

JAN KROO.

## Przyczynek do teorii dyspersji i magnetorotacji światła w gazach.

Contribution à la théorie de la dispersion et de la rotation magnétique de la lumière dans les gaz.

Wiadomo, że klasyczny wzór na zależność współczynnika załamania od długości fali światła oddaje wprawdzie bardzo wiernie przebieg dyspersji, lecz zarazem prowadzi do fałszywej wartości ładunku właściwego elektronu<sup>1)</sup>. Pogląd Drudego, że elektronom „dyspersyjnym“ i elektronom, występującym w promieniach katodowych, przypisać należy odmienne ładunki właściwe, nie może się dziś utrzymać ze względu na niewątpliwą uniwersalność tej zasadniczej wielkości. Istotnie też, wspomniana sprzeczność zgoła inny ma powód, albowiem wynika—jak poniżej okażemy—z uproszczenia, polegającego na pominięciu w rachunku różnokierunkowości sił, wiążących elektrony w cząsteczkach<sup>2)</sup>. Zdaje się, że sprawa wpływu anizotropii molekularnej na zjawiska optyczne w ośrodkach izotropowych nie została jeszcze, ze stanowiska teorii oscylatorów, dostatecznie wyświetlona<sup>3)</sup>. W pracy niniejszej ta kwestya stanowi właściwy przedmiot naszych rozważań.

Pomijając na razie indywidualne różnice budowy cząsteczek, uwzględnimy różnokierunkowość sił, działających na elektrony, sumarycznie,—przy pomocy ogólnikowego obrazu anizotropowego oscylatora. Na tej podstawie zbadamy dyspersję oraz magnetorotację światła w ga-

<sup>1)</sup> Por. Drude, Lehrbuch der Optik, II Aufl., Leipzig, Teubner, 1906.

<sup>2)</sup> Podobnie, w teorii modeli Bohra pominięcie anizotropii wiązania prowadzi do fałszywej wartości na ładunek właściwy elektronu. Por. Sommerfeld, Ann. d. Phys. **53**, str. 497 (1917).

<sup>3)</sup> Mimo że anizotropię wiązań uwzględniano wielokrotnie, np. w teorii efektu Zeemana (Voigt), w teorii kryształów (Voigt), płynów anizotropowych (Born). Por. Voigt, Magneto- und Elektrooptik, Leipzig, Teubner, 1908. Born, Ann. d. Phys. **54**, str. 177 (1918). Tamże dokładniejsza literatura.

zach<sup>1)</sup>. Chodzi nam przytem nie tyle o wyłómaczenie danych doświadczalnych, ile o rozważenie konsekwencji, płynących z obranego punktu wyjścia. Elementarna teoria, której zarys podajemy, stanowi uogólnienie teorii klasycznej, i jest - jak tamta - czysto fenomenologiczna, gdyż wprowadza anizotropię formalnie, nie wchodząc bliżej w kwestyę mechanizmu wiązania quasi-elastycznego.

Wobec niezwalczonych jeszcze trudności, które nastęrczają się nowej teorii dyspersji Debyego i Sommerfelda<sup>2)</sup>, opartej na modelach Bohra, teoria oscylatorów na razie ma być niewątpliwie uprawniony.

### § 1. Obliczenie dyspersji.

Gaz badany będziemy uważali za substancję mono-elektronową, t. j. złożoną z oscylatorów jednej kategorii. Oznaczmy przez  $\xi, \eta, \zeta$  spórzędne wychylenia elektronu (z położenia równowagi) względem dowolnie skierowanych osi prostokątnego układu. Uogólniając punkt wyjścia teorii klasycznej, założymy, że energia potencjalna  $U$  oscylatora jest funkcją jednorodną stopnia drugiego spórzędnych:  $\xi, \eta, \zeta$ :

$$U = \frac{a_{11}}{2} \xi^2 + \frac{a_{22}}{2} \eta^2 + \frac{a_{33}}{2} \zeta^2 + a_{12} \xi \eta + a_{13} \xi \zeta + a_{23} \eta \zeta. \quad (1)$$

Równania swobodnego ruchu wibratora,

$$\begin{aligned} m \ddot{\xi} &= - \frac{\partial U}{\partial \xi}, \\ m \ddot{\eta} &= - \frac{\partial U}{\partial \eta}, \\ m \ddot{\zeta} &= - \frac{\partial U}{\partial \zeta}. \end{aligned} \quad (2)$$

gdzie kropkami oznaczamy drugą pochodną względem czasu, a literą  $m$  masę drgającego elektronu, przyjmijmy wówczas—według (1)—postać następującą:

$$\begin{aligned} m \ddot{\xi} &= - (a_{11} \xi + a_{12} \eta + a_{13} \zeta), \\ &\dots \dots \dots a_{ij} = a_{ji} \\ m \ddot{\zeta} &= - (a_{31} \xi + a_{32} \eta + a_{33} \zeta). \end{aligned} \quad (3)$$

<sup>1)</sup> Inny cel przyświeca teorii Borna, zbudowanej na znacznie ogólniejszej podstawie. Z tą teorią mają badania niniejsze niektóre punkty styczności. Por. Born, l. c.

<sup>2)</sup> Debye, Sitzungsber. der Akad. München, 1915. Sommerfeld, l. c.

