 273 - 277 (Wiedeń 1897), albo np. E. Landau — Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie Berlin, 1916 (nakład Springera) str. 40—41.

Ze względu na związki (162) i (164) możemy zastosować lemmat § XIV, kładąc

$$a_n = \frac{A_n}{n}; \qquad b_n = w_n;$$

otrzymujemy związek

$$\liminf_{r=1} \sum_{n=1}^{n=\infty} w_n r^{n-1} = \limsup_{r=1} \sum_{n=1}^{n=\infty} w_n r^{n-1} = \lim_{r=1} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{A_n}{n} r^{n-1} = u_1,$$

czyli

$$\lim_{r=1} \sum_{n=1}^{n=\infty} w_n r^{n-1} = u_1. \tag{165}$$

Podług cytowanego już twierdzenia p. Taubera istnienie granicy (165) wobec związku (163) pociąga za sobą zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{n=\infty} w_n$, t. j. szeregu (159).

Wielkości

$$v_n = \sum_{m=n}^{m=\infty} w_m \tag{166}$$

istnieją więc. Ze względu na wzór (165) będzie oczywiście:

$$v_1 = \sum_{m=1}^{m=\infty} w_m = u_1. \tag{167}$$

Znowu zastosujemy lemmat § XIV; tym razem podstawiamy

$$a_n = \frac{n A_{n+k-1}}{(n+k-1)^2}; \qquad b_n = w_{n+k-1}$$

(k jest tu parametrem, n wskaźnikiem bieżącym).

Założenia (147) i (146) sprawdzają się oczywiście

$$\left(\text{bo } w_{n+k-1} - w_{n+k} = \frac{A_{n+k-1}}{(n+k-1)^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n A_{n+k-1}}{(n+k-1)^2}\right);$$

możemy więc wnioskować, że prawdziwą jest nierówność:

$$\begin{aligned} \liminf_{r=1} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{n A_{n+k-1}}{(n+k-1)^2} r^n &\leqq \sum_{n=1}^{n=\infty} w_{n+k-1} \\ &\leqq \limsup_{r=1} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{n A_{n+k-1}}{(n+k-1)^2} r^n. \end{aligned} \tag{168}$$

Będzie oczywiście

$$\frac{n\,A_{n+k-1}}{(n+k-1)^2} = \frac{A_{n+k-1}}{n+k-1} - (k-1)\frac{A_{n+k-1}}{(n+k-1)^2}. \tag{169}$$

Szereg $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty} \frac{A_{n+k-1}}{n+k-1}$ jest zbieżny naskutek zbieżności szeregu (157) (udowodnionej na początku rozumowań punktu 1-go); zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty} \frac{A_{n+k-1}}{(n+k-1)^2}$ jest oczywista ze względu na założenie (155). Tożsamość (169) pozwala nam przeto stwierdzić zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{n\,A_{n+k-1}}{(n+k-1)^2}$$

i wyprowadzić związek następujący:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{n\,A_{n+k-1}}{(n+k-1)^2} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{A_{n+k-1}}{n+k-1} - (k-1)\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{A_{n+k-1}}{(n+k-1)^2}. \tag{170}$$

Ale oczywiście (por. wzór 162bis)

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{A_{n+k-1}}{n+k-1} = u_k, \qquad \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{A_{n+k-1}}{(n+k-1)^2} = w_k;$$

można więc wzorowi (170) nadać postać następującą:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{n\,A_{n+k-1}}{(n+k-1)^2} = u_k - (k-1)\,w_k, \tag{170bis}$$

skąd (podług twierdzenia Abela) wynika związek

$$\lim_{r=1} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{n\,A_{n+k-1}}{(n+k-1)^2}\, r^n = u_k - (k-1)\,w_k. \tag{170ter}$$

Zestawiając wzory (168) i (170ter), otrzymujemy równość:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} w_{n+k-1} = u_k - (k-1)\,w_k,$$

ale (podług wzoru (166)) będzie

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} w_{n+k-1} = v_k,$$

będzie więc

$$v_k = u_k - (k-1)\,w_k = u_k + w_k - k\,w_k,$$

czyli

$$v_k + k\,w_k = u_k + w_k. \tag{171}$$

Kładziemy

$$\psi_1(r) = \sum_{n=1}^{n=\infty} v_n r^n; \qquad \psi_2(r) = \sum_{n=1}^{n=\infty} n\,w_n r^n. \tag{172}$$

Zastosujemy jeszcze raz lemmat § XIV, przyjmując

$$a_n = n\,w_n; \qquad b_n = v_n;$$

założenia (146) i (147) sprawdzają się ze względu na wzory (163) i (166), możemy więc ustalić nierówności

$$\liminf_{r=1} \psi_2(r) \leqq \liminf_{r=1} \psi_1(r) \leqq \limsup_{r=1} \psi_1(r) \leqq \limsup_{r=1} \psi_2(r). \tag{173}$$

Podług wzorów (165) i (167) będzie

$$\lim_{r=1} \sum_{n=1}^{n=\infty} w_n r^n = v_1. \tag{174}$$

Ze wzorów (171) i (174) wynika (przy oznaczeniach (158) i (172)):

$$\liminf_{r=1} [\psi_1(r) + \psi_2(r)] = D + v_1, \tag{175}$$

$$\limsup_{r=1} [\psi_1(r) + \psi_2(r)] = G + v_1. \tag{176}$$

Łatwo przekonać się, że będzie:

$$\liminf_{r=1} [\psi_1(r) + \psi_2(r)] \leqq \limsup_{r=1} \psi_1(r) + \liminf_{r=1} \psi_2(r). \tag{177}$$

