schneiden s_2 und je zwei homologe Elemente s_1, s_1' und ebenso die Gerade b_1 (bezw. a_2) und ihr entsprechende Gerade b_2 (resp. a_1). Die ϑ^* Doppeltangenten der Kurve K^* schneiden, ausser s_1 und s_2, noch einen Strahl des n_1-, n_2-deutigen Gebildes und zwei ihm entsprechende Geraden des n_2-, n_1-deutigen Gebildes, oder zwei Paare homologer Elemente der $[n_1, n_2]$-deutigen Verwandtschaft auf Φ^ν.

Ganz analog ergeben sich die speziellen Eigenschaften $(n_1+n_2)(\nu-2)$ singulärer Punkte des betrachteten Komplexes von $(n_1+n_2)(\nu-1)$-tem Grade.

Bemerkung: Auf jeder singulären Ebene $\varepsilon = s_1 s_2$ der in Nr. 5 p. 197 betrachteten Kongruenz liegen die $n_1\nu_2 + n_2\nu_1 - (n_1+n_2)$ dort angegebenen Geraden, welche Doppelstrahlen dieser Kongruenz sind. — Dem Strahle s_1 (resp. s_3) entsprechen ausser s_2 (bezw. s_1) noch $n_2 - 1$ (resp. $n_1 - 1$) weitere Strahlen s_2' $(-s_1')$. Für $S_2' = \varepsilon s_2'$ und $S_2' = \varepsilon s_1'$ erhalten wir noch (n_1+n_2-2) auf ε liegende Doppelkongruenzstrahlen. Die Ebene ε enthält ∞^1 Kongruenzstrahlen, welche einen Büschel um $P_0 = p_0\varepsilon$ bilden.

Um $(\nu_1+\nu_2)$ weitere singuläre Ebenen dieser Kongruenz zu erhalten, bemerken wir dass die feste Gerade p_0 ν_1 Ezzeugenden $a_1, \dots$ der Fläche Φ^{ν_2} und ν_2 Erzeugenden $d_2, \dots$ dec Fläche Φ^{ν_2} trifft. Es lässt sich leicht erkennen — (vergl. ganz analoge Untersuchungen in Nr. 15 p. 215 für die Ebene ε, welche durch eine einfache Erzeugende a_1 der Fläche Φ^{ν_1} geht) — dass die Ebenen $p_0 a_1, \dots$ $p_0 d_2, \dots$ singuläre Elemente unserer Kongruenz bilden.

STRESZCZENIE.

Praca niniejsza składa się z trzech części. W części pierwszej omawiam ogólne własności $[n_1, n_2]$-znacznych odpowiedniości, zachodzących pomiędzy elementami dwoch jednobieżnych utworów podstawowych. Równocześnie wysławiam odnośne twierdzenia dla wieloznacznych odpowiedniości $]n_1, n_2]$, ustalonych dla elementów jednego i tego samego utworu zasadniczego rodzaju zerowego. Podstawami rozważanych odpowiedniości są jednobieżne krzywe płaskie i skośne, oraz powierzchnie rozwijalne i skośne. W części drugiej badam własności krzywych (płaskich, skośnych) i powierzchni (skośnych, rozwijalnych) rodzaju $(n_1-1)(n_2-1)$-go, jako utworów powyżej omawianych odpowiedniości wieloznacznych. W części trzeciej przechodzę do Geometryi linii prostej i podaję własności kompleksów wyższych stopni linij prostych, przecinających odpowiednie elementy $[n_1, n_2]$-znacznych odpowiedniości, zachodzących pomiędzy promieniami dwóch różnych utworów, wzgl. jednego i tego samego utworu podstawowego rodzaju zerowego.

STEFAN MAZURKIEWICZ.

O związku między istnieniem drugiej pochodnej uogólnionej, a ciągłością funkcyi.

Sur la relation entre l'existence de la dérivée seconde généralisée et la continuité de la fonction.

Wiadomo, że funkcya zmiennej rzeczywistej może być w pewnym punkcie x nieciągła, a zarazem posiadać w punkcie tym drugą pochodną uogólnioną, t. zn. granicę:

$$\lim_{h=0} \frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}. \tag{1}$$

Przykładem takiego zachowania się są w punkcie $x=0$ funkcye:

$$y = \operatorname{sgn} x$$

oraz:

$$y = \sin\frac{1}{x} \quad \text{dla} \quad x \neq 0,$$

$$y = 0 \quad \text{dla} \quad x = 0.$$

Jeżeli nie zrobimy żadnych zastrzeżeń co do natury rozważanych funkcyj, wówczas okoliczność powyższa, t. zn. nieciągłość a równocześnie istnienie drugiej pochodnej uogólnionej, zachodzić może nawet we wszystkich punktach pewnego przedziału, czego przykładem są t. zw. funkcye Hamela[1]), t. zn. nieciągłe rozwiązania równania funkcyjnego:

$$f(x+y) = f(x)+f(y).$$

[1]) Hamel, Math. Ann. **60**, str. 459—462. Sierpiński, Prace mat.-fiz. **26**, str. 128—129.

Funkcye te są zarazem nieograniczone i nie mierzalne w żadnym przedziale. Nasuwa się jednakowoż zagadnienie następujące:

Co można powiedzieć o zbiorze nieciągłości funkcyi $f(x)$, mającej w każdym punkcie wewnętrznym pewnego przedziału drugą pochodną uogólnioną, jeżeli zrobimy dodatkowe zastrzeżenia co do natury tej funkcyi (więc np. jeżeli założymy, że funkcya ma być mierzalna, ograniczona, przedstawialna analitycznie i t. p.)?