Układ równań (3) daje się uprościć. Istotnie, wielomian jednorodny (1) przywieść można, za pomocą przekształcenia prostokątnego, do postaci sumy trzech kwadratów

$$U = \frac{k_1}{2} x^2 + \frac{k_2}{2} y^2 + \frac{k_3}{2} z^2; \quad (4)$$

$x, y, z$  oznaczają teraz spórzędne wychylenia elektronu względem nowego układu osi;  $k_1, k_2, k_3$  są trzy stałe, niezależne od  $x, y, z$ , dodatnie, gdyż (1) jest formą określną dodatnią. Odnosząc zatem ruch do wyszczególnionego układu  $x, y, z$ , t. z. pisząc w wzorach (2)  $x, y, z$ , zamiast  $\xi, \eta, \zeta$ , otrzymujemy według (4) uproszczone równania:

$$\begin{aligned} m \ddot{x} &= - k_1 x, \\ m \ddot{y} &= - k_2 y, \\ m \ddot{z} &= - k_3 z. \end{aligned} \quad (5)$$

Przypuśćmy teraz, że na wibrator pada płaska fala liniowo spolaryzowana światła. Oznaczmy przez  $\alpha, \beta, \gamma$  kąty, które wektor elektryczny  $E$  fali czyni z osiami  $x, y, z$ . Równania wymuszonego ruchu oscylatora brzmiały wówczas w następujący sposób:

$$\begin{aligned} m \ddot{x} &= - k_1 x + e E \cos \alpha, \\ m \ddot{y} &= - k_2 y + e E \cos \beta, \\ m \ddot{z} &= - k_3 z + e E \cos \gamma, \end{aligned} \quad (5')$$

gdzie  $e$  oznacza ładunek elektronu.

W rachunku naszym pominęliśmy 1) siłę hamującą ruch elektronu i 2) t. z. siłę dodatkową Lorentza. Pierwsze uproszczenie ogranicza ważność naszych formuł końcowych do części widma, w których niema żadnych dziedzic absorbcyjnych. Drugie uproszczenie jest dozwolone ze względu na słabą dyspersyę w gazach.

Wprowadzając składowe polaryzacji oscylatora

$$p_x = e \cdot x, \quad p_y = e \cdot y, \quad p_z = e \cdot z,$$

oraz częstości własne  $s_1, s_2, s_3$ , które z stałymi  $k_1, k_2, k_3$ , według (5), tworzą związki

$$s_1^2 = \frac{k_1}{m}, \quad s_2^2 = \frac{k_2}{m}, \quad s_3^2 = \frac{k_3}{m}, \quad (6)$$

możemy nadać układowi (5') kształt następujący:

$$\begin{aligned}\ddot{p}_x &= -s_1^2 p_x + \frac{e^2}{m} E \cos \alpha, \\ \ddot{p}_y &= -s_2^2 p_y + \frac{e^2}{m} E \cos \beta, \\ \ddot{p}_z &= -s_3^2 p_z + \frac{e^2}{m} E \cos \gamma.\end{aligned}\quad (7)$$

Oznaczmy przez  $s$  częstość drgania fali światła padającego, przez  $t$  czas. Jeżeli położymy, jak zwyczajnie,

$$\begin{aligned}E &= E_0 e^{ist}, \\ p_x &= \bar{p}_x e^{ist}, \quad p_y = \bar{p}_y e^{ist}, \quad p_z = \bar{p}_z e^{ist},\end{aligned}\quad (8)$$

gdzie  $E_0, \bar{p}_x, \bar{p}_y, \bar{p}_z$  oznaczają wielkości od czasu  $t$  niezależne, otrzymamy z (7):

$$\begin{aligned}(s_1^2 - s^2) p_x &= \frac{e^2}{m} E \cos \alpha, \\ (s_2^2 - s^2) p_y &= \frac{e^2}{m} E \cos \beta, \\ (s_3^2 - s^2) p_z &= \frac{e^2}{m} E \cos \gamma.\end{aligned}\quad (9)$$

A zatem składowa wektora  $p$  w kierunku wektora  $E$ ,

$$\begin{aligned}p_E &= p_x \cos \alpha + p_y \cos \beta + p_z \cos \gamma, \\ \text{wynosi według (9):} \\ p_E &= \frac{e^2}{m} E \left( \frac{\cos^2 \alpha}{s_1^2 - s^2} + \frac{\cos^2 \beta}{s_2^2 - s^2} + \frac{\cos^2 \gamma}{s_3^2 - s^2} \right).\end{aligned}\quad (10)$$

Z niej oblicza się składowa wektora polaryzacji  $P$  jednostki objętości gazu w kierunku wektora  $E$ :

$$P_E = \Sigma p_E, \quad (11)$$

gdzie suma odniesiona jest do wszystkich oscylatorów, mieszczących się w jednostce objętości gazu.

Celem obliczenia potrzebnej nam nadal składowej  $P_E$ , zważmy przede wszystkim, że kąty  $\alpha, \beta, \gamma$  pomiędzy wektorem  $E$  a osiami poszczególnych układów  $x, y, z$ , związanych z różnymi oscylatorami, są różne, gdyż wibratory gazu mają rozmaite kierunki w przestrzeni. Zapytajmy o przeciętne wartości kwadratów dostaw kierunkowych

$$\overline{\cos^2 \alpha}, \quad \overline{\cos^2 \beta}, \quad \overline{\cos^2 \gamma}.$$

W rachunku możemy oczywiście założyć, że układ  $x, y, z$  jest stały w przestrzeni, a wektor  $E$  przyjmuje wszystkie możliwe kierunki względem układu  $x, y, z$ . Jakoż uważając kierunek wektora  $E$  za bieżący, wprowadźmy szerokość geograficzną  $\vartheta$  i długość  $\varphi$  punktu przecięcia tegoż wektora — wykreślonego z początku układu  $x, y, z$  — z kulą o promieniu 1, której środek leży w początku układu. Mamy wówczas:

$$\cos \alpha = \sin \vartheta \cos \varphi,$$

a element powierzchniowy kuli wynosi:

$$d\sigma = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi.$$

Ponieważ wszystkie kierunki  $\alpha, \beta, \gamma$  są równie prawdopodobne,

$$\overline{\cos^2 \alpha} = \frac{\int \cos^2 \alpha d\sigma}{\int d\sigma} = \frac{\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi d\vartheta d\varphi}{\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi} = \frac{1}{3}.\quad (12)$$

