METODA TELEOLOGICZNA HOENE-WROŃSKIEGO.

NAPISAŁ

W. KRAUZE.

1. W dziele Hoene-Wrońskiego: „Réforme absolue et par conséquent finale du savoir humain“ (tom III, część pierwsza) znajdujemy następujące twierdzenie, uważane przez autora za podstawę jego metody teleologicznéj:

Dla równania danego:

$$F(z) = z^m - A_1 z^{m-1} \quad + (-1)^m A_m = 0 \qquad (1)$$

utworzyć można równanie:

$$f(z) = z^{m-1} - P_2 z^{m-2} + P_3 z^{m-3} - \quad + (-1)^{m-1} P_m = 0\,, \qquad (2)$$

w którém

$$P_\mu \aleph(q) = A_\mu \aleph(q-1) - A_{\mu+1} \aleph(q-2) - \quad + (1)^{m-\mu} A_m \aleph(q-\overline{m-\mu+1}) \qquad (3)$$

lub

$$P_\mu \aleph(q) = A_{\mu-1} \aleph(q) - A_{\mu-2} \aleph(q+1) + \quad + (-1)^{\mu-1} \aleph(q+\mu-1) \qquad (4)$$

Funkcye $\aleph(q)$, $\aleph(q+1)$ i t. d. są funkcyami symetrycznemi, zwanemi funkcyami *alef*. [1])

[1]) O funkcyach *alef* traktują:
Hoene-Wroński w wyżej wzmiankowaném dziele.
E. West. Exposé des méthodes générales en Mathématiquns d'après Hoëne-Wronski. Paris, 1886.
S. Dickstein w rozprawach. ogłoszonych w tomie XII (1886) i XIV (1888) Pamiętnika Akademii Umiejętności w Krakowie.

Równanie (2) będzie miało jeden, kilka lub wszystkie pierwiastki wspólne z rownaniem (1), o czém przekonają nas własności funkcyj alef różnych rzędów. Równanie (2) nazywa autor czynnikiem *ogólnym i podstawowym* równania (1).

Dowodzenia twierdzenia powyższego autor nie podaje, jak również nie objaśnia, jakim sposobem do równania (2) doszedł.

Mamy dotychczas 4 wywody metody teleologicznéj Hoene-Wrońskiego, a mianowicie: Hanegraeffa [1]), Bukatego [2]) i dwa S. Dicksteina [3]). Autorowie ci nie rozpatrują twierdzenia Hoene-Wrońskiego, a starają się utworzyć czynnik równania (1) odrazu na mocy własności jego pierwiastków; tymczasem Hoene-Wroński kładzie silny nacisk na to twierdzenie, uważając je za podstawowe w metodzie teleologicznéj [4]). Tu właśnie pragnę uzasadnić twierdzenie Hoene-Wrońskiego, opartą na niéj metodę przedstawić, opierając się na własnościach funkcyj alef wyższych rzędów i wykazać jeden ze związków, istniejących między temi funkcyami i pierwiastkami równania. [5])

Jakim sposobem Hoene-Wroński doszedł do równania (2), tego ani w dziełach jego, ani w Encyklopedyi Montferriera [6]), zawierającéj wykład matematyki według teoryj Wrońskiego, znaleść nie można. Genezę tego równania objaśnić by można w ten sposób:

Utworzywszy funkcye alef i otrzymawszy wzór ogólny:

$$\aleph(q) = A_1 \aleph(q-1) - A_2 \aleph(q-2) + \quad + (-1)^{m-1} A_m \aleph(q-m) \qquad (5)$$

autor nadał mu formę

$$\frac{\aleph(q)}{\aleph(q-m)} - A_1 \frac{\aleph(q-1)}{\aleph(q-m)} + A_2 \frac{\aleph(q-2)}{\aleph(q-m)} \quad + (-1)^m A_m = 0\,. \qquad (6)$$

Wzór (6) przypomina nam równanie (1) i pokazuje, że, gdyby istniały związki:

[1]) Hanegraeff. Méthode pour la résolution générale des équations par leur décomposition succesive en facteurs. Bruksella, 1854.