Zagadnienie to stanowi przedmiot pracy niniejszej, przyczem zastrzeżenie, które robię, polega na założeniu, że $f(x)$ jest funkcyą ograniczoną. Zamiast warunku istnienia skończonej drugiej pochodnej uogólnionej rozważam kolejno warunki słabsze, a mianowicie warunek:

$$\lim_{h=0} [f(x+h)+f(x-h)-2f(x)]=0 \tag{2}$$

oraz t. zw. warunek „gładkości":

$$\lim_{h=0} \frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h}=0, \tag{3}$$

grający pewną rolę w teoryi szeregów trygonometrycznych. Co do metody, posługuję się przedewszystkiem teoryą mnogości oraz pojęciami wprowadzonemi przez R. Baire'a.

I. Warunek:

$$\lim_{h=0} [f(x+h)+f(x-h)-2f(x)]=0.$$

Twierdzenie I.

Założenie: 1) funkcya $f(x)$ jest w przedziale (a, b) ograniczona i 2) w każdym punkcie wewnętrznym tego przedziału czyni zadość warunkowi:

$$\lim_{h=0} [f(x+h)+f(x-h)-2f(x)]=0. \tag{2}$$

Teza: 1) $f(x)$ jest klasy pierwszej w przedziale (a, b); 2) zbiór nieciągłości funkcyi $f(x)$ w uważanym przedziale posiada miarę Lebesgue'a równą 0.

Dowód tezy 1). Oznaczamy przez $m(x)$ i $M(x)$ odpowiednio minimum i maximum funkcyi $f(x)$ w punkcie x [1]. Niech będzie $a<x<b$. Istnieją ciągi $\{h_n\}$, $\{k_n\}$, takie, że dla każdego n punkty $x\pm h_n$, $x\pm k_n$ należą do przedziału (a, b) i że:

$$\lim_{n=\infty} h_n = \lim_{n=\infty} k_n = 0, \tag{3}$$

[1]) Baire, Leçons sur les fonctions discontinues, str. 70.

$$\begin{aligned} &\lim_{n=\infty} f(x+h_n)=m(x), \\ &\lim_{n=\infty} f(x+k_n)=M(x). \end{aligned} \tag{4}$$

Ze związków (2) i (3) wynika:

$$\begin{aligned} &\lim_{n=\infty} [f(x+h_n)+f(x-h_n)-2f(x)] \\ &=\lim_{n=\infty} [f(x+k_n)+f(x-k_n)-2f(x)]=0, \end{aligned} \tag{5}$$

stąd zaś i ze związków (4):

$$\begin{aligned} &\lim_{n=\infty} f(x-h_n)=2f(x)-m(x) \\ &\lim_{n=\infty} f(x-k_n)=2f(x)-M(x). \end{aligned} \tag{6}$$

Wobec znaczenia liczb $m(x)$ i $M(x)$ oraz związku (3), pociąga to za sobą nierówności:

$$\begin{aligned} &M(x)\geqq 2f(x)-m(x), \\ &m(x)\leqq 2f(x)-M(x), \end{aligned} \tag{7}$$

z których wynika:

$$\frac{M(x)+m(x)}{2}\leqq f(x)\leqq \frac{M(x)+m(x)}{2}. \tag{8}$$

Ostatecznie więc mamy wewnątrz przedziału (a, b):

$$f(x)=\frac{M(x)+m(x)}{2}. \tag{9}$$

Wewnątrz (a, b) jest zatem $f(x)$ sumą dwu funkcyj półciągłych $\frac{1}{2}M(x)$ i $\frac{1}{2}m(x)$ a więc [1]) sumą dwu funkcyj pierwszej klasy, a więc [2]), także funkcyą pierwszej klasy. Stąd wynika [3]), że $f(x)$ jest klasy pierwszej w całym przedziale (a, b).

Uwaga. Funkcya półciągła w punkcie x i spełniająca warunek (2) jes w tym punkcie ciągła. Wystarczy rozważyć przypadek półciągłości górnej:

$$f(x)=M(x) \tag{10}$$

[1]) Baire, l. c. str 77, 124.

[2]) Jestto natychmiastowa konsekwencya definicyi funkcyi klasy pierwszej.

[3]) Baire, l. c. str. 12.

istotnie związki (9) i (10) dają:
$$m(x) = M(x). \tag{11}$$

Dowód tezy 2). Zaczniemy od dowodu następującego lemmatu:

Lemmat. Założenie: $\varphi(x, y)$ jest nieujemną funkcyą klasy pierwszej w obszarze domkniętym, określonym przez nierówności:
$$\begin{aligned} & a \leqq x \leqq b \\ & |y| \leqq \begin{cases} x - a \\ b - x. \end{cases} \end{aligned} \tag{12}$$

Teza. Dla każdej pary liczb dodatnich α, β zbiór tych wartości x, dla których nierówność
$$|y| \leqq \beta \tag{13}$$
pociąga za sobą przynależność punktu x, y do obszaru domkniętego (12), oraz nierówność:
$$\varphi(x, y) \leqq \alpha \tag{14}$$
jest mnogością G_δ (mnogością Borela w ściślejszem znaczenia)[1].

Dowód lemmatu. Oznaczmy przez A obszar domknięty (12), przez B zbiór tych punktów obszaru (12) dla których ma miejsce nierówność (14), przez C — zbiór tych punktów x, dla których (13) pociąga za sobą przynależność punktu x, y do A oraz nierówność (14), wreszcie przez $D(x)$ — odcinek, złożony z punktów których odcięta $= x$, a rzędna czyni zadość nierówności (13). Widzimy odrazu, że mnogość C można też określić jako zbiór tych wartości x, dla których:
$$D(x) \subset B. \tag{15}$$

Wiadomo, że B jest zbiorem G_δ[2]; istnieje zatem zstępujący ciąg dziedzin dwuwymiarowych $\{B_n\}$, $n = 1, 2 \ldots$, taki, że:
$$B \equiv \mathfrak{D}\{B_n\}. \tag{16}$$
Oznaczam przez C_n zbiór tych wartości x, dla których
$$D(x) \subset B_n \tag{17}$$
i powiadam że:
$$C \equiv \mathfrak{D}\{C_n\}. \tag{18}$$

W samej rzeczy, jeżeli x należy do C, wówczas zachodzi (15), a więc

[1] Por. np. Mazurkiewicz, Teorya zbiorów G_δ. Wektor T. VI.