Podobnie znajdujemy:

$$\overline{\cos^2 \beta} = \overline{\cos^2 \gamma} = \frac{1}{3}.\quad (13)$$

Wprowadzając przeciętne (12) i (13), tudzież oznaczając przez  $N$  liczbę drobin w 1 cm<sup>3</sup> gazu, przez  $\nu$  liczbę oscylatorów w jednej drobinie, piszemy, według (10), (12) i (13), wzór (11) w postaci:

$$\begin{aligned}P_E &= N\nu \frac{e^2}{m} E \left( \frac{\overline{\cos^2 \alpha}}{s_1^2 - s^2} + \dots \right) \\ &= N\nu \frac{e^2}{3m} E \left( \frac{1}{s_1^2 - s^2} + \frac{1}{s_2^2 - s^2} + \frac{1}{s_3^2 - s^2} \right).\end{aligned}\quad (14)$$

Podobny rachunek, który pomijamy, okazuje, że składowa wektora  $P$  w kierunku prostopadłym do wektora elektrycznego  $E$  równa się zeru. Wektory  $P$  i  $E$  mają zatem identyczne kierunki,

$$P_E = P, \quad (15)$$

jakkolwiek wektor polaryzacji pojedynczego oscylatora bynajmniej nie ma kierunku wektora  $E$ . Z teorii elektromagnetycznej światła wiadomo, że wówczas wzór

$$\frac{1}{4\pi} (n^2 - 1) = \frac{P}{E} \quad (16)$$

wyraża związek między współczynnikiem załamania  $n$  światła, polaryzacją  $P$  jednostki objętości gazu i natężeniem  $E$  siły elektrycznej fali. W przypadkach, które nas tutaj obchodzą, częstości drgania  $s$  fali padającej są małe w stosunku do częstości własnych  $s_1, s_2, s_3$ . Rozwińmy zatem ułamek w nawiasie wzoru (14) według rosnących potęg wielkości

$$\begin{aligned} \frac{s}{s_1}, \quad \frac{s}{s_2}, \quad \frac{s}{s_3}; \\ \frac{1}{s_1^2 - s^2} = \frac{1}{s_1^2} + \frac{s^2}{s_1^4} + \dots \\ \dots \dots \dots \\ \frac{1}{s_3^2 - s^2} = \frac{1}{s_3^2} + \frac{s^2}{s_3^4} + \dots \end{aligned} \quad (17)$$

Związki (14)–(17) dają:

$$n^2 - 1 = \frac{4\pi N e^2 v}{3m} \left[ \frac{1}{s_1^2} + \frac{1}{s_2^2} + \frac{1}{s_3^2} + \left( \frac{1}{s_1^4} + \frac{1}{s_2^4} + \frac{1}{s_3^4} \right) s^2 \right]. \quad (18)$$

Wprowadźmy wreszcie oznaczenia

$$a = \frac{s_1^2}{s_2^2}, \quad b = \frac{s_1^2}{s_3^2}, \quad s_0^2 = \frac{3s_1^2}{1+a+b}, \quad (19)$$

$$\Phi = 3 \frac{1+a^2+b^2}{(1+a+b)^2} \quad (20)$$

tudzież

$$A = \frac{2\pi N v e^2}{m s_0^2}, \quad (21)$$

$$B = \frac{(2\pi c)^2}{s_0^2} \cdot \Phi, \quad (22)$$

<sup>1)</sup> Podany tu dowód zależności (18) posługuje się równaniami Maxwella i bierze na pomoc rozumowania obce, zapożyczone z Statystyki. W ścisłym rachunku współczynnika załamania należałoby użyć metody Natanson'a, która zasadza się na obliczeniu superponujących się fal elementarnych, wysyłanych przez poszczególne oscylatory. Por. Natanson, Bull. Acad. Cracovie, 1914. Tę metodę rachunku podjął następnie Reiche (dla płynów). Zob. Ann. d. Phys. 50 (1916). Tamże literatura.

gdzie  $c$  jest prędkością światła w próżni. Wzór (18) można wówczas przepisać w postaci

$$n^2 - 1 = 2A \left( 1 + \frac{B}{\lambda^2} \right), \quad (23)$$

jeżeli

$$\lambda = \frac{2\pi c}{s}$$

jest długością fali światła.

Dla izotropowego oscylatora należałoby położyć w równaniach (5')

$$k_1 = k_2 = k_3,$$

t. z., według (6),

$$s_1 = s_2 = s_3. \quad (24)$$

Wobec (19) byłoby zatem:

$$a = b = 1. \quad (24')$$

Wynika z tego według (20)

$$\Phi = 1 \quad (24'')$$

a według (19), (21)–(23):

$$n^2 - 1 = \frac{4\pi N v e^2}{m s_1^2} \left( 1 + \frac{(2\pi c)^2}{s_1^2} \frac{1}{\lambda^2} \right).$$

Wzór ten odpowiada oczywiście dokładnie formule, którą daje teoria klasyczna.<sup>1)</sup>

## § 2. Porównanie teorii z doświadczeniem. Dyskusja parametrów.

Z użyciem oznaczenia

$$\Delta = \frac{3}{2} \frac{B}{A} \quad (25)$$

wyprowadzamy z (21) i (22) zależność

$$\frac{e}{m} = \frac{3\pi c^2}{N e} \cdot \frac{1}{v \Delta} \cdot \Phi, \quad (26)$$

której nadajemy także kształt:

$$v \Delta = \frac{3\pi c^2 m}{N e^2} \cdot \Phi. \quad (27)$$

Wstawiając za stałe uniwersalne—mianowicie za ładunek bezwzględny, ładunek właściwy elektronu i liczbę Loschmidta (w warunkach normalnych: 0°C, 760 mm Hg) — wartości znane z pomiarów Millikana:<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup> Por. Drude, l. c.