[2]) Bukaty. Résolution générale des équations. Paryż 1878.

[3]) S. Dickstein. O metodzie teleologicznéj Hoene-Wrońskiego. Kraków 1889 i Dopełnienie tegoż artykułu. Kraków 1890.

[4]) *Przypisek Redakcyi.* Twierdzenie to dla wywodu i w zastosowaniu nie jest ~~ono~~ ani koniecznem ani też dogodném, jak to objaśnia artykuł następujący.

[5]) O związkach ogólnych między funkcyami alef i pierwiastkami równania patrz rozprawy S. Dicksteina w Pamiętnikach Akad. Umiej. w Krakowie. Tom XII, 1886 r.

[6]) A. S. de Montferrier. Encyclopédie Mathématique. Paris.

$$\frac{\aleph(q)}{\aleph(q-m)} = z^m, \quad \frac{\aleph(q-1)}{\aleph(q-m)} = z^{m-1}, \quad \frac{\aleph(q-m+1)}{\aleph(q-m)} = z \tag{7}$$

to moglibyśmy znaleść jeden z pierwiastków równania (1).

Związki (7) odpowiadają związkom:

$$\frac{\aleph(q)}{\aleph(q-1)} = \frac{\aleph(q-1)}{\aleph(q-2)} = \qquad = \frac{\aleph(q-m+1)}{\aleph(q-m)} = z \tag{8}$$

o czém przekonywamy się przy pomocy dzielenia.

Jeżeli więc istnieją związki (8), t. j. jeżeli funkcye alef dążą do granicy oznaczonéj, granica ta będzie pierwiastkiem równania danego (1) czyli $z = \dfrac{\aleph(q)}{\aleph(q+1)}$ przy $q = \infty$.

Mając jeden pierwiastek, otrzymał autor równanie (2), mające z równaniem (1) wszystkie pierwiastki wspólne. Nie zawsze jednak istnieją związki (8); zachodzi więc pytanie, czy wtedy równanie (2) będzie miało jakie pierwiastki wspólne z równaniem danėm. Pytanie to doprowadziło zapewne autora do wypowiedzenia powyżéj podanego twierdzenia.

2. Zanim przejdziemy do uzasadnienia tego twierdzenia, podamy znakowanie funkcyj alef wyższego rzędu, nieco odmienne od danego przez W r o ń s k i e g o, oraz związek między funkcyami alef wyższych rzędów i funkcyami alef pojedyńczemi.

Niech $\aleph(q)$ oznacza funkcyą alef pojedyńczą, to funkcye alef rzędu 1, 2.. ...ω oznaczamy przez $\aleph'(q, a/o)$, $\aleph''(q, a/\iota)$, $\aleph^{\omega}(q, a/\omega-1)$; związek zaś między funkcyami różnych rzędów wyrażamy równaniami:

$$\left.\begin{array}{l}
\aleph'(q, a/0) = \aleph(q)\,\aleph(q+a) - \aleph(q-1)\,\aleph(q+a+1) \\
\aleph''(q, a/1) = \aleph'(q, 0/0)\,\aleph'(q-1, a/0) - \aleph'(q-1, 0/0)\,\aleph'(q, a/0) \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\aleph^{\omega}(q, a/\omega-1) = \aleph^{\omega-1}(q, \omega-2/\omega-2)\,\aleph^{\omega-1}(q-1, a/\omega-2) - \aleph^{\omega-1}(q-1, \\
\qquad\qquad \omega-2/\omega-2)\,\aleph^{\omega-1}(q, a/\omega-2)
\end{array}\right\} \tag{9}$$

gdzie znaczek u góry napisany oznacza rząd funkcyi alef.

Wyrażenia te na funkcye alef wyższych rzędów ogólne nie są, wystarczają jednak do wywodu twierdzenia.