[2] Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, str. 390—391.

z uwagi na (16), związek (17) ma miejsce dla każdego $\bar{n}$, a wobec tego x należy do każdego C_n, zatem i do $\mathfrak{D}\{C_n\}$.

Odwrotnie, jeżeli x należy do tego ostatniego zbioru, wówczas należy do każdego C_n, $D(x)$ należy zatem do każdego B_n, a więc, wobec (16) do B. Tym sposobem x musi należeć do C. Związek (18) jest zatem udowodniony.

Załóżmy, że x należy do C_n i oznaczmy przez F_n zbiór punktów brzegowych mnogości B_n. Jest to zbiór domknięty, nie mający punktów wspólnych z B_n (gdyż B_n, będąc dziedziną, zawiera tylko punkty wewnętrzne), a więc wobec (17) nie mający punktów wspólnych z odcinkiem $D(x)$, który jest oczywiście również zbiorem domkniętym. Odległość zbiorów F_n i $D(x)$ jest wobec tego liczbą dodatnią, którą oznaczymy przez γ. Niech będzie
$$|x - x_1| < \gamma. \tag{19}$$
Oznaczmy przez p dowolny punkt odcinka $D(x_1)$ i przeprowadźmy z p prostopadłą $\overline{pq}$ do odcinka $D(x)$. Długość odcinka $\overline{pq}$ jest równa $|x - x_1|$, każdy zatem punkt tego odcinka jest od punktu q, a tem samem od odcinka $D(x)$ odległy o mniej niż o γ. Ponieważ każdy punkt zbioru F_n jest od $D(x)$ odległy conajmniej o γ, więc żaden punkt odcinka $\overline{pq}$ nie należy do F_n. Gdyby punkt p nie należał do B_n, wówczas, z uwagi na to, że q do $D(x)$, więc i do B_n należy, odcinek $\overline{pq}$ musiałby zawierać punkt brzegowy zbioru B_n, innemi słowy punkt zbioru F_n[1]. Ponieważ tak nie jest, więc p należy do B_n, a ponieważ p jest dowolnym punktem odcinka $D(x_1)$, więc:
$$D(x_1) \subset B_n \tag{20}$$
i co zatem idzie:
$$x \subset C_n. \tag{21}$$

Jeżeli więc C_n zawiera x, to zawiera zarazem wszystkie punkty pewnego dostatecznie małego liniowego otoczenia punktu x; a zatem C_n składa się z wewnętrznych (względem osi odciętych) punktów, t. zn. jest dziedziną liniową. Wobec (18) wynika stąd, że C jest zbiorem G_δ i lemmat nasz jest udowodniony.

Dowód twierdzenia. Przechodzimy teraz do dowodu naszego twierdzenia. Oznaczmy przez E zbiór nieciągłości funkcyi $f(x)$, zawartych wewnątrz przedziału (a, b), i przypuśćmy że ma on miarę dodatnią. Można wówczas dobrać $\delta > 0$ tak, aby już zbiór E_1 tych punktów w których oscylacya

[1] Hausdorff, l. c. str. 247.

funkcyi $f(x)$ jest $\geqq 2\delta$, miał miarę dodatnią. Zbiór punktów wewnętrznych przedziału (a, b) dla których nierówność

$$|h| \leqq \frac{1}{n} \tag{22}$$

pociąga za sobą nierówności:

$$a \leqq x - |h| < x + |h| \leqq b, \tag{23}$$

$$|f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)| \leqq \frac{\delta}{6}, \tag{24}$$

oznaczymy przez G_n. Funkcya $f(x)$ jest, jakeśmy to udowodnili, klasy pierwszej, istnieje zatem ciąg funkcyj w przedziale (a, b) ciągłych $\{f_m(x)\}$, taki że:

$$\lim_{m=\infty} f_m(x) = f(x) \qquad a \leqq x \leqq b. \tag{25}$$

Stąd wynika natychmiast, że dla każdej pary wartości x, h, czyniącej zadość nierównościom

$$a \leqq x \leqq b \qquad |h| \leqq \begin{cases} x - a \\ b - x \end{cases} \tag{26}$$

zachodzi związek:

$$\lim_{m=\infty} |f_m(x+h) + f_m(x-h) - 2f_m(x)| = |f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)|. \tag{27}$$

Ponieważ funkcya $|f_m(x+h) + f_m(x-h) - 2f_m(x)|$ jest w obszarze domkniętym (26) ciągła względem obu zmiennych x i h, więc $|f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)|$ jest w tym obszarze klasy pierwszej. Biorąc pod uwagę, że nierówności (23) stanowią tylko stwierdzenie przynależności punktu x, h do obszaru domkniętego (26), możemy zastosować do funkcyi tej lemmat tylko co udowodniony, kładąc h zamiast y, $\frac{1}{n}$ zamiast β, $\frac{\delta}{6}$ zamiast α wreszcie $|f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)|$ zamiast $\varphi(x, y)$. Zbiór C, występujący w lemmacie, stanie się wtedy identyczny z G_n, a więc G_n jest zbiorem G_δ, eo ipso więc zbiorem mierzalnym [1]. Z uwagi na warunek (2), każdy punkt wewnętrzny przedziału (a, b) należy do jednej z mnogości G_n. W szczególności dotyczy to punktów zbioru E_1. Kładąc zatem:

$$E_1^{(n)} \equiv E_1 \times G_n \tag{28}$$

mamy:

$$E_1 \equiv \mathfrak{M}\{E_1^{(n)}\}. \tag{29}$$

[1]) Hausdorff, l. c. str. 412, 417.