(Istotnie: wystarczy przeprowadzić rozumowanie analogiczne do podanego w odnośnikach § X. Nazwijmy r_i ciąg wielkości dążących do jedności, gdy $i \to \infty$ tak dobrany, aby było

$$\lim_{i=\infty} \psi_2(r_i) = \liminf_{r=1} \psi_2(r)$$

Będzie oczywiście:

$$\liminf_{r=1}[\psi_1(r)+\psi_2(r)] \leqq \liminf_{i=\infty}[\psi_1(r_i)+\psi_2(r_i)]$$

$$=\liminf_{i=\infty}\psi_1(r_i)+\lim_{i=\infty}\psi_2(r_i) \leqq \limsup_{r=1}\psi_1(r)+\lim_{i=\infty}\psi_2(r_i)$$

$$=\limsup_{r=1}\psi_1(r)+\liminf_{r=1}\psi_2(r). \qquad \text{c. b. d. d.)}$$

Z nierówności (177) i (173) wyprowadzamy nierówność następującą:

$$\liminf_{r=1}[\psi_1(r)+\psi_2(r)] \leqq 2\limsup_{r=1}\psi_1(r);$$

zestawiając nierówność powyższą ze wzorem (175), otrzymujemy wreszcie:

$$D+v_1 \leqq 2\limsup \psi_1(r). \tag{178}$$

Z nierówności (178) i nierówności (161bis) (stanowiącej wynik rozumowań punktu 1-go) wypływa:

$$I+v_1 \leqq 2\limsup \psi_1(r),$$

czyli (przy oznaczeniach (160) i (172))

$$I \leqq G_1. \tag{179}$$

Część naszego twierdzenia już została udowodniona. Resztę udowodnimy, powołując się na nierówność następującą, analogiczną do nierówności (177):

$$\liminf_{r=1}\psi_1(r)+\limsup_{r=1}\psi_2(r) \leqq \limsup_{r=1}[\psi_1(r)+\psi_2(r)]. \tag{180}$$

(Dowód nierówności (180) nie różni się istotnie od dowodu nierówności (177). Oznaczamy przez ρ_i ciąg wielkości takich, że

$$\lim_{i=\infty}\rho_i=1; \qquad \lim_{i=\infty}\psi_2(\rho_i)=\limsup_{r=1}\psi_2(r).$$

Będzie oczywiście:

$$\limsup_{r=1}[\psi_1(r)+\psi_2(r)] \geqq \limsup_{i=\infty}[\psi_1(\rho_i)+\psi_2(\rho_i)]$$

$$=\limsup_{i=\infty}\psi_1(\rho_i)+\lim_{i=\infty}\psi_2(\rho_i) \geqq \liminf_{r=1}\psi_1(r)+\lim_{i=\infty}\psi_2(\rho_i)$$

$$=\liminf_{r=1}\psi_1(r)+\limsup_{r=1}\psi_2(r). \qquad \text{c. b. d. d.).}$$

Z nierówności (180) i (173) wynika nierówność:

$$2\liminf_{r=1}\psi_1(r) \leqq \limsup_{r=1}[\psi_1(r)+\psi_2(r)],$$

która znów, ze względu na wzór (176), daje:

$$2\liminf_{r=1}\psi_1(r) \leqq G+v_1. \tag{181}$$

Z nierówności (161bis) i (181) wynika nierówność:

$$2\liminf_{r=1}\psi_1(r) \leqq S+v_1,$$

której (przy oznaczeniach (160) i (172)) możemy nadać postać następującą

$$D_1 \leqq S. \tag{182}$$

Ustaliwszy nierówności (161bis), (179) i (182), udowodniliśmy właśnie to, co było do dowiedzenia.

XVI. Elementarne własności całki Poissona.[1]

Jeżeli $f(x)$, jest funkcyą całkowalną, $\psi(r)$ zaś oznacza wyrażenie następujące: (określone dla $|r|<1$)

$$\psi(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}\,dx,$$

to sprawdzają się nierówności

$$\liminf_{\varepsilon=0}\frac{f(\varepsilon)+f(2\pi-\varepsilon)}{2} \leqq \liminf_{r=1}\psi(r) \leqq \limsup_{r=1}\psi(r)$$

$$\leqq \limsup_{\varepsilon=0}\frac{f(\varepsilon)+f(2\pi-\varepsilon)}{2}.$$

[1]) Twierdzenie, któremu poświęcamy ten paragraf, jest powszechnie znane; może być nawet uważane za klasyczne. Jednakże nie umiem zacytować publikacyi, w której byłoby ono sformułowane dla funkcyj całkowalnych podług Lebesgue'a. W pracy p. P. Fatou p. t. „Séries trigon. et séries de Taylor" (Acta math. tom **30**) poświęconej specyalnie całce Poissona (przy użyciu całki Lebesgue'a) twierdzenie to jest dowiedzione implicite (na początku); jednakże tam też brak ogólnego wysłowienia, które tu podajemy i na które później będziemy zmuszeni się powołać.

Dowód. Będzie oczywiście

$$\psi(r) = \frac{1-r^2}{2\pi}\left[\int_0^{\pi}\frac{f(x)\,dx}{1-2r\cos x+r^2} + \int_{\pi}^{2\pi}\frac{f(x)\,dx}{1-2r\cos x+r^2}\right]$$

$$= \frac{1-r^2}{2\pi}\left[\int_0^{\pi}\frac{f(x)\,dx}{1-2r\cos x+r^2} + \int_0^{\pi}\frac{f(2\pi-x)\,dx}{1-2r\cos(2\pi-x)+r^2}\right] \quad (183)$$

$$= \frac{1-r^2}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(x)+f(2\pi-x)}{1-2r\cos x+r^2}\,dx.$$