<sup>2)</sup> Millikan, Phil. Mag. 34 (1917).

$$\frac{e}{mc} = 1,77 \cdot 10^7,$$

$$e = 4,77 \cdot 10^{-10},$$

$$N = 2,71 \cdot 10^{19},$$

otrzymujemy:

$$v\Delta = 12,36 \cdot 10^{-7} \cdot \Phi. \quad (28)$$

Wzór (28) wskazuje, że wielkość  $v\Delta$  zależy od parametrów, charakteryzujących wiązanie quasi-elastyczne. W teorii klasycznej, przeciwnie—wielkość ta jest, według (24''), stałą uniwersalną:

$$v\Delta = 12,36 \cdot 10^{-7}. \quad (28')$$

Z zależności (28) wypływa ważny wniosek. Ponieważ dla wszystkich  $a$  i  $b$

$$1 \leq \Phi = \frac{3(1+a^2+b^2)}{(1+a+b)^2} \leq 3, \quad (29)$$

przeło

$$12,36 \leq v\Delta \cdot 10^7 < 37,08. \quad (30)$$

Teoria przewiduje więc dla  $v\Delta$  górną i dolną granicę.

Wzór (28) ilustrujemy tabelą I, która podaje próbkę pomiarów dotychczasowych. Liczby  $v$ , w drugiej kolumnie tabeli, znane nam są na mocy reguły Drude-Natanson a<sup>1)</sup>, według której liczba oscylatorów w cząsteczce równa się wartościowości cząsteczki, t. z. sumie wartościowości, przypada-

TABELA I.

	$v$	$v\Delta \cdot 10^7$		$v$	$v\Delta \cdot 10^7$
H <sub>2</sub>	1+1=2	15,99	H <sub>2</sub> S	2+4=6	16,80
O <sub>2</sub>	2+2=4	15,48	CH <sub>4</sub>	4+4=8	27,94
N <sub>2</sub>	3+3=6	16,34	C <sub>2</sub> H <sub>2</sub>	8+2=10	34,4
CO <sub>2</sub>	4+4=8	17,28	C <sub>2</sub> H <sub>4</sub>	8+4=12	32,69
SO <sub>2</sub>	4+4=8	17,84	C <sub>2</sub> H <sub>6</sub>	8+6=14	26,48

<sup>1)</sup> Por. Drude, l. c. i Natanson, Bull. Acad. Cienc. 1907 i 1909.

jących atomom. Trzecia kolumna zawiera iloczyn liczby  $v$  i średniej  $\Delta$  wyrachowanej przez Natanson a z danych pomiarów.<sup>1)</sup>

Jak widać, wahania liczb  $v\Delta$  zgodne są z warunkiem (30). Zbyt szczupły i niedokładny materiał doświadczalny wyklucza na razie możliwość dokładniejszej kontroli granic nierówności (30). Charakterystycznym jest, że we wszystkich przypadkach, zestawionych w tabeli, anizotropia wiązań zaznacza się wyraźnym odchyleniem od wartości (28'), odpowiadającej dokładnej izotropii oscylatora.

Rozważmy teraz bliżej parametry, które w dalszym ciągu będą nam potrzebne. Ograniczymy się przytem do dwóch gazów prostych: H<sub>2</sub> i N<sub>2</sub><sup>2)</sup>. Wprowadźmy dla nich uproszczenie, któremu nic na przeszkodzie nie stoi, mianowicie załóżmy, że

$$k_2 = k_3, \quad (31)$$

t. z. że według (6)

$$s_2 = s_3. \quad (31')$$

Wobec (19) mamy zatem:

$$a = b,$$

więc z (20) wynika:

$$\Phi = \frac{3(1+2a^2)}{(1+a)^2} \quad (32)$$

Wielkość  $a$  jest niejako miarą anizotropii, którą za pośrednictwem wzorów (32) obliczyć można z przebiegu dyspersji. Wynik obliczeń zawiera tabela II, która w poszczególnych kolumnach podaje: 1) wartości  $\Delta \cdot 10^4$  i 2) wartości  $B \cdot 10^{11}$ , według pomiarów Kocha<sup>3)</sup> (H<sub>2</sub>), i Cuthbertsona<sup>4)</sup> (N<sub>2</sub>); 3) wielkości  $v\Delta \cdot 10^7$ , obliczone według (25); 4) wielkości  $\Phi$ , obliczone według (28); 5) obie wartości  $a$ , t. j.  $a_1$  i  $a_2$ , obliczone według (32), a więc z równania drugiego stopnia.

TABELA II.

	$\Delta \cdot 10^4$	$B \cdot 10^{11}$	$v\Delta \cdot 10^7$	$\Phi$	$a = a_1$	$a = a_2$
H <sub>2</sub>	1,361	7,60	16,74	1,35	0,31	8,68
N <sub>2</sub>	2,94	5,26	16,11	1,30	0,35	6,11

<sup>1)</sup> Wartości  $\Delta$ , wynikające z różnych pomiarów, bardzo są między sobą niezgodne. Tyczy się to przedewszystkiem trzech pierwszych węglowodorów, podanych w tabeli. Źródło rozbieżności wyników doświadczalnych leży zapewne w niedostatecznej chemicznej czystości badanych gazów. Por. Natanson l. c., Loria, Prace mat-fiz., str. 158, 169–170. Zob. także Loria, Lichtbrechung et cet., Sammlung Vieweg, Braunschweig.

<sup>2)</sup> Tlen wyłączamy z rozważań, ze względu na jego osobliwość magnetyczną – paramagnetyzm.

<sup>3)</sup> Arkiv för Matem., 8, 1912.

<sup>4)</sup> Proc. R. Society, 83, 1909.