Ponieważ ciąg $\{G_n\}$ jest, jak to odrazu widać, wstępujący, więc i ciąg $\{E_1^{(n)}\}$ będzie wstępujący; przytem zbiory $E_1^{(n)}$, jako przekroje zbiorów mierzalnych są mierzalne. Jeżeli oznaczymy ogólnie przez $\mu(A)$ miarę zbioru A, wówczas mieć będziemy, wobec (29). [1]

$$\lim_{n=\infty} \mu(E_1^{(n)}) = \mu(E_1) > 0, \tag{30}$$

a zatem istnieje wskaźnik p taki, że:

$$\mu(E_1^{(p)}) > 0. \tag{31}$$

Niech E_2 oznacza zbiór doskonały o mierze dodatniej zawarty w $E_1^{(p)}$. Zbiór taki zawsze istnieje [2]. Tworzymy dalej nowy zbiór E_3, zaliczając do niego każdy punkt x zbioru E_2, jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ mnogość punktów, należących równocześnie do E_2 i do przedziału $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, posiada miarę dodatnią. Łatwo widzieć że zbiór E_3 jest doskonały, i że w każdym podprzedziale I przedziału (a, b):

$$\mu(I \times E_2) \equiv \mu(I \times E_3). \tag{32}$$

Na mocy (32) i określenia E_3 dla każdego $\varepsilon > 0$ i każdego x zawartego w E_3, część zbioru E_3 leżąca w przedziale $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ jest mnogością o mierze dodatniej. Stąd znowu z łatwością wynika, że jeżeli ze zbioru E_3 usuniemy jakikolwiek zbiór nigdziegęsty na E_3, wówczas mnogość, która pozostanie, mieć będzie miarę dodatnią. Oznaczmy przez E_4 zbiór punktów w których funkcya $f(x)$ rozpatrywana w odniesieniu do zbioru E_3 posiada oscylacyę $\geqq \frac{\delta}{12}$ i połóżmy:

$$E_5 \equiv E_3 - E_4, \tag{33}$$

$f(x)$ jest klasy pierwszej, a więc jest funkcyą punktowo nieciągłą na każdym zbiorze doskonałym, [3] w szczególności więc na E_3; wobec tego zbiór E_4 jest nigdziegęsty na E_3, na mocy więc tego, cośmy uprzednio powiedzieli, zbiór (33) posiada miarę dodatnią. Niech dalej E_6 oznacza zbiór doskonały o mierze również dodatniej, zawarty w E_5, zaś x_0, taki punkt zbioru E_6, w którym gęstość tego ostatniego równa się jedności; punkt taki zawsze istnieje. Dobieramy teraz liczbę $\eta > 0$ w taki sposób, aby zachodziły okoliczności następujące:

$$(\Gamma_1) \qquad \eta \leqq \frac{1}{p}$$

[1]) Hausdorff, l. c. str. 411.
[2]) l. c. str. 413.
[3]) Voir p. e. Borel: Leçons sur les fonctions de variables réeles str. 99.

(Γ_2) — dla każdego h czyniącego zadość nierówności:

$$|h| \leqq \eta \tag{34}$$

miara tej części zbioru E_6, która zawiera się w przedziale $(x_0 - h, x_0 + h)$ jest $\geqq \frac{3}{2} h$. Można zadośćuczynić temu warunkowi, gdyż gęstość zbioru E_6 w punkcie x_0 równa się jedności;

(Γ_3) — jeżeli $x_0 + h$ należy do E_6 i h czyni zadość nierówności (34), wówczas:

$$|f(x_0 + h) - f(x_0)| \leqq \frac{\delta}{6}. \tag{35}$$

I temu warunkowi można uczynić zadość przez dobór dostatecznie małego η, gdyż oscylacya funkcyi $f(x)$ rozważanej na zbiorze E_3, tembardziej więc na zbiorze E_6 jest w punkcie x_0 niewiększa niż $\frac{\delta}{12}$.

Oznaczamy dalej przez E_7 zbiór tych punktów przedziału $(x_0 - \eta, x_0 + \eta)$, w których:

$$f(x) \leqq f(x_0) + \frac{\delta}{6}. \tag{36}$$

Z uwagi na (Γ_3) należą do E_7 wszystkie zawarte w przedziale $(x_0 - \eta, x_0 + \eta)$ punkty zbioru E_6. Wobec tego i wobec (Γ_2) mamy:

$$\mu(E_7) \geqq \tfrac{3}{2}\eta. \tag{37}$$

Z drugiej strony x_0 należy do E_1, a więc:

$$M(x_0) - m(x_0) \geqq 2\delta, \tag{38}$$

co, w związku z równością (9) daje:

$$m(x_0) \leqq f(x_0) - \delta. \tag{39}$$

Wobec tego znaleść można punkt x_1, czyniący zadość warunkom:

$$|x_1 - x_0| \leqq \frac{\eta}{6}, \tag{40}$$

$$f(x_1) \leqq f(x_0) - \tfrac{5}{6}\delta. \tag{41}$$

Z uwagi na tę ostatnią nierówność oraz na (Γ_3) punkt x_1 nie należy do E_6. Jeżeli A jest zbiorem mierzalnym i jeżeli zastosujemy przekształcenie liniowe:

$$\bar{x} = ax + b, \tag{42}$$

wówczas mnogość A przejdzie w mnogość znów mierzalną $\bar{A}$, przyczem będzie: [1])

$$\mu(\bar{A}) = a\mu(A). \tag{43}$$

W szczególności przez zastosowanie specyalnego przekształcenia:

$$\bar{x} = 2x - c \tag{44}$$

przechodzi mnogość A w zbiór, który oznaczymy przez $S(c, A)$ i dla którego mamy:

$$\mu[S(c, A)] = 2\mu(A). \tag{45}$$

Można też określić $S(c, A)$, jako zbiór punktów, symetrycznie do punktu c położonych względem któregokolwiek punktu mnogości A.