Związek między funkcyą alef rzędu wyższego i takiemiż funkcyami pojedyńczemi wyrazić można wzorem:

$$\aleph^{\omega}(q, a\ \omega-1) = \begin{vmatrix}
\aleph(q+a+1-\omega), \aleph(q-1), \aleph(q-2), \dots \aleph(q-\omega) \\
\aleph(q+a+2-\omega), \aleph(q)\ ,\ \aleph(q-1), \dots \aleph(q-\omega+1) \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\aleph(q+a+1), \aleph(q+\omega-1), \aleph(q+\omega-2), \dots, \aleph(q)
\end{vmatrix} \times P(\omega-1) \tag{10}$$

w którym

$$P(\omega-1) = S^0(\omega-1)\,S^1(\omega-2). \qquad S^{\omega-2}(1) \tag{11}$$

zaś

$$S^{\beta}(\delta) = \aleph^{\beta}(q-1, \beta-1/\beta-1)\,\aleph^{\beta}(q-2, \beta-1/\beta-1)\dots\aleph^{\beta}(q-\delta, \beta-1/\beta-1). \tag{12}$$

3. Dla przekonania się, czy istnieją pierwiastki wspólne równań (1) i (2) i w jakim związku znajduje się ta własność równań z własnościami funkcyj alef różnych rzędów, ze współczynników obu równań tworzymy wyznacznik

$$C_{\varrho} = \begin{vmatrix}
1, A_1, A_2, \quad A_m, 0. \dots 0 \\
0, \ 1, A_1, \quad A_{m-1}, A_m. . 0 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
0, \ 0, \dots\dots 1, A_1, \ A_{m-\varrho} \\
1, P_2, P_3, \dots P_m \dots\dots \\
0, \ 1, P_2, \dots P_{m-1}\,P_m \dots \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
0, \dots\dots 1, P_2, P_3, \dots P_{m-\varrho}
\end{vmatrix} \tag{13}$$

zawierający $(2m-2\varrho-1)^2$ elementów. Jeżeli współczynniki równania danego (1) czynią zadość związkom:

$$C_0 = 0,\ C_1 = 0, \dots C_{\varrho-1} = 0,\ C_{\varrho} \text{ nie} = 0 \ ^{1)} \tag{14}$$

to równania (1) i (2) mają ϱ pierwiastków wspólnych.

Wyznacznikowi C_{ϱ} można nadać inną formę, jeżeli dodać odpowiednio mnożone rzędy: 1-y do $(m-\varrho)$-go, 2-gi do $(m-\varrho+1)$-go i t. d. a potém odpowiednio mnożone kolumny: 1-ą do 2-éj, 1-ą i 2-ą do 3-éj i t. d.; wtedy otrzymamy dla C_{ϱ} wyznacznik o $(m-\varrho)^2$ elementach:

$$C_{\varrho} = \begin{vmatrix}
\aleph(q+m-\varrho-1), & \aleph(q+m-\varrho), & \aleph(q+2m-2\varrho-2) \\
\aleph(q+m-\varrho-2), & \aleph(q+m-\varrho-1), & \aleph(q+2m-2\varrho-3) \\
\dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots \\
\aleph(q). & \aleph(q+1), \dots & \aleph(q+m-\varrho-1)
\end{vmatrix} \times \frac{1}{[\aleph(q)]^{m-\varrho}} \tag{15}$$

Zakładając kolejno $\varrho = 0, 1, 2 \dots \varrho$ otrzymamy wszystkie wyznaczniki $C_0, C_1, C_2 \dots C_{\varrho}$.

---

[1]) S. D i c k s t e i n. Pojęcia i metody matematyki. Tom I. Część 1-a. Str. 209. Warszawa 1891.