Jeżeli oznaczymy

$$M = \limsup_{x=0}\frac{f(x)+f(2\pi-x)}{2}, \quad (184)$$

to do każdej liczby dodatniej η można dobrać $\varepsilon > 0$ takie, iżby było

$$\frac{f(x)+f(2\pi-x)}{2} \leqq M+\eta, \quad (185)$$

gdy będzie

$$0 \leqq x \leqq \varepsilon.$$

Gdy

$$\varepsilon \leqq x \leqq \pi,$$

będzie

$$\cos x \leqq \cos\varepsilon < 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^4}{24} < 1-\varepsilon^2,$$

więc:

$$1-2r\cos x+r^2 = (1-r\cos x)^2 + r^2\sin^2 x > (1-r\cos x)^2 > [1-r(1-\varepsilon^2)]^2$$

$$= [(1-r)+r\varepsilon^2]^2 > r^2\varepsilon^4,$$

skąd wynika nierówność następująca:

$$\left|\frac{1-r^2}{2\pi}\int_{\varepsilon}^{\pi}\frac{f(x)+f(2\pi-x)}{1-2r\cos x+r^2}\,dx\right| < \frac{1-r^2}{2\pi r^2\varepsilon^4}\int_0^{\pi}|f(x)+f(2\pi-x)|\,dx.$$

Prawa strona nierówności powyższej dąży do zera, gdy r dąży do jedności (a ε nie zmienia się); będzie więc a fortiori:

$$\lim_{r=1}\frac{1-r^2}{2\pi}\int_{\varepsilon}^{\pi}\frac{f(x)+f(2\pi-x)}{1-2r\cos x+r^2}\,dx = 0. \quad (186)$$

Wyrażenie

$$1-2r\cos x+r^2 = (1-r\cos x)^2 + r^2\sin^2 x$$

jest nieujemne dla wszystkich rzeczywistych wartości r i x, przeto z nierówności (185) wynika następująca nierówność (zakładamy $0 < r < 1$)

$$\frac{1-r^2}{2\pi}\int_0^{\varepsilon}\frac{f(x)+f(2\pi-x)}{1-2r\cos x+r^2}\,dx < \frac{(M+\eta)}{\pi}\int_0^{\varepsilon}\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}\,dx \quad (187)$$

$$< \frac{M+\eta}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}\,dx = M+\eta,$$

będzie więc:

$$\limsup_{r=1}\frac{1-r^2}{2\pi}\int_0^{\varepsilon}\frac{[f(x)+f(2\pi-x)]\,dx}{1-2r\cos x+r^2} \leqq M+\eta. \quad (188)$$

Podług wzoru (183) będzie oczywiście:

$$\psi(r) = \frac{1-r^2}{2\pi}\int_0^{\varepsilon}\frac{f(x)+f(2\pi-x)}{1-2r\cos x+r^2}\,dx + \frac{1-r^2}{2\pi}\int_{\varepsilon}^{\pi}\frac{f(x)+f(2\pi-x)}{1-2r\cos x+r^2}\,dx. \quad (189)$$

Zestawiając wzory (189), (186) i (188), otrzymujemy nierówność:

$$\limsup_{r=1}\psi(r) \leqq M+\eta.$$

Ale η jest dowolną liczbą dodatnią; musi być więc:

$$\limsup_{r=1}\psi(r) \leqq M = \limsup_{x=0}\frac{f(x)+f(2\pi-x)}{2}. \quad (190)$$

Jeżeli we wzorze (183) zastąpimy $f(x)$ przez $-f(x)$ (i $f(2\pi-x)$ przez $-f(2\pi-x)$), to $\psi(r)$ zamieni się na $-\psi(r)$ i wzór (190) zamieni się na wzór następujący:

$$\limsup_{r=1}[-\psi(r)] \leqq \limsup_{x=0}\left[-\frac{f(x)+f(2\pi-x)}{2}\right],$$

czyli

$$\liminf_{r=1}\psi(r) \geqq \liminf_{x=0}\frac{f(x)+f(2\pi-x)}{2}. \quad (191)$$

Ustaliwszy wzory (190) i (191), udowodniliśmy omawiane twierdzenie.

Uwaga. Wypisując nierówność (185), robimy milczące założenie, że górna granica wahań

$$\limsup_{x=0} \frac{f(x)+f(2\pi-x)}{2}$$

jest skończona. Jeżeli to założenie się nie sprawdza, to albo będzie:

$$\limsup_{x=0} \frac{f(x)+f(2\pi-x)}{2} = +\infty,$$

albo też będzie:

$$\lim_{x=0} \frac{f(x)+f(2\pi-x)}{2} = -\infty.$$

W pierwszym przypadku wzór (190) jest banalny; podobnie banalny jest wzór (191), jeżeli będzie

$$\liminf_{x=0} \frac{f(x)+f(2\pi-x)}{2} = -\infty.$$

W pozostałych przypadkach, t. j. gdy

$$\lim_{x=0} \frac{f(x)+f(2\pi-x)}{2} = +\infty,$$

lub

$$\lim_{x=0} \frac{f(x)+f(2\pi-x)}{2} = -\infty,$$

twierdzenie omawiane również utrzymuje się. Aby je udowodnić, wystarczy powtórzyć rozumowania powyższe z niewielkiemi zmianami.