Oznaczmy teraz przez E_8 tę część zbioru E_6, która zawiera się w przedziale $\left(x_0 - \frac{\eta}{3}, x_0 + \frac{\eta}{3}\right)$ i połóżmy:

$$E_9 = E_7 \times S(x_1, E_8); \tag{46}$$

powiadam że zbiór E_9 nie jest pusty.

Przedewszystkiem, na mocy (Γ_2) mamy:

$$\mu(E_8) \geqq \frac{3}{2} \cdot \frac{\eta}{3} = \frac{\eta}{2}, \tag{47}$$

a zatem, wobec (45)

$$\mu[S(x_1, E_8)] \geqq \eta. \tag{48}$$

Niech y będzie dowolnym punktem zbioru $S(x_1, E_8)$. Punkt $\frac{y + x_1}{2}$ należy do E_8, zatem

$$\left|\frac{y + x_1}{2} - x_0\right| \leqq \frac{\eta}{3}, \tag{49}$$

$$\begin{aligned} |y - x_0| &= \left|2\left(\frac{y + x_1}{2} - x_0\right) + (x_0 - x_1)\right| \\ &\leqq 2\left|\frac{y + x_1}{2} - x_0\right| + |x_0 - x_1| \leqq \frac{2}{3}\eta + \frac{\eta}{6} < \eta. \end{aligned} \tag{50}$$

Wobec tego $S(x_1, E_8)$ leży, taksamo jak E_7 w przedziale, $(x_0 - \eta, x_0 + \eta)$, którego miara $= 2\eta$. Gdyby zbiór E_9 był pusty, wówczas miara zbioru $E_7 + S(x_1, E_8)$ z jednej strony nie mogłaby przekraczać 2η, z drugiej mu-

[1]) Wyraźnego sformułowania tego twierdzenia (bez użycia pojęcia całki) nie spotkałem. Dowód nie przedstawia trudności.

siałaby równać się $\mu(E_7)+\mu[S(x_1, E_8)]$, a zatem na mocy (37) i (48) musiałaby przekraczać $\frac{5}{2}\eta$. Jest to oczywiście niemożliwe, a więc zbiór (46) nie jest pusty. Niech x oznacza dowolny punkt tego zbioru. Ponieważ x należy do mnogości $S(x_1, E_8)$, więc punkt $\frac{x+x_1}{2}$ należy do E_8, a więc i do $E_1^{(p)}$, nierówność więc

$$|h| \leqq \frac{1}{p}, \tag{51}$$

a tymbardziej wobec (Γ_1) nierówność

$$|h| \leqq \eta \tag{52}$$

pociąga za sobą:

$$\left| f\left(\frac{x+x_1}{2}+h\right)+f\left(\frac{x+x_1}{2}-h\right)-2f\left(\frac{x+x_1}{2}\right)\right| \leqq \frac{\delta}{6}. \tag{53}$$

Ponieważ x i x_1 leżą w przedziale $(x_0-\eta, x_0+\eta)$, więc

$$\left|\frac{x-x_1}{2}\right| \leqq \frac{2\eta}{2}=\eta. \tag{54}$$

Nierówność zatem (53) będzie w szczególności spełniona dla $h=\frac{x-x_1}{2}$, w tym przypadku daje ona:

$$\left| f(x)+f(x_1)-2f\left(\frac{x+x_1}{2}\right)\right| \leqq \frac{\delta}{6}. \tag{55}$$

Z uwagi na przynależność punktu $\frac{x+x_1}{2}$ do E_8 i eo ipso do E_6 mamy:

$$f\left(\frac{x+x_1}{2}\right) \geqq f(x_0)-\frac{\delta}{6}. \tag{56}$$

Stąd i ze związku (41) mamy:

$$f\left(\frac{x+x_1}{2}\right)-f(x_1) \geqq \frac{2}{3}\delta. \tag{57}$$

Nierówność (55) możemy jednak napisać w postaci:

$$f\left(\frac{x+x_1}{2}\right)-f(x_1)-\frac{\delta}{6} \leqq f(x)-f\left(\frac{x+x_1}{2}\right) \leqq f\left(\frac{x+x_1}{2}\right)-f(x_1)+\frac{\delta}{6}. \tag{58}$$

Pierwsza jej część daje wobec (57)

$$f(x)-f\left(\frac{x+x_1}{2}\right) \geqq \frac{2}{3}\delta-\frac{\delta}{6}=\frac{\delta}{2}, \tag{59}$$

stąd zaś i z nierówności (56) otrzymujemy:

$$f(x) \geqq f(x_0)+\frac{\delta}{3}. \tag{60}$$

Równocześnie jednak musi w punkcie x zachodzić (36), gdyż x należy do E_7. Oczywiście jest to niemożliwe, gdyż nierówności (36) i (60) są sprzeczne. Założenie więc, że miara zbioru E jest dodatnia, prowadzi do sprzeczności, a zatem jest fałszywe i druga teza naszego twierdzenia jest w zupełności udowodniona.

Nasuwa się teraz zagadnienie następujące, czy twierdzenie nasze jest najdalej idącem, jakie udowodnić można; w szczególności, czy można zbudować funkcyę ograniczoną $f(x)$, któraby wewnątrz przedziału (a, b) czyniła zadość warunkowi (2), a zarazem posiadała nieprzeliczalny zbiór punktów nieciągłości. Zagadnienia tego nie byłem w stanie rozwiązać. Jeżeli natomiast H jest dowolnym zbiorem przeliczalnym zawartym w (a, b), wówczas istnieje funkcya ograniczona $f(x)$ spełniająca warunek (2) wewnątrz (a, b), nieciągła we wszystkich punktach zbioru H i tylko w tych punktach. Aby funkcyę taką zbudować, bierzemy pod uwagę szereg nieskończony $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$, absolutnie zbieżny, i ustawiamy punkty zbioru H w ciąg nieskończony $\{c_n\}$. Następnie określamy ciąg funkcyj $\{\varphi_n(x)\}$ w następujący sposób: dla wszystkich $x \leqq c_n$ ma być $\varphi_n(x)$ określoną i czynić zadość nierówności:

$$|\varphi_n(x)| \leqq 1; \tag{61}$$

dalej ma być $\varphi_n(x)$ ciągła dla $x < c_n$, nieciągła lewostronnie dla $x = c_n$. Budowa takiej funkcyi może być oczywiście uskuteczniona w najrozmaitszy sposób. Z kolei określamy w przedziale (a, b) ciąg funkcyj $\{\psi_n(x)\}$ przez wzory:

$$\begin{aligned} \psi_n(x) &= \varphi_n(x) && \text{dla} \quad a \leqq x \leqq c_n, \\ \psi_n(x) &= 2\varphi_n(c_n)-\varphi_n(2c_n-x) && \text{dla} \quad c_n < x \leqq b. \end{aligned} \tag{62}$$