Jeżeli teraz porównamy wzory (15) i (10), to zauważymy, że związek np. $C_{\varrho-1} = 0$ odpowiada związkowi $\aleph^{m-\varrho}\ (q,\ m-\varrho-1/m-\varrho-1) = 0$; możemy więc, na mocy wyżéj powiedzianego, wyprowadzić wniosek następujący:

Jeżeli współczynniki równania danego (1) czynią zadość związkom:

$$\text{gr.} \left| \frac{\aleph^{m-\varrho-1}\ (q\ ,\ \ a/m-\varrho-2)}{\aleph^{m-\varrho-1}\ (q-1\ ,\ a/m-\varrho-2)} \right|_{q=\infty} = \text{wielkości oznaczonéj,} \tag{16}$$

lub też związkom:

$$\left| \aleph^{m-\varrho}\,(q\ ,\ \ a/m-\varrho-1) \right|_{q=\infty} = 0 \tag{17}$$

które to związki wynikają jedne z drugich, to równania (1) i (2) mają ϱ pierwiastków wspólnych, gdyż związki (16) lub (17) odpowiadają w zupełności związkom (14).

Czynnik szukany równania (1) będzie więc:

$$z^{\varrho} - B_1\ z^{\varrho-1} + \ldots + (-1)^{\varrho}\ B_{\varrho} = 0 \tag{18}$$

Na mocy teoryi wyznaczników $B_a = \Sigma\ A_i\, p_k + \Sigma\ P_i\, q_k$, gdzie p_k i q_k są odpowiednimi minorami wyznacznika C_{ϱ} dzielonymi przez C_{ϱ}, [1]) w pierwszéj sumie $i+k = 2m-2\varrho-2+a$ a w drugiéj zaś $i+k=2m-2\varrho-1+a$. Jeżeli wyznaczniki na p_k i q_k przerobimy tak, jak przerobiono wyżéj wyznacznik na C_{ϱ}, i potém dodamy obie sumy, to otrzymamy stosunek dwóch wyznaczników, który z łatwością przerobić można na wyrażenie:

$$\Big\{ A_a \aleph^{m-\varrho-1}(q,m-\varrho-2/m-\varrho-2) - A_{a-1}\aleph^{m-\varrho-1}(q,m-\varrho-1/m-\varrho-2) + \ldots$$
$$+ (-1)^a \aleph^{m-\varrho-1}(q,m-\varrho-2+a/m-\varrho-2) \Big\} \times \frac{1}{\aleph^{m-\varrho-1}(q,m-\varrho-2/m-\varrho-2)}$$

Tym sposobem znajdziemy wszystkie współczynniki B.

Według terminologii Wrońskiego czynnik (18) nazywa się *głównym*, czynnik zaś zawierający pozostałe pierwiastki równania (1)—*dopełniającym*. Otrzymać można ten ostatni w formie

$$z^{m-\varrho} - C_1\, z^{m-\varrho-1} + C_2\, z^{m-\varrho-2} - \qquad + (-1)^{m-\varrho}\, C_{m-\varrho} = 0 \tag{19}$$

Współczynniki C czynić będą zadość równaniom formy:

$$C_{\mu} + C_{\mu-1}\, B_1 + C_{\mu-2}\, B_2 + \qquad + C_1\, B_{\mu-1} + B_{\mu} = A_{\mu}\,.$$

---

[1]) S. Dickstein. Pojęcia i metody matematyki. Tom I. Część 1-a. Nr 35 o największym wspólnym dzielniku.

4. Powstaje pytanie, jak rozdzielają się pierwiastki równania (1) pomiędzy te dwa czynniki (18) i (19). By na nie dać odpowiedź, założyć należy, iż równanie dane (1) sprowadzone zostało do typu, zwanego przez H. Wrońskiego normalnym, to jest, że w niém $A_m = 1$ [1]) i że usunięto pierwiastki równe jedności; w takim razie wartość bezwzględna pewnych pierwiastków musi być większą od jedności, a wartość bezwzględna każdego z pozostałych mniejszą od jedności.