Gdy

$$\lim_{x=0} \frac{f(x)+f(2\pi-x)}{2} = +\infty,$$

to do każdej liczby A można dobrać $\varepsilon > 0$ takie, iżby było

$$\frac{f(x)+f(2\pi-x)}{2} \geqq A, \tag{192}$$

gdy będzie

$$0 \leqq x \leqq \varepsilon.$$

Wzór (186) utrzymuje się. Zamiast nierówności (187) wyprowadzimy nierówność następującą (wynikającą z nier. 192):

$$\frac{1-r^2}{2\pi}\int_0^\varepsilon \frac{f(x)+f(2\pi-x)}{1-2r\cos x+r^2}\,dx > \frac{A}{\pi}\int_0^\varepsilon \frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}\,dx. \tag{193}$$

Ze wzoru (186) wynika (przez podstawienie: $f(x)=1$)

$$\lim_{r=1} \frac{1-r^2}{\pi}\int_\varepsilon^\pi \frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2} = 0$$

dla wszelkiego r mniejszego od 1 prawdziwa jest tożsamość:

$$\frac{1-r^2}{\pi}\int_0^\pi \frac{dx}{1-2r\cos x+r^2} = 1;$$

więc będzie:

$$\lim_{r=1} \frac{1-r^2}{\pi}\int_0^\varepsilon \frac{dx}{1-2r\cos x+r^2} = 1. \tag{194}$$

Ze wzorów (189), (193), (194) i (186) wynika bezpośrednio nierówność następująca:

$$\liminf_{r=1} \psi(r) \geqq A.$$

Nierówność ta jest prawdziwa dla wszelkiego A; będzie więc:

$$\lim_{r=1} \psi(r) = \infty \qquad \text{c. b. d. d.}$$

Przypadek $\lim f(x) = -\infty$ sprowadza się do poprzedniego przez rozważanie funkcyi $-f(x)$ zamiast $f(x)$.

XVII. Twierdzenie. Jeśli spełnione są założenia § XV, t. zn. jeśli

$$\lim_{n=\infty} A_n = 0, \tag{155}$$

i jeśli obie granice wahań (dolna i górna):

$$I = \liminf_{r=1} \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n r^n$$

oraz (156)

$$S = \limsup_{r=1} \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n r^n$$

są skończone, to sprawdzają się nierówności

$$I \leqq \limsup_{\alpha=0} \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \cdot \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2\alpha^2},$$

$$\liminf_{\alpha=0} \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2\alpha^2} \leqq S. \tag{195}$$

Dowód. Kładziemy (gdy $\sin x \neq 0$, t. j. gdy $\frac{x}{\pi}$ nie jest ani zerem, ani liczbą całkowitą)

$$\Phi_1(x) = \left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \cdot \left(\frac{\sin nx}{nx}\right)^2$$

$$= \frac{1}{\sin^2 x} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{A_n}{n^2} \cdot \sin^2 nx. \tag{196}$$

Przy oznaczeniach § XV (162bis i 166) będzie oczywiście dla wszelkiego naturalnego $n \geqq 2$:

$$\sum_{m=1}^{m=n} \frac{A_m}{m^2} \sin^2 mx = \sum_{m=1}^{m=n} (w_m - w_{m+1}) \sin^2 mx$$

$$= - w_{n+1} \sin^2 nx + w_1 \sin^2 x + \sum_{m=2}^{m=n} w_m [\sin^2 mx - \sin^2 (m-1) x]$$

$$= - w_{n+1} \sin^2 nx + \sin x \sum_{m=1}^{m=n} w_m \sin (2m-1) x \tag{197}$$

$$= - w_{n+1} \sin^2 nx + \sin x \sum_{m=1}^{m=n} (v_m - v_{m+1}) \sin (2m-1) x$$

$$= - w_{n+1} \sin^2 nx - v_{n+1} \sin (2n-1) x \sin x + v_1 \sin^2 x$$

$$+ \sin x \sum_{m=2}^{m=n} v_m [\sin (2m-1) x - \sin (2m-3) x]$$

$$= - w_{n+1} \sin^2 nx - v_{n+1} \sin (2n-1) x \sin x + v_1 \sin^2 x$$

$$+ 2 \sum_{m=2}^{m=n} v_m \cos 2 (m-1) x \cdot \sin^2 x.$$

Ponieważ będzie:

$$\lim_{n=\infty} w_n = \lim_{n=\infty} v_n = 0,$$

(wynika to ze zbieżności szeregu (159) § XV), przeto ze wzoru (197) wynika związek następujący:

$$\sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{A_m}{m^2} \sin^2 mx = v_1 \sin^2 x + 2 \sum_{m=2}^{m=\infty} v_m \cos 2 (m-1) x \sin^2 x. \tag{198}$$

Zastępując we wzorze powyższym x przez $\frac{x}{2}$ i podstawiając w jego prawej stronie $m = n + 1$, otrzymamy następującą równość:

$$\sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{A_m}{m^2} \sin^2 \frac{mx}{2} = v_1 \sin^2 \frac{x}{2} + 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} v_{n+1} \cos nx \cdot \sin^2 \frac{x}{2}. \tag{198bis}$$

Szereg $\sum_{n=1}^{n=\infty} v_{n+1} \cos nx \sin^2 \frac{x}{2}$ jest, jak tego dowiodły rachunki powyższe, zbieżny dla wszystkich wartości x. Gdy $\sin \frac{x}{2} \neq 0$, wynika stąd zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{n=\infty} v_{n+1} \cos nx$.

Gdy $\frac{x}{2\pi}$ nie jest ani zerem, ani liczbą całkowitą, będzie $\sin \frac{x}{2} \neq 0$; wówczas ze wzorów (196) i (198bis) wynika równość następująca:

$$\frac{1}{2} \Phi_1 \left(\frac{x}{2}\right) = \frac{v_1}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} v_{n+1} \cos nx. \tag{199}$$

Funkcya $\frac{1}{2} \Phi_1 \left(\frac{x}{2}\right)$, będąca sumą szeregu trygonometrycznego niemal wszędzie zbieżnego [1])

$$\frac{v_1}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} v_{n+1} \cos nx, \tag{200}$$

jest, podług określenia (196), określona, skończona i ciągła, gdy x nie jest ani zerem ani wielokrotnością liczby 2π.

[1]) Szereg (200) jest zbieżny, gdy $\sin \frac{x}{2} \neq 0$. Rozbieżność jego może zachodzić tylko w punktach odosobnionych: $x = 0$, $x = \pm 2k\pi$ $(k = 1, 2, 3 \ldots)$.