Jest wówczas w przedziale (a, b)

$$|\psi_n(x)| \leqq 3; \tag{63}$$

w punktach różnych od c_n jest $\psi_n(x)$ ciągłą, w punkcie c_n nieciągłą. Warunek (2) jest jednak i w punkcie c_n (o ile punkt ten leży wewnątrz (a, b)) spełniony. Istotnie:

$$\lim_{h=0} [\psi_n(x+h)+\psi_n(x-h)-2\psi_n(x)]_{x=c_n}$$
$$=\lim_{h=0} [2\varphi_n(c_n)-\varphi_n(c_n-h)+\varphi_n(c_n-h)-2\varphi_n(c_n)]=0 \tag{64}$$

w pozostałych punktach wewnętrznych przedziału (a, b) warunek (2) jest spełniony z powodu ciągłości. Kładziemy teraz:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \psi_n(x). \tag{65}$$

Mamy, z uwagi na (63):

$$|f(x)| \leqq \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|, \tag{66}$$

unkcya więc $f(x)$ jest w przedziale (a, b) ograniczona. Przy pomocy rozumowań znanych w teoryi zagęszczania osobliwości, a których tu powtarzać nie będę, udowodnić można z łatwością, że $f(x)$ posiada też pozostałe własności wymagane.

II. Warunek „gładkości".

Twierdzenie II.

Założenie: funkcya $f(x)$ jest w przedziale (a, b) ograniczona i spełnia wewnątrz przedziału tego warunek „gładkości":

$$\lim_{h=0} \frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h}=0. \tag{3}$$

Teza: zbiór nieciągłości funkcyi $f(x)$ jest nigdziegęsty w przedziale (a, b).

Dowód oprzemy na następującym lemmacie.

Lemmat. Założenie: 1) funkcya $f(x)$ jest ograniczona i punktowo nieciągła w przedziale (c, d), 2) $f(x)$ jest nieciągła w jednym conajmniej punkcie wewnątrz (c, d), 3) σ i τ są liczbami dodatniemi.

Teza: istnieje przedział (c', d'), zawarty wewnątrz (c, d) i taki, że dla każdego zawartego w nim punktu x, przy jednej conajmniej wartości h spełniającej warunek

$$|h| \leqq \tau \tag{67}$$

zachodzi nierówność:

$$\left|\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h}\right| \geqq \sigma. \tag{68}$$

Dowód lemmatu. Na mocy założenia 2) wewnątrz (c, d) istnieje punkt x_0, w którym funkcya $f(x)$ jest nieciągła, niech α oznacza jej oscylacyę w tym punkcie. Dobieramy liczbę dodatnią β, którąby spełniała nierówności:

$$\beta \leqq \frac{d-x_0}{2}, \tag{69}$$

$$\beta \leqq \frac{\tau}{2}, \tag{70}$$

$$\beta \leqq \frac{\alpha}{16\sigma} \tag{71}$$

i oznaczamy przez K zbiór tych punktów przedziału (c, d), w których oscylacya funkcyi $f(x)$ jest $\geqq \frac{\alpha}{4}$. Z powodu założenia 1) jest K zbiorem nigdziegęstym; istnieje zatem wewnątrz przedziału $(x_0, x_0+2\beta)$ punkt x_1 nie należący do K (z uwagi na (69) przedział $(x_0, x_0+2\beta)$ zawiera się w (c, d)). Punkt $x_2=\frac{x_0+x_1}{2}$ leży wówczas wewnątrz $(x_0, x_0+\beta)$. Dobieramy teraz liczbę dodatnią γ tak, aby czyniła zadość warunkom następującym:

(Δ_1) przedział $(x_1-\gamma, x_1+\gamma)$ leży wewnątrz przedziału $(x_0, x_0+2\beta)$.

(Δ_2) oscylacya funkcyi $f(x)$ w przedziale $(x_1-\gamma, x_1+\gamma)$ nie przekracza liczby $\frac{\alpha}{4}$. Warunkowi powyższemu można zadośćuczynić, gdyż w samym punkcie x_1, jako nie należącym do K, oscylacya funkcyi jest mniejsza niż $\frac{\alpha}{4}$.

Powiadam, że mogę położyć $c'=x_2-\frac{1}{4}\gamma$, $d'=x_2+\frac{1}{4}\gamma$, innemi słowy, że przedział $(x_2-\frac{1}{4}\gamma, x_2+\frac{1}{4}\gamma)$ jest przedziałem szukanym. Aby to udowodnić, załóżmy, że x jest dowolnym punktem tego przedziału. Z uwagi na to, że w punkcie x_0 oscylacya $f(x)$ jest równa α, możemy w przedziale $(x_0-\frac{1}{2}\gamma, x_0+\frac{1}{2}\gamma)$ znaleść dwa takie punkty x_3, x_4, że

$$|f(x_3)-f(x_4)| \geqq \frac{\alpha}{2}. \tag{72}$$

Połóżmy następnie

$$h_1=x-x_3, \quad h_2=x-x_4. \tag{73}$$

Ponieważ przedział $(x_1-\gamma, x_1+\gamma)$ o długości 2γ zawarty jest w przedziale $(x_0,\ x_0+2\beta)$ o długości 2β, więc musi być