Niech w równaniu daném (1) będzie $(m-\varrho)$ pierwiastków

$$z_1\,,\ z_2\,,\ z_3\,, \qquad z_{m-\varrho}$$

o wartości bezwzględnéj większéj od jedności i niech pierwiastki te będą pierwiastkami równania:

$$z^{m-\varrho} - C'_1\, z^{m-\varrho-1} + C'_2\, z^{m-\varrho-2} - \qquad + (-1)^{m-\varrho}\, C'_{m-\varrho} = 0\,. \tag{20}$$

Opierając się na wywodzie metody teleologicznéj, podanym przez S. Dicksteina [2]), znajdujemy, że

$$C'_1 = \frac{\aleph^{m-\varrho-1}\ (q,\ m-\varrho-1/m-\varrho-2)}{\aleph^{m-\varrho-1}\ (q,\ m-\varrho-2/m-\varrho-2)} = C_1 \tag{21}$$

czyli, że równania (20) i (19) są identyczne, gdyż i pozostałe współczynniki są równe, t. j. $C'_{\mu} = C_{\mu}$.

A zatem czynnik dopełniający równania normalnego zawiera wszystkie jego pierwiastki o wartości bezwzględnéj większéj od jedności, a czynnik główny—pierwiastki o wartości bezwzględnéj mniejszéj od jedności. Warunki, którym podlegać winny pierwiastki obu czynników, podaje Hoene-Wroński, lecz, jak zwykle, bez dowodu.

Równanie (21) pozwala nam jeszcze wyprowadzić wniosek, że gdy stosunek funkcyj alef $(m-\varrho-1)$-go rzędu dąży do granicy oznaczonéj, granicą tą będzie suma pierwiastków równania danego, których wartość bezwzględna jest większa od jedności.

5. Prócz czynnika podstawowego (2), tworzy Hoene-Wroński dla równania danego drugi czynnik podstawowy:

$$z^{m-1} - Q_2\, z^{m-2} + Q_3\, z^{m-3} - \qquad + (-1)^{m-1}\, Q_m = 0 \tag{22}$$

którego współczynniki, tak samo jak współczynniki równania (2), wyrażają się przy pomocy funkcyj alef pojedyńczych, lecz o skaźnikach ujemnych. Dla

---

[1]) Sposoby zamiany równania danego na równanie normalne podaje Hoene-Wroński w wyżéj wzmiankowaném dziele, tomie III, części 1-ej.

[2]) S. Dickstein. Dopełnienie artykułu o metodzie teleologicznéj Hoene-Wrońskiego. Kraków, 1890.

funkcyj alef pojedyńczych o skaźnikach ujemnych podaje Wroński w wyżéj wzmiankowaném dziele wzór:

$$\aleph(-q)=B_1\aleph(-(\varrho-1))-B_2\aleph(-(\varrho-2))+\quad+(-1)^{m-1}B_m\aleph(-(\varrho-m)),\qquad(23)$$

w którym

$$B_\mu=\frac{A_{m-\mu}}{A_m}.$$

W razie gdy równanie (1) jest normalne, otrzymamy na $\aleph(-\varrho)$ wzór

$$\aleph(-\varrho)=A_{m-1}\aleph(-(\varrho-1))-A_{m-2}\aleph(-(\varrho-2))+\quad+(-1)^{m-1}\aleph(-(\varrho-m))\qquad(24)$$

Stosując rozumowanie powyższe przekonać się można że, gdy stosunek funkcyj alef danego rzędu o skaźnikach ujemnych dąży do granicy oznaczonéj, równanie (22) będzie miało z równaniem daném (1) pierwiastki wspólne, liczba których będzie o jedność mniejszą od różnicy między stopniem równania (1) i rzędem wzmiankowanych funkcyj alef. Dla przekonania się, jakie pierwiastki równania danego (1) zawiera w sobie równanie (22), weźmy w równaniu (1), sprowadzoném do typu normalnego $\frac{1}{z}$ zamiast z, i zniešmy mianowniki, wtedy otrzymamy równanie

$$z^m-A_{m-1}z^{m-1}+A_{m-2}z^{m-2}-\quad+(-1)^m=0,\qquad(1')$$

pierwiastki którego będą odwrotnościami pierwiastków równania danego (1)