Gdy $x \to 0$ musi zachodzić jeden z następujących czterech przypadków (wykluczających się nawzajem):

1) albo będzie:

$$\liminf_{x=0} \Phi_1(x) = -\infty \quad \text{oraz} \quad \limsup_{x=0} \Phi_1(x) = +\infty,$$

2) albo

$$\lim_{x=0} \Phi_1(x) = +\infty,$$

3) albo też

$$\lim_{x=0} \Phi_1(x) = -\infty,$$

4) albo, wreszcie przynajmniej jedna z granic wahań

$$\liminf_{x=0} \Phi_1(x) \quad \text{i} \quad \limsup_{x=0} \Phi_1(x)$$

jest skończona.

W pierwszym przypadku będzie oczywiście

$$\liminf_{\alpha=0} \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2\alpha^2} = -\infty; \qquad \limsup_{\alpha=0} \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2\alpha^2} = +\infty,$$

nasze twierdzenie, głoszące, że zachodzą nierówności:

$$\liminf_{\alpha=0} \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2\alpha^2} \leqq S; \qquad I \leqq \limsup_{\alpha=0} \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2\alpha^2}$$

jest wówczas banalne.

Udowodnimy, że w pozostałych przypadkach (2-im, 3-im i 4-ym) szereg (200) jest szeregiem Fouriera swej sumy $\frac{1}{2}\Phi_1\left(\frac{x}{2}\right)$.

Kładziemy

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}\Phi_1\left(\frac{x}{2}\right), \tag{201}$$

$$M = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{|A_n|}{n^2}. \tag{202}$$

Podług wzorów (201) i (199) będzie:

(gdy $x \neq 2k\pi$; $k = 0, 1, 2\ldots, -1, -2, \ldots$)

$$\Phi(x) = \frac{v_1}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} v_{n+1} \cos nx. \tag{203}$$

Zestawiając określenia (196) i (201), otrzymujemy równość

$$\Phi(x) = \frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{A_n}{n^2} \cdot \sin^2 n\frac{x}{2} \tag{204}$$

Zestawiając wzory (204) i (202), otrzymujemy nierówność:

$$\left(\text{sprawdzającą się, gdy } \sin\frac{x}{2} \neq 0\right)$$

$$|\Phi(x)| \leqq \frac{M}{2\sin^2\frac{x}{2}}. \tag{205}$$

Rozważmy specyalnie przypadek 2-gi, gdy

$$\lim_{x=\infty} \Phi_1(x) = +\infty$$

i co za tem idzie

$$\lim_{x=\infty} \Phi(x) = +\infty.$$

Istnieje wówczas liczba dodatnia ε taka, że będzie

$$\Phi(x) > 0, \quad \text{gdy} \quad -\varepsilon < x < +\varepsilon; \tag{206}$$

gdy

$$\varepsilon \leqq x \leqq 2\pi - \varepsilon, \quad \text{będzie} \quad \sin^2\frac{x}{2} \geqq \sin^2\frac{\varepsilon}{2},$$

przeto; podług nierówności (205) będzie wówczas:

$$\Phi(x) \geqq -\frac{M}{2\sin^2\frac{\varepsilon}{2}}. \tag{207}$$

Nierówność (207) sprawdza się również wówczas gdy $-\varepsilon < x < +\varepsilon$; wynika to z nierówności (206)—sprawdza się ona więc w całym przedziale $(-\varepsilon, 2\pi - \varepsilon)$. Ponieważ funkcya $\Phi(x)$ jest peryodyczna z okresem 2π, więc z tego, co się dzieje w przedziale $(-\varepsilon, 2\pi - \varepsilon)$, możemy wnioskować o zachowaniu się funkcyi w zbiorze wszystkich rzeczywistych wartości x. Możemy twierdzić, że nierówność (207) jest prawdziwa dla wszelkiego x.

Innemi słowy: funkcya $\Phi(x)$ jest ograniczona od dołu.

Szereg trygonometryczny (200) niemal wszędzie zbieżny ma, podług wzoru (203), sumę równą $\Phi(x)$ we wszystkich punktach zbieżności, t. j. niemal wszędzie. Suma ta wszędzie tam, gdzie istnieje, t. j. niemal wszędzie, jest ograniczona od dołu. Przeto podług twierdzenia § XIII szereg (200) jest szeregiem Fouriera swej sumy $\Phi(x)$.

Przypadek trzeci sprowadzi się do drugiego, jeżeli zamiast funkcyi $\Phi(x)$ rozważać funkcyę $-\Phi(x)$ i zamiast szeregu (200) szereg następujący:

$$-\frac{v_1}{2}+\sum_{n=1}^{n=\infty}(-v_{n+1})\cos nx. \tag{208}$$

W przypadku czwartym:

a) Jeżeli dolna granica wahań

$$\limsup_{x=0}\Phi_1(x),$$

a więc i

$$d=\liminf_{x=0}\Phi(x)$$

jest skończona, to istnieje liczba dodatnia ε taka, że będzie

$$\Phi(x)>d-1,\quad \text{gdy}\quad -\varepsilon<x<+\varepsilon. \tag{209}$$

Kojarząc nierówność (209) z nierównością (207) i pamiętając o peryodyczności funkcyi $\Phi(x)$, dowodzimy, że ta funkcya jest ograniczona od dołu. Dalej rozumujemy jak w pierwszym przypadku i wykazujemy, że szereg (200) jest szeregiem Fouriera.

b) Jeżeli górna granica wahań

$$g=\limsup_{x=0}\Phi(x)$$

jest skończona, to rozumowanie wypowiedziane poda dadzą się zastosować do funkcyi $-\Phi(x)$ i do szeregu (208). Zatem szereg (208) a więc i szereg (200) jest również w danym wypadku szeregiem Fouriera.