Doświadczalnym wynikiem można zatem uczynić zadość za pomocą dwóch różnych wartości  $a$ . Ponieważ w dalszych rozważaniach potrzebna jest tylko znajomość wielkości  $a$ , pomijamy obliczenie drugiego parametru teorii, za który uważać można  $s_0$ . Zauważmy tylko, że w założeniu (31) z  $a$  i  $s_0$  wynikają, według (31'), (19) i (6) obie stałe  $k_1$  i  $k_2$ , które wyczerpująco charakteryzują wiązanie quasi-elastyczne.

Zastanówić się nam jeszcze wypada nad trudnością, występującą w teorii klasycznej, o jakiej była mowa we wstępie. W teorii izotropowego oscylatora mamy według (24'') i (26)

$$\frac{e}{m} = \frac{3\pi e^2}{Ne} \frac{1}{v\Delta}.$$

Po prawej stronie związku tego występują same wielkości znane.  $Ne$  oblicza się bowiem z ładunku elektrolitycznego cząsteczki gramowej, wielkość  $\Delta$  z przebiegu dyspersji, a liczbę  $v$  określa reguła Drude-Natanson. Owóż obliczenie ładunku właściwego na podstawie tego wzoru ujawniło wspomnianą trudność, którą dopiero (26) usuwa z pomocą czynnika „korekcyjnego“  $\Phi$ , wynikającego z uwzględnienia anizotropii. Oznaczając przez  $\left(\frac{e}{m}\right)_0$  wartość ładunku właściwego, obliczoną z ostatniej zależności, mamy — wobec 26 —

$$\frac{\frac{e}{m} - \left(\frac{e}{m}\right)_0}{\frac{e}{m}} = \frac{\Phi - 1}{\Phi}.$$

Liczby  $\Phi$  tabeli II okazują, że pominięcie anizotropii prowadzi w przypadku  $H_2$  i  $N_2$  do wartości ładunku właściwego, o 26%, względnie 23%, za małych.

Przystępujemy obecnie do rozważań, tyjących się pytania, czy uwzględnienie anizotropii, obliczonej z dyspersji, ulepsza w dziedzinie innych efektów optycznych zgodność wzorów teorii Drudego z doświadczeniem. Zbadamy pod tym względem w następnych paragrafach magnetorotacje.

### § 3. Skręcenie płaszczyzny polaryzacji światła w polu magnetycznym.

Wyobraźmy sobie płaską falę światła, padającą wzdłuż osi  $Z$ -ów układu  $X - Y - Z$  (prawoskrętnego), stałego w przestrzeni. Umieszczamy gaz w statycznym polu magnetycznym, równoległym do kierunku rozchodzenia się światła padającego, a więc do osi  $Z$ -ów. Układ  $x, y, z$  (prawoskrętny) —

jak poprzednio — stale jest związany z oscylatorem. W równaniach ruchu (5') dołącza się teraz do sił, występujących po prawej stronie, siła magnetyczna

$$\frac{e}{c} [wH],$$

gdzie  $c$  oznacza prędkość światła w próżni, a kłama iloczyn wektoryalny prędkości  $w$  elektronu i natężenia  $H$  statycznego pola magnetycznego. Według (7) napiszemy zatem, wprost dla polaryzacji oscylatora, równania:

$$\begin{aligned} \ddot{p}_x &= -s_1^2 p_x + \frac{e}{mc} (H_x \dot{p}_y - H_y \dot{p}_x) + \frac{e^2}{m} E_x, \\ \ddot{p}_y &= -s_2^2 p_y + \frac{e}{mc} (H_x \dot{p}_x - H_x \dot{p}_y) + \frac{e^2}{m} E_y, \\ \ddot{p}_z &= -s_3^2 p_z + \frac{e}{mc} (H_y \dot{p}_x - H_x \dot{p}_y) + \frac{e^2}{m} E_z. \end{aligned} \quad (33)$$

Postępując się wzorami (8), tudzież wprowadzając przejściowo skrócenie

$$\delta = \frac{es}{mc} i, \quad (34)$$

gdzie  $i$  oznacza urojoną wielkość, otrzymujemy z (33) równania:

$$\begin{aligned} (s_1^2 - s^2) p_x - \delta \cdot H_x p_y + \delta \cdot H_y p_x &= \frac{ve^2}{m} E_x, \\ +\delta \cdot H_x p_x + (s_2^2 - s^2) p_y - \delta \cdot H_x p_z &= \frac{ve^2}{m} E_y, \\ -\delta \cdot H_y p_x + \delta \cdot H_x p_y + (s_3^2 - s^2) p_z &= \frac{ve^2}{m} E_z, \end{aligned}$$

a z nich, pomijając wyrazy drugiego rzędu względem  $H_x, H_y, H_z$ :

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{e^2}{m} \frac{(s_2^2 - s^2)(s_2^2 - s^2) E_x - \delta \{ (s_2^2 - s^2) E_x H_y - (s_3^2 - s^2) E_y H_x \}}{(s_1^2 - s^2)(s_2^2 - s^2)(s_3^2 - s^2)} \\ &\dots \dots \dots \\ p_z &= \frac{e^2}{m} \frac{(s_2^2 - s^2)(s_1^2 - s^2) E_z - \delta \{ (s_1^2 - s^2) E_y H_x - (s_2^2 - s^2) E_x H_y \}}{(s_1^2 - s^2)(s_1^2 - s^2)(s_3^2 - s^2)}. \end{aligned} \quad (35)$$

Wprowadźmy teraz kąty między osiami układów  $X, Y, Z$  i  $x, y, z$  według tabelki następującej:

	X	Y	Z
x	$\alpha$	$\alpha'$	$\alpha''$
y	$\beta$	$\beta'$	$\beta''$
z	$\gamma$	$\gamma'$	$\gamma''$

Wektor magnetyczny pola statycznego, stosownie do założenia, ma kierunek osi Z-ów. Zatem:

$$H_x = H \cos \alpha', \quad H_y = H \cos \beta'', \quad H_z = H \cos \gamma''. \quad (36)$$