$$\gamma \leqq \beta \tag{74}$$

Mamy dalej, z uwagi na to, że x_3, x_4 zawarte są w $(x_0-\frac{1}{2}\gamma,\ x_0+\frac{1}{2}\gamma)$, x w $(x_2-\frac{1}{4}\gamma,\ x_2-\frac{1}{4}\gamma)$ wreszcie x_2 w $(x_0,\ x_0+\beta)$ nierówności:

$$\left.\begin{aligned} &|\,h_1\,| = |\,(x-x_2)+(x_2-x_0)+(x_0-x_3)\,| \\ &\leqq |\,x_1-x_2\,|+|\,x_2-x_0\,|+|\,x_0-x_3\,| \leqq \tfrac{1}{4}\gamma+\beta+\tfrac{1}{2}\gamma < \beta+\gamma \leqq 2\beta \\ &|\,h_2\,| = |\,(x-x_2)+(x_2-x_0)+(x_0-x_4)\,| \\ &\leqq |\,x-x_2\,|+|\,x_2-x_0\,|+|\,x_0-x_4\,| \leqq \tfrac{1}{4}\gamma+\beta+\tfrac{1}{2}\gamma < \beta+\gamma \leqq 2\beta. \end{aligned}\right. \tag{75}$$

Z uwagi więc na (70):

$$\left.\begin{aligned} &|\,h_1\,| \\ &|\,h_2\,| \end{aligned}\right\} \leqq \tau. \tag{76}$$

Mamy dalej:

$$\begin{aligned} x+h_1 &= 2x-x_3 = 2x_2-x_0+2(x-x_2)+(x_0-x_3) \\ &= x_1+2(x-x_2)+(x_0-x_3), \end{aligned} \tag{77}$$

$$|\,x+h_1-x_1\,| \leqq 2\,|\,x-x_2\,|+|\,x_0-x_3\,| \leqq \gamma, \tag{78}$$

punkt zatem $x+h_1$ należy do przedziału $(x_1-\gamma,\ x_1+\gamma)$; taksamo dowodzimy, że do przedziału tego należy punkt $x+h_2$. Wobec warunku (Δ_2) mamy wskutek tego:

$$|\,f(x+h_1)-f(x+h_2)\,| \leqq \frac{\alpha}{4}. \tag{79}$$

Mamy dalej, uwzględniając (72) i (79):

$$\begin{aligned} &|\,\{f(x+h_1)+f(x-h_1)-2f(x)\}-\{f(x+h_2)+f(x-h_2)-2f(x)\}\,| \\ &= |\,(f(x+h_1)-f(x+h_2))+(f(x-h_1)-f(x-h_2)\,| \\ &= |\,(f(x+h_1)-f(x+h_2))+(f(x_3)-f(x_4))\,| \\ &\geqq |\,f(x_3)-f(x_4)\,|-|\,f(x+h_1)-f(x+h_2)\,| \\ &\geqq \frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha}{4}=\frac{\alpha}{4}. \end{aligned} \tag{80}$$

Jeżeli różnica dwu liczb jest co do wartości bezwzględnej $\geqq \frac{\alpha}{4}$, wówczas jedna conajmniej z tych liczb musi być $\geqq \frac{\alpha}{8}$. Zachodzi więc jedna conajmniej z dwu nierówności:

$$\begin{aligned} &|\,f(x+h_1)+f(x-h_1)-2f(x)\,| \geqq \frac{\alpha}{8}, \\ &|\,f(x+h_2)+f(x-h_2)-2f(x)\,| \geqq \frac{\alpha}{8}. \end{aligned} \tag{81}$$

Z drugiej strony, wobec (75) mamy:

$$\begin{aligned} &\left|\frac{f(x+h_1)+f(x-h_1)-2f(x)}{h_1}\right| \geqq \frac{|\,f(x+h_1)+f(x-h_1)-2f(x)\,|}{2\beta} \\ &\left|\frac{f(x+h_2)+f(x-h_2)-2f(x)}{h_2}\right| \geqq \frac{|\,f(x+h_2)+f(x-h_2)-2f(x)\,|}{2\beta}. \end{aligned} \tag{82}$$

Uwzględniając (71), widzimy stąd, że zachodzić musi jedna conajmniej z nierówności:

$$\begin{aligned} &\left|\frac{f(x+h_1)+f(x-h_1)-2f(x)}{h_1}\right| \geqq \frac{\alpha}{16\beta} \geqq \sigma \\ &\left|\frac{f(x+h_2)+f(x-h_2)-2f(x)}{h_2}\right| \geqq \frac{\alpha}{16\beta} \geqq \sigma. \end{aligned} \tag{83}$$

Ponieważ, z uwagi na (76), h_1 i h_2 czynią zadość nierówności (67), więc widzimy, że w każdym punkcie x przedziału $(x_2-\frac{1}{4}\gamma,\ x_2+\frac{1}{4}\gamma)$, nierówność (68) jest spełniona przy jednej conajmniej wartości h, sprawdzającej (67).

Co więcej przedział $(x_2-\frac{1}{4}\gamma,\ x_2+\frac{1}{4}\gamma)$ leży wewnątrz $(c,\ d)$. W samej rzeczy mamy wobec Δ_1:

$$\begin{aligned} x_2-\tfrac{1}{4}\gamma &= \frac{x_0+x_1}{2}-\tfrac{1}{4}\gamma = \frac{x_0}{2}+\tfrac{1}{2}(x_1-\tfrac{1}{2}\gamma) > \frac{x_0}{2} \\ &+\tfrac{1}{2}(x_1-\gamma) \geqq \frac{x_0}{2}+\frac{x_0}{2} > c, \end{aligned} \tag{83a}$$

$$x_2+\tfrac{1}{4}\gamma = \frac{x_0+x_1}{2}+\tfrac{1}{4}\gamma < x_1+\tfrac{1}{4}\gamma < x_1+\gamma < x_0+2\beta \leqq d. \tag{83b}$$

Przedział powyższy jest więc przedziałem $(c',\ d')$ i lemmat jest udowodniony.