Ostatecznie więc powiemy: szereg (200) jest szeregiem Fouriera w tych przypadkach, w których twierdzenie nasze wymaga dowodu, (t. j. w przypadkach 2-im, 3-im i 4-ym).

Skoro szereg (200) (vel 203) jest szeregiem Fouriera, to prawdziwą jest równość następująca:

$$v_{n+1}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(x)\cos nx\,dx\quad (n=0,\ 1,\ 2\ldots). \tag{210}$$

Ze wzoru (210) i z elementarnej tożsamości:

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{n=\infty}r^n\cos nx=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}$$

wynika, dla $|r|<1$, następujący związek:

$$\frac{v_1}{2}+\sum_{n=1}^{n=\infty}v_{n+1}r^n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(x)\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}\,dx. \tag{211}$$

Podług twierdzenia § XVI ze wzoru (211) wynikają nierówności:

$$\begin{aligned}\limsup_{r=1}\left[\frac{v_1}{2}+\sum_{n=1}^{n=\infty}v_{n+1}r^n\right]&\leqq\limsup_{x=0}\frac{\Phi(x)+\Phi(2\pi-x)}{2},\\ \liminf_{r=1}\left[\frac{v_1}{2}+\sum_{n=1}^{n=\infty}v_{n+1}r^n\right]&\geqq\liminf_{x=0}\frac{\Phi(x)+\Phi(2\pi-x)}{2}.\end{aligned} \tag{212}$$

Przy oznaczeniach (160) § XV granice wahań, występujące w lewej stronie wzorów (212), są odpowiednio równe $\frac{1}{2}G_1$ i $\frac{1}{2}D_1$. Nierównościom (212) możemy nadać następującą postać:

$$\begin{aligned}&\liminf_{x=0}[\Phi(x)+\Phi(2\pi-x)]\leqq D_1\leqq G_1\\ &\leqq\limsup_{x=0}[\Phi(x)+\Phi(2\pi-x)].\end{aligned} \tag{212bis}$$

Podług wzoru (203) będzie oczywiście:

$$\Phi(2\pi-x)=\Phi(x),$$

będzie więc

$$\Phi(x)+\Phi(2\pi-x)=2\Phi(x). \tag{213}$$

Ze wzorów (201) i (196) wynikają równości następujące:

$$\begin{aligned}2\liminf_{x=0}\Phi(x)&=\liminf_{x=0}\sum_{n=1}^{n=\infty}A_n\frac{\sin^2 nx}{n^2x^2},\\ 2\limsup_{x=0}\Phi(x)&=\limsup_{x=0}\sum_{n=1}^{n=\infty}A_n\cdot\frac{\sin^2 nx}{n^2x^2}.\end{aligned} \tag{214}$$

Zestawiając wzory (212bis), (213) i (214), otrzymujemy nierówności:

$$\liminf_{x=0}\sum_{n=1}^{n=\infty}A_n\frac{\sin^2 nx}{n^2x^2}\leqq D_1\leqq G_1\leqq\limsup_{x=0}\sum_{n=1}^{n=\infty}A_n\frac{\sin^2 nx}{n^2x^2}. \tag{215}$$

Podług twierdzenia § XV będzie:

$$D_1 \leqq \limsup_{r=1} \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n r^n; \qquad \liminf_{r=1} \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n r^n \leqq G_1. \tag{216}$$

Z nierówności (215) i (216) wynika wreszcie:

$$\liminf_{x=0} \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \frac{\sin^2 nx}{n^2 x^2} \leqq \limsup_{r=1} \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n r^n,$$

$$\liminf_{r=1} \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n r^n \leqq \limsup_{x=0} \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \frac{\sin^2 nx}{n^2 x^2}. \qquad \text{c. b. d. d.}$$

XVIII. Twierdzenie. Jeżeli spółczynniki szeregu trygonometrycznego

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \tag{217}$$

dążą do zera, gdy $n \longrightarrow \infty$, t. zn. jeśli będzie

$$\lim_{n=\infty} a_n = \lim_{n=\infty} b_n = 0 \tag{218}$$

jeżeli nadto obie granice wahań

$$d(x) = \liminf_{r=1} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\, r^n\right]$$

i (219)

$$g(x) = \limsup_{r=1} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\, r^n\right]$$

(rozważane jako funkcye zmiennej x) są funkcyami całkowalnemi i niemal wszędzie skończonemi, to szereg (217), jest szeregiem F o u r i e r a.

Dowód. Kładziemy

$$F(x) = \frac{a_0}{2} \cdot \frac{x^2}{2} - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^2};$$

będzie oczywiście

$$\frac{F(x+\alpha) + F(x-\alpha) - 2F(x)}{\alpha^2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \frac{\sin^2 \frac{n\alpha}{2}}{\left(\frac{n\alpha}{2}\right)^2} \tag{220}$$

Kładziemy

$$M(x) = \limsup_{\alpha=0} \frac{F(x+\alpha) + F(x-\alpha) - 2F(x)}{\alpha^2}$$

(221)

$$m(x) = \liminf_{\alpha=0} \frac{F(x+\alpha) + F(x-\alpha) - 2F(x)}{\alpha^2}.$$

Z twierdzenia § XVII i ze wzoru (220) wynika, że wszędzie tam gdzie funkcye $d(x)$ i $g(x)$ przybierają wartości skończone, t. j. podług założenia niemal wszędzie, zachodzą nierówności następujące:

$$d(x) \leqq M(x), \tag{222}$$

$$m(x) \leqq g(x). \tag{223}$$

Kładziemy

$$f(x) = \frac{g(x) + M(x)}{2} - \frac{1}{2} \,|\, g(x) - M(x) \,|\,. \tag{224}$$