Ponieważ przypuszczamy, że fala światła rozchodzi się wzdłuż osi Z-ów, więc:

$$E_z = 0,$$

wobec czego:

$$\begin{aligned} E_x &= E_X \cos \alpha + E_Y \cos \alpha', \\ E_y &= E_X \cos \beta + E_Y \cos \beta', \\ E_z &= E_X \cos \gamma + E_Y \cos \gamma'. \end{aligned} \quad (37)$$

Stosując znane związki, zachodzące między dostawami kierunkowymi, wyprowadzamy z (37):

$$E_x \cos \beta - E_y \cos \gamma = E_Y (\cos \gamma' \cos \beta - \cos \beta' \cos \gamma) = E_Y \cos \alpha', \quad (38)$$

tudzież w podobny sposób:

$$\begin{aligned} E_x \cos \gamma - E_z \cos \alpha &= E_Y \cos \beta'', \\ E_y \cos \alpha - E_x \cos \beta &= E_Y \cos \gamma''. \end{aligned} \quad (39)$$

Pomnóżmy równania (35) kolejno przez  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$ ,  $\cos \gamma$ , i dodajmy do siebie. Otrzymamy wówczas składową wektora polaryzacji w kierunku osi X-ów:

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{e^2}{m} \frac{1}{(s_1^2 - s^2)(s_2^2 - s^2)(s_3^2 - s^2)} [(s_3^2 - s^2)(s_2^2 - s^2) E_x \cos \alpha + \dots \\ &+ \delta \cdot \{ H_x (s_1^2 - s^2) (E_x \cos \beta - E_y \cos \gamma) + \dots \}]. \end{aligned} \quad (40)$$

Według (37), (36), (38) i (39) przepisujemy (40) w postaci:

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{e^2}{m} \frac{1}{(s_1^2 - s^2)(s_2^2 - s^2)(s_3^2 - s^2)} [(s_3^2 - s^2)(s_2^2 - s^2) (E_x \cos^2 \alpha + E_Y \cos \alpha \cos \alpha') + \dots \\ &+ \delta \cdot H \{ (s_1^2 - s^2) E_x \cos^2 \alpha' + \dots \}]. \end{aligned} \quad (41)$$

Ażeby teraz wyprowadzić składową  $P_X$  polaryzacji 1 cm<sup>3</sup> gazu w kierunku osi X-ów,

$$P_X = \Sigma p_x,$$

obliczmy przedewszystkiem przeciętną iloczyn dostaw kątów  $\alpha$  i  $\alpha'$ :

$$\overline{\cos \alpha \cos \alpha'}.$$

Wprowadźmy trzy kąty Eulera  $\theta$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$ , celem określenia położenia układu  $x, y, z$  względem  $X, Y, Z$ <sup>1)</sup>. Ponieważ wszystkie kierunki oscylatorów, a więc i związanych z nimi układów  $x, y, z$ , są równie prawdopodobne, wartość przeciętną należy zdefiniować jak następuje:

$$\overline{\cos \alpha \cdot \cos \alpha'} = \frac{\int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \cos \alpha \cos \alpha' \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \, d\psi}{\int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \, d\psi}.$$

Stosując znane związki pomiędzy dostawami kierunkowymi, a kątami Eulera, znajdujemy łatwo

$$\overline{\cos \alpha \cos \alpha'} = 0.$$

Podobnie

$$\overline{\cos \beta \cos \beta'} = 0,$$

$$\overline{\cos \gamma \cdot \cos \gamma'} = 0.^2)$$

Uwzględniając ostatnie trzy wzory oraz równania (12) i (13), prawdziwe także, gdy w nich zamiast  $\alpha, \beta, \gamma$  napiszemy  $\alpha', \beta'', \gamma''$ , wyprowadzamy natychmiast z (41):

<sup>1)</sup> Por. np. Whittaker, Analytical Dynamics, Cambridge, 1904, str. 9.

<sup>2)</sup> Prawdziwość tych wzorów jest zresztą bez rachunku widoczna, albowiem z jednej strony mamy

$$\overline{\cos \alpha \cos \alpha'} = \overline{\cos \beta \cos \beta'} = \overline{\cos \gamma \cos \gamma'},$$

wobec równouprawnienia osi  $x, y, z$ ; z drugiej zaś strony, według znanego związku pomiędzy dostawami kierunkowymi,

$$\overline{\cos \alpha \cos \alpha'} + \overline{\cos \beta \cos \beta'} + \overline{\cos \gamma \cos \gamma'} = 0.$$

$$P_x = \Sigma p_x = Nv \frac{e^2}{3m} \frac{1}{(s_1^2 - s^2)(s_2^2 - s^2)(s_3^2 - s^2)}$$

$$\{[(s_2^2 - s^2)(s_3^2 - s^2) + (s_3^2 - s^2)(s_1^2 - s^2) + (s_1^2 - s^2)(s_2^2 - s^2)] E_x + \delta \cdot H [s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 - 3s^2] E_y\}.$$

$N$  oznacza przytem liczbę drobin w  $1 \text{ cm}^3$ , a  $v$  liczbę oscylatorów w drobinie.