Dowód twierdzenia II. Załóżmy, że teza twierdzenia jest fałszywa dla pewnej funkcyi $f(x)$, sprawdzającej warunki założenia. Przedział $(a,\ b)$ zawiera wówczas przedział $(c,\ d)$, w którym zbiór nieciągłości funkcyi $f(x)$ jest wszędziegęsty. Określamy teraz ciąg przedziałów $\{(c_n,\ d_n)\}$, $n=0,\ 1,\ 2..$ w następujący sposób:

1) Przedział (c_0, d_0) jest identyczny z przedziałem (c, d).

2) Załóżmy że przedział (c_n, d_n) został określony, (c_{n+1}, d_{n+1}) jest takim przedziałem zawartym wewnątrz (c_n, d_n), że dla każdego punktu x należącego do (c_{n+1}, d_{n+1}) zachodzi nierówność

$$\left| \frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h} \right| \geqq 1 \tag{84}$$

przy jednej conajmniej wartości h, spełniającej warunek:

$$|h| \leqq \frac{1}{n+1}. \tag{85}$$

Przedział taki istnieje na mocy lemmatu. W samej rzeczy, $f(x)$ jest na mocy założenia funkcyą ograniczoną w przedziale (a, b), więc i w (c, d). Ponieważ $f(x)$ spełnia wewnątrz (a, b) warunek (3), więc tembardziej słabszy warunek (2), zatem na mocy twierdzenia I jest $f(x)$ klasy pierwszej, a wskutek tego punktowo nieciągłą w przedziale (a, b) i tembardziej w (c, d). Zbiór nieciągłości funkcyi $f(x)$ jest na mocy założenia wszędziegęsty na (c, d), wewnątrz więc tego przedziału istnieją punkty, w których $f(x)$ jest nieciągła. Wreszcie liczby 1, $\frac{1}{n+1}$ są dodatnie. Widzimy tym sposobem, że spełnione są założenia lemmatu, więc i teza jego musi być prawdziwa, a teza ta właśnie stwierdza istnienie przedziału (c_{n+1}, d_{n+1}).

Ciąg przedziałów $\{c_n, d_n)\}$, jest zstępujący, istnieje więc punkt x' zawarty we wszystkich przedziałach tego ciągu. Ponieważ x' należy do (c_n, d_n), więc dla każdego naturalnego n istnieje taka liczba h_n, dla której zachodzą nierówności:

$$|h_n| \leqq \frac{1}{n}, \tag{86}$$

$$\left| \frac{f(x'+h_n)+f(x'+h_n)-2f(x')}{h_n} \right| \geqq 1. \tag{87}$$

Wobec (86) mamy:

$$\lim_{n=\infty} h_n = 0, \tag{88}$$

stąd zaś i z nierówności (87), wynika:

$$\limsup_{h=0} \left| \frac{f(x'+h)+f(x'-h)-2f(x')}{h} \right| \geqq 1. \tag{89}$$

Z drugiej strony, x' leży w (c, d), zatem wewnątrz (c, d), a tembardziej wewnątrz (a, b). Stąd wynika że w punkcie tym zachodzi (3), mamy

zatem:

$$\lim_{h=0} \left| \frac{f(x'+h)+f(x'-h)-2f(x)}{h} \right| = 0. \tag{90}$$

Związki (89) i (90) są oczywiście sprzeczne. A więc założenie, że zbiór nieciągłości funkcyi $f(x)$ jest wszędziegęsty w pewnym podprzedziale przedziału (a, b) prowadzi do sprzeczności, zbiór ten musi być zatem nigdziegęsty w (a, b). c. b. d. o.

Powstaje teraz znowu zagadnienie, czy z założeń naszego twierdzenia nie dałoby się wyprowadzić tezy dalej idącej. W szczególności, czy istnieje funkcya, spełniająca warunki twierdzenia II, której nieciągłości tworzyłyby zbiór nieprzeliczalny, lub choćby nieprzywiedlny. Na pytania te nie umiem dać odpowiedzi.

Twierdzenia I i II prowadzą natychmiast do następującego rezultatu:

Twierdzenie III.

Założenie: $f(x)$ jest funkcyą ograniczoną w przedziale (a, b), i mającą w każdym punkcie wewnętrznym tego przedziału skończoną drugą pochodną uogólnioną (1).

Teza: $f(x)$ jest w (a, b) klasy pierwszej, przyczem zbiór nieciągłości funkcyi $f(x)$ jest w (a, b) nigdziegęsty i posiada miarę zero.

Warszawa 6/XI 1918 r.

RÉSUMÉ.

Je démontre dans cette note les résultats suivants:

I. $f(x)$ étant une fonction bornée dans l'intervalle (a, b) et remplissant la condition

$$\lim_{h=0} [f(x+h)+f(x-h)-2f(x)] = 0$$

à l'interieur de cet intervalle, 1) l'ensemble de discontinuités de $f(x)$ dans (a, b) est de mesure nulle, 2) $f(x)$ est de classe 1 dans (a, b).

II. $f(x)$ étant une fonction bornée dans l'intervalle (a, b) et remplissant la condition

$$\lim_{h=0} \frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h} = 0$$

à l'intérieur de (a, b), l'ensemble de discontinuités de $f(x)$ est non dense dans (a, b). Il en résulte immédiatement:

III. Si la fonction $f(x)$ est bornée dans (a, b) et admet à l'intérieur de (a, b) une dérivée seconde generalisée, alors 1) $f(x)$ est de classe 1 dans (a, b); 2) l'ensemble de discontinuités de $f(x)$ est de mesure nulle et non dense dans (a, b).