Dla tych wartości x, dla których sprawdza się nierówność

$$g(x) \leqq M(x),$$

będzie:

$$f(x) = \frac{g(x) + M(x)}{2} - \frac{M(x) - g(x)}{2} = g(x);$$

dla tych wartości x, dla których zachodzi nierówność przeciwna

$$M(x) \leqq g(x),$$

będzie:

$$f(x) = \frac{g(x) + M(x)}{2} - \frac{g(x) - M(x)}{2} = M(x).$$

Będzie więc dla wszelkiego x:

$$f(x) \leqq g(x), \tag{225}$$

$$f(x) \leqq M(x). \tag{226}$$

Ponieważ $f(x)$ jest równe albo funkcyi $g(x)$, albo funkcyi $M(x)$, obie zaś te funkcye są (podług wzorów (222) i (219)) nie mniejsze od $d(x)$ i (podług wzorów (223) i (221)) nie mniejsze od $m(x)$, przeto będzie:

$$d(x) \leqq f(x), \tag{227}$$

$$m(x) \leqq f(x). \tag{228}$$

Funkcye $M(x)$ i $m(x)$, jako granice wahań funkcyi mierzalnej

$$\frac{F(x+\alpha)+F(x-\alpha)-2F(x)}{\alpha^2},$$

są mierzalne [1], więc funkcya $f(x)$, określona przez wzór (224), jest również mierzalna. Podług wzorów (225) i (227) $f(x)$ jest zawarta pomiędzy dwiema funkcyami $d(x)$ i $g(x)$, które są całkowalne z założenia. Wszelka funkcya mierzalna, zawarta pomiędzy dwiema funkcyami całkowalnemi, jest oczywiście całkowalna; więc $f(x)$ jest funkcyą całkowalną.

Funkcye $d(x)$ i $g(x)$ są z założenia niemal wszędzie skończonemi, więc $f(x)$ jest niemal wszędzie skończoną.

Ze względu na założenie (218) funkcya $F(x)$ jest oczywiście ciągła i (podług twierdzenia Riemanna, cytowanego w § XII) gładką.

Podług wzorów (226) i (228) (oraz definicyi 221) funkcye

$$\Phi(x)=F(x)-\frac{a_0}{2}\cdot\frac{x^2}{2}=-\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{a_n\cos nx+b_n\sin nx}{n^2}, \tag{229}$$

$$f_1(x)=f(x)-\frac{a_0}{2} \tag{229bis}$$

są związane pomiędzy sobą następującemi nierównościami:

$$\left.\begin{aligned}&\liminf_{\alpha=0}\frac{\Phi(x+\alpha)+\Phi(x-\alpha)-2\Phi(x)}{\alpha^2}\leqq f_1(x)\\ &\leqq\limsup_{\alpha=0}\frac{\Phi(x+\alpha)+\Phi(x-\alpha)-2\Phi(x)}{\alpha^2}.\end{aligned}\right\} \tag{230}$$

Ze wzoru (229) i z założenia (218) wynikają równości:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(x)\cos nx\,dx=-\frac{a_n}{n^2};\\ &\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(x)\sin nx\,dx=-\frac{b_n}{n^2}.\end{aligned}\right\} \tag{231}$$

Ze wzorów (230), (231) i (218) możemy wywnioskować na zasadzie lematu § XI, że będzie

[1]) Patrz H. Lebesgue, Leçons sur l'intégration, str. 121.

$$\left.\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(f(x)-\frac{a_0}{2}\right)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx\,dx,\\ b_n&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(f(x)-\frac{a_0}{2}\right)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\,dx.\end{aligned}\right\} \tag{232}$$

A więc szereg (217) jest szeregiem Fouriera. C. b. d. d.

XIX. Twierdzenie. Jeżeli (przy zachowaniu oznaczeń § XVIII) obie funkcye $d(x)$ i $g(x)$ są niemal wszędzie skończone i ograniczone od dołu dla zbioru niemal wszystkich wartości x, (t. zn. jeśli istnieje wielkość stała $-A$ taka, że niemal wszędzie sprawdzają się nierówności

$$g(x)\geqq d(x)\geqq -A) \tag{233}$$

jeśli nadto sprawdza się założenie

$$\lim_{n=\infty}a_n=\lim_{n=\infty}b_n=0, \tag{218}$$

to szereg trygonometryczny (217) jest szeregiem Fouriera.

Dowód. Wszystkie wzory § poprzedniego do wzoru (230) włącznie wyprowadzają się bez założenia całkowalności funkcyi (219); utrzymują się one więc przy naszych założeniach obecnych.

Aby od wzorów (230) przejść do wzorów (232), wystarczy udowodnić całkowalność funkcyi $f(x)$.

Z założenia (233) i wz. 227 wynika niemal wszędzie nierówność następująca:

$$f(x)+A\geqq 0. \tag{234}$$

Kładziemy

$$\Phi_1(x)=\Phi(x)+\frac{a_0}{2}\cdot\frac{x^2}{2}+A\cdot\frac{x^2}{2}. \tag{235}$$

Ze wzorów (229bis), (230) i (234) wynika niemal wszędzie nierówność następująca:

$$\limsup_{h=0}\frac{\Phi_1(x+h)+\Phi_1(x-h)-2\Phi_1(x)}{h^2}\geqq 0. \tag{236}$$

Z założenia (218) wynika, [1] że funkcya $\Phi_1(x)$ jest wszędzie ciągła i gładka, możemy więc stosować twierdzenie § VI; podług tego twierdzenia

[1]) Podług twierdzenia Riemanna, cytowanego na początku § XI.

druga pochodna $\Phi_1''(x)$ istnieje prawie wszędzie i jest funkcyą całkowalną.