Ostatni wzór przepiszemy w postaci

$$P_x = \frac{S \cdot E_x + T i E_y}{S^2 - T^2}, \quad (42)$$

gdzie według (34):

$$\frac{S}{S^2 - T^2} = \frac{Nv e^2}{3m} \frac{(s_2^2 - s^2)(s_3^2 - s^2) + (s_3^2 - s^2)(s_1^2 - s^2) + (s_1^2 - s^2)(s_2^2 - s^2)}{(s_1^2 - s^2)(s_2^2 - s^2)(s_3^2 - s^2)},$$

$$\frac{T}{S^2 - T^2} = \frac{Nv e^2 s}{3m^2 c} H \frac{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 - 3s^2}{(s_1^2 - s^2)(s_2^2 - s^2)(s_3^2 - s^2)}. \quad (43)$$

Podobnie znajdujemy:

$$P_y = \frac{-T i E_x + S E_y}{S^2 - T^2}. \quad (44)$$

Z (42) i (44) wypływa:

$$E_x = S P_x - T i P_y, \quad (45)$$

$$E_y = S P_y + T i P_x.$$

#### § 4. Ciąg dalszy. Obliczenie kąta skręcenia.

Wiadomo z równań elektromagnetycznej teorii światła, że wzory (45) dają dla kołisto spolaryzowanego światła dwie różne prędkości, zależnie od kierunku polaryzacji. Ponieważ zaś falę liniowo spolaryzowaną można uważać za zbieg dwóch fal, spolaryzowanych kołisto w prawo i w lewo, przeto konsekwencją obu różnych prędkości musi być skręcanie się płaszczyzny polaryzacji wzdłuż drogi przebytej w ośrodku. Wspomniane prędkości dane są przez znane wzory:

$$\frac{c}{v_+} = 1 + \frac{2\pi}{S - T}, \quad (46)$$

$$\frac{c}{v_-} = 1 + \frac{2\pi}{S + T}.$$

Rozumiejąc przez

$$n_+ = \frac{c}{v_+}, \quad n_- = \frac{c}{v_-}$$

spółczynniki załamania obu fal, wyprowadzamy z (46):

$$n_+ - n_- = 4\pi \frac{T}{S^2 - T^2}; \quad (47)$$

a ponieważ kąt skręcenia płaszczyzny polaryzacji wzdłuż  $1 \text{ cm}$  drogi, przebytej w gazie, wynosi, jak wiadomo,

$$\omega = \frac{s}{2c} (n_+ - n_-), \quad (48)$$

przeto dla  $t$ , zw. stałej Verdet'a

$$V = \frac{\omega}{H},$$

według (48), (47) i (43), wynika:

$$V = \frac{2\pi Nv e^2 s^2}{3m^2 c^2} \frac{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 - 3s^2}{(s_1^2 - s^2)(s_2^2 - s^2)(s_3^2 - s^2)}.$$

Rozwińmy drugi czynnik po lewej stronie związku tego według potęg wielkości

$$\frac{s^2}{s_1^2}, \quad \frac{s^2}{s_2^2}, \quad \frac{s^2}{s_3^2}.$$

Pomijając wyrazy 4-go i wyższych rzędów, otrzymujemy — jak elementarny rachunek okazuje —

$$V = \frac{V_1}{\lambda^2} \left(1 + \frac{V_2}{\lambda^2}\right), \quad (49)$$

gdzie

$$\lambda = \frac{2\pi c}{s}$$

oznacza długość fali światła. Przy stosowaniu oznaczeń

$$a = \frac{s_1^2}{s_2^2}, \quad b = \frac{s_1^2}{s_3^2}, \quad \bar{s}^2 = s_1^2 \sqrt{\frac{3}{ab+a+b}} \quad (50)$$

mają stałe  $V_1$  i  $V_2$  następujące znaczenie:

$$V_1 = 8\pi^3 Nv \frac{e^2}{m^2} \frac{1}{s^4}, \quad (51)$$

$$V_2 = \frac{4\pi^2 c^2}{s^2} \sqrt{3} \frac{(1+a+b)(ab+a+b) - 3ab}{(ab+a+b)^{\frac{3}{2}}}. \quad (52)$$

W przypadku izotropii, według (24') i (50), wynikają związki:



$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{8\pi^3 N v e^3}{m^2 s_1^4}, \\ V_2 &= \frac{8\pi^2 e^2}{s_1^2}, \end{aligned} \quad (53)$$

które odpowiadają oczywiście dokładnie wzorom teorii klasycznej,<sup>1)</sup> jak być powinno.

### § 5. Porównanie teorii z doświadczeniem.

Wróćmy do uproszczenia zastosowanego w przypadku wodoru i azotu. Z wzorów (31), (50), (51) i (52) wyprowadzamy:

$$\bar{s}^2 = s_1^2 \sqrt{\frac{3}{a^2 + 2a}}, \quad (54)$$

$$V_1 = 8\pi^3 N v e \left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{1}{\bar{s}^4}, \quad (55)$$

$$V_2 = 8\pi^2 e^2 \frac{1}{\bar{s}^2} \sqrt{3} \frac{(1+a+a^2)}{a^{1/2}(2+a)^{3/2}} \quad (56)$$

Związkom (55) i (56) nadamy postać praktycznie dogodniejszą. Jakoż, uwzględniając (55), (21), (54), (19) i (31), otrzymujemy łatwo:

$$\begin{aligned} v \frac{V_1}{A^2} &= \frac{2\pi}{Ne} \frac{3a(a+2)}{(1+2a)^2}, \\ t. z. \\ V_1 &= \frac{2\pi}{Ne} \frac{A^2}{v} \frac{3a(a+2)}{(1+2a)^2}. \end{aligned} \quad (57)$$

Nadto, (56), (54), (19), (31) i (22) dają:

$$V_2 = 2B \frac{(1+2a)(1+a+a^2)}{(2+a)(1+2a^2)}. \quad (58)$$

Napiszmy obok (57) i (58) analogiczne związki teorii klasycznej. Wynikają one wprost z (57) i (58), jeżeli według (24'), położymy

$$\begin{aligned} a &= 1: \\ V_1 &= \frac{2\pi}{Ne} \frac{A^2}{v}, \end{aligned} \quad (59)$$

$$V_2 = 2B. \quad (60)$$

<sup>1)</sup> Druce l. c.