Z twierdzenia § VII, z nierówności (230) oraz określeń (229bis) i (235) wynika prawie wszędzie równość następująca:

$$f_1(x) = \Phi_1''(x) - A - \frac{a_0}{2}.$$

Funkcya $\Phi_1''(x)$ jest całkowalna – wykazaliśmy to przed chwilą,—a więc podług wzoru powyższego również i $f_1(x)$ jest funkcyą całkowalną i przejście od nierówności (230) do wzorów (232) Eulera-Fouriera na zasadzie lematu § XI jest uprawnione. C. b. d. d.

RÉSUMÉ.

Dans ce qui precède j'ai essayé de montrer que la méthode de l'intégration formelle des séries trigonométriques fondée par Riemann peut être appliquée non seulement à l'étude des séries convergentes, mais aussi bien à celle des séries sommables par le procédé de Poisson à coefficients tendant vers zéro.

Cette extension est fondée sur le théorème suivant:

„Si les quantités a_n et b_n tendent vers zéro avec $\frac{1}{n}$,

et si de plus les deux limites d'indétermination

$$G(x_0) = \limsup_{r=1} \sum_{n=1}^{n=\infty} (a_n \cos nx_0 + b_n \sin nx_0)\, r^n$$

et

$$D(x_0) = \liminf_{r=1} \sum_{n=1}^{n=\infty} (a_n \cos nx_0 + b_n \sin nx_0)\, r^n$$

sont, toutes les deux, finies, alors, en posant

$$F(x) = -\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{a_n \cos n x + b_n \sin n x}{n^2},$$

on aura les inégalités suivantes:

$$\limsup_{h=0} \frac{F(x_0+h) + F(x_0-h) - 2F(x_0)}{h^2} \geqq D(x_0),$$

$$\liminf_{h=0} \frac{F(x_0+h) + F(x_0-h) - 2F(x_0)}{h^2} \leqq G(x_0).$$

Ce théorème permet d'étendre aux séries sommables par le procédé de Poisson la proposition de Ch.-J. de la Vallée Poussin sur l'unicité du développement trigonométrique (publiée dans les „Comptes rendus de l'Ac. des Sc." Paris, 1912, vol. **155**, pages 951—3).

La communication présente contient la généralisation suivante de cette proposition:

„Si les coefficients a_n, b_n de la série

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \qquad \text{(S)}$$

tendent vers zéro avec $\frac{1}{n}$,

si de plus les deux limites d'indétermination

$$G(x) = \frac{a_0}{2} + \limsup_{r=1} \sum_{n=1}^{n=\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\, r^n$$

et

$$D(x) = \frac{a_0}{2} + \liminf_{r=1} \sum_{n=1}^{n=\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\, r^n.$$

sont finies partout, sauf peut-être aux points d'un ensemble dénombrable [1]),

si, enfin, les fonctions $G(x)$ et $D(x)$ sont intégrables (au sens de M. H. Lebesgue),

alors la série (S) est une série de Fourier".

En généralisant un résultat de M. H. Steinhaus (publié dans „Rozprawy Wydziału matematyczno-przyrodniczego Akademii Umiejętności w Krakowie" (Cracovie, 1916. Vol. **56**. Série A, pages 175—225) je démontre, que

---

[1]) Ou plus généralement: ...d'un ensemble, qui ne contient pas de sous-ensemble parfait.

le theorème precedent subsiste, si on y remplace l'hypothèse de l'integrabilité des fonctions $G(x)$ et $D(x)$ par la suivante: on a partout, sauf peut-être aux points d'un ensemble dénombrable: $D(x) \geqq 0$.

A côté de ces resultats nouveaux j'expose d'une manière systematique quelques theorèmes de de la Vallée Poussin et de M. Steinhaus, sur lesquels est basée une partie de nos raisonnements.

W. SIERPIŃSKI.

O pewnem uogólnieniu zbiorów Borela.

(Sur une généralisation des ensembles mesurables B).

Zbiory liniowe Borela stanowią, jak wiadomo, najmniejszą klasę K zbiorów, spełniającą następujące trzy warunki: [1])

1) Każdy przedział należy do klasy K.

2) Jeżeli $M_1, M_2, M_3, \ldots$ jest ciągiem skończonym albo przeliczalnym mnogości, z których każda należy do klasy K, to suma $M_1 + M_2 + M_3 + \ldots$ tych mnogości tworzy mnogość również należącą do klasy K.

3) Jeżeli $M_1, M_2, M_3, \ldots$ jest ciągiem skończonym albo przeliczalnym mnogości, z których każda należy do klasy K, to iloczyn ich $M_1 M_2 M_3 \ldots$ (o ile istnieje) jest również mnogością, należącą do klasy K [2]).

(Innemi słowy, klasa K_0 wszystkich mnogości liniowych Borela jest częścią wspólną wszystkich klas K, spełniających powyższe trzy warunki).

Pp. Suslin i Łuzin dowiedli niedawno [3]) istnienia funkcyi $f(x)$, określonej w zbiorze X wszystkich liczb niewymiernych przedziału $(0, 1)$ i ciągłej w tym zbiorze, dla której zbiór wszystkich wartości $f(x)$ (gdy x należy do X) nie jest zbiorem Borela. Wynika stąd, że istnieje obraz jednoznaczny i ciągły mnogości Borela (np. mnogości wszystkich liczb niewy-

---

[1]) Por moją notę: „Sur les définitions axiomatiques des ensembles mesurables B" Biuletyn Akademii Krakowskiej, Marzec 1918.

[2]) W warunku 2) możnaby nadto zakładać, że mnogości $M_1, M_2, M_3, \ldots$ nie posiadają elementów wspólnych, zaś w warunku 3) — że M_{k+1} jest częścią mnogości M_k (dla $k = 1, 2, 3, \ldots$).

[3]) Comptes Rendus, note du 8 janvier 1917.