Obie stałe wzoru (49) wyraziliśmy w zasadzie przez stałe  $A$  i  $B$  wzoru Cauchy'ego (23), oraz przez parametr anizotropii  $a$ , który obliczony został w § 2 z przebiegu dyspersji. Ponieważ wszystkie wielkości po prawej stronie związków (57) i (58) są znane, efekt skrócenia płaszczyzny polaryzacji możemy przepowiedzieć na podstawie pomiaru zjawisk, nie mających z magnetorotacją nic wspólnego.

Do porównania teorii z doświadczeniem służą tabele III i IV. Pierwsza z nich podaje wartości  $V_1 \cdot 10^{20}$ , a mianowicie w pierwszej kolumnie doświadczone<sup>1)</sup>, w drugiej—obliczone według (57), z uwzględnieniem wartości  $A$  i  $a$ , podanych w tabeli II—w trzeciej: obliczone według (59), wreszcie w czwartej kolumnie—wartości obliczone według nowej teorii Sommerfelda, opartej na zasadach kwantowych<sup>2)</sup>.

TABELA III.

	$V_1 \cdot 10^{20}$			Obl. według Sommerfelda
	Dośw.	Obl. według (57)	Obl. według Drucego	
H <sub>2</sub>	578	369	450	482
N <sub>2</sub>	580	594	700	722

$a_1$  i  $a_2$  dają na  $V_1 \cdot 10^{20}$  wartości, których różnice występują dopiero na pierwszym miejscu dziesiętnym.

Jak widać, uwzględnienie anizotropii, obliczonej z przebiegu dyspersji, prowadzi w przypadku azotu do uwagi godnej zgodności z doświadczeniem. Wartości, które wynikają z teorii Drucego i Sommerfelda, są znacznie gorsze. Wzór (57) daje jednak dla wodoru wartość niezadawalającą. Że w dziedzinie efektu magnetycznego ujawni się w niektórych przypadkach o dstępstwo teorii od wyników doświadczenia, było zresztą do przewidzenia ze względu na znane trudności, które teoria elektronów wogóle napotyka w dziedzinie zjawisk magnetycznych.<sup>3)</sup>

<sup>1)</sup> Siertsema, Archives Néerlandaises, 2, str. 291, 1899. Kąt skrócenia jest tam w minutach wyrażony, długość fali w mikronach. Wymaga to przeliczenia liczb, gdyż wzory nasze posługują się układem cm. gr. sek. Wobec założonych w pracy niniejszej warunków normalnych, należy także ciśnienie i temperaturę zredukować. Por. Sommerfeld, l. c.

<sup>2)</sup> Sommerfeld, l. c.

<sup>3)</sup> Por. J. Kroo, Ann. d. Ph. 42, str. 1354 (1913).

W tabeli IV zestawiliśmy w końcu wielkości  $V_2 \cdot 10^{10}$ : doświadczalne — w pierwszej kolumnie; obliczone według (58), z uwzględnieniem wartości  $B$  i obu wartości  $a$  z tabeli II — w kolumnie drugiej i trzeciej; obliczone według (60) — w kolumnie czwartej, a w ostatniej kolumnie — obliczone według teorii Sommerfelda.

TABELA IV.

	$V_2 \cdot 10^{10}$				
	Observ.	Obl. według (58)		Obl. według Drudego	Obl. według Sommerfelda
		dla $a = a_1$	dla $a = a_2$		
$H_2$	1,55	1,25	1,46	1,52	1,52
$N_2$	1,23	0,898	1,00	1,05	12,5

Zgodność teorii z doświadczeniem można uważać za dobrą (zwłaszcza dla  $a = a_2$ ), uwzględniając wielkość możliwych błędów doświadczalnych. Teoria klasyczna prowadzi do wartości zaledwie o 5% lepszych. Natomiast z teorii Sommerfelda wynika wprawdzie dla wodoru wartość zgodna z pomiarem, dla azotu jednak zupełnie fałszywa.

#### Streszczenie wyników.

1. Teoria dyspersji, oparta na równaniu anizotropowego oscylatora, usuwa trudności, związane z kwestią ładunku właściwego elektronu, które są właściwe teorii klasycznej.

2. Wielkość  $v\Delta$  ( $v$  = wartościowość drobin;  $\Delta = \frac{3}{2} \frac{B}{A}$ ;  $A$  i  $B$  stałe wzoru Cauchy'ego) stała uniwersalna u Drudego, okazuje w przypadku anizotropii zależność od parametrów wiązania quasi-elastycznego. Teoria przewidyuje granice

$$12,36 \leq v\Delta \cdot 10^7 < 37,08.$$

Wyniki pomiarów są z tem zgodne.

3. W teorii magnetorotacji, w niektórych przypadkach, uwzględnienie anizotropii oscylatorów, obliczonej z przebiegu dyspersji, ulepsza znacznie zgodność wzorów teorii klasycznej z doświadczeniem.

Kraków, w sierpniu 1918.

AL. RAJCHMAN.

## 0 szeregach trygonometrycznych sumowalnych metodą Poissona.

Sur les séries trigonométriques sommables par le procédé de Poisson.

### Wstęp.

I. Formalne całkowanie szeregów trygonometrycznych wyraz za wyrazem posiada treść analityczną dzięki następującemu twierdzeniu Riemanna („Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe“ Bernhard Riemanns Werke — w 2-em wyd. str. 247 i nast.):

„Jeżeli szereg

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad (a)$$

jest zbieżny dla

$$x = x_0,$$

jeżeli oznaczymy przez  $F(x)$  sumę szeregu otrzymanego przez formalne dwukrotne przecałkowanie szeregu (a)

$$F(x) = - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^2}, \quad (b)$$

to granica

$$\lim_{h=0} \frac{F(x_0+h) + F(x_0-h) - 2F(x_0)}{h^2} \quad (c)$$

istnieje i równa się sumie szeregu (a) dla  $x = x_0$ .

W pracy niniejszej wykazuje, że również w odniesieniu do szeregów trygonometrycznych rozbieżnych sumowalnych metodą Poissona