Utwórzmy teraz dla równania (1') czynnik podstawowy przy pomocy funkcyj alef o skaźnikach dodatnich

$$z^{m-1}-P'_2z^{m-2}+P'_3z^{m-3}=\quad+(-1)^{m-1}P'_m=0.\qquad(25)$$

Ponieważ funkcye alef współczynników równania (1') wyrazić można wzorem

$$\aleph(\varrho)=A_{m-1}\aleph(\varrho-1)-A_{m-2}\aleph(\varrho-2)+\quad+(-1)^{m-1}\aleph(\varrho-m),\qquad(26)$$

który jest identyczny ze wzorem (24), wnioskujemy tedy, iż równania (22) i (25) mają pierwiastki jednakowe; Wiemy jednak, że równanie (25) zawiera wszystkie pierwiastki równania danego (1) o wartości bezwzględnéj większéj od jedności.

Reasumując powyżéj powiedziane, możemy uważać za dowiedzione następujące twierdzenie:

„Jeżeli dla danego równania normalnego, nie zawierającego pierwiastków równych jedności, utworzymy dwa czynniki podstawowe, z których jeden ma współczynnik o funkcyach alef ze skaźnikami dodatniemi, a drugi—ze skaźnikami ujemnemi, to wszystkie pierwiastki równania danego (1) rozdzielą się

pomiędzy te dwa czynniki tak, że pierwszy będzie zawierał pierwiastki o wartości bezwzględnéj mniejszéj od jedności, a drugi—pierwiastki, których wartość bezwzględna większa od jedności".

Można jeszcze wyprowadzić związek między funkcyami alef o skaźnikach dodatnich i takiemiż funkcyami o skaźnikach ujemnych. W tym celu tworzymy równanie, zawierające pierwiastki wspólne równaniom (1) i (22)—niech stopień jego będzie np. $m-\varrho$ i porównywamy jego współczynniki ze współczynnikami równania (19). Ponieważ współczynniki obu tych równań powinny być identyczne, otrzymamy szukany związek funkcyi alef. Dogodniéj jednak będzie poszukiwać tego związku innym sposobem: Niech dla równania (1) istnieje związek (17), wtedy równanie (1) powinno mieć $(m-\varrho)$ pierwiastków o wartości bezwzględnéj >1 czyli powinno mieć $(m-\varrho)$ pierwiastków wspólnych z drugim czynnikiem podstawowym (22), a zatém musi mieć miejsce związek

$$\aleph^\varrho(-q;\,a/\varrho-1)=0\qquad\text{przy } q=\infty.\qquad(27)$$

Związki (17) i (27) istnieć muszą jednocześnie, pokazują więc łączność między funkcyami alef o skaźnikach dodatnich i ujemnych.

6. Dla pokazania zastosowania metody Hoene-Wrońskiego do równań liczebnych, podajemy parę przykładów.

Przykłady:

1) $x^7-\underset{A_1}{6}x^6+\underset{A_2}{5}x^5-\underset{A_3}{4}x^4+\underset{A_4}{3}x^3-\underset{A_5}{2}x^2+\underset{A_6}{x}-\underset{A_7}{1}=0.$

$\aleph(1)=6$, $\aleph(2)=31$, $\aleph(3)=160$, $\aleph(4)=826$, $\aleph(5)=4264$,
$\aleph(6)=22012$, $\aleph(7)=113633$, $\aleph(8)=586631$, $\aleph(9)=3028400$,
$\aleph(10)=15633603$, $\lg\aleph(10)=7{,}1940591$, $\lg\aleph(11)-\lg\aleph(10)=0{,}7128458$,
$\aleph(11)=80705829$, $\lg\aleph(11)=7{,}9069049$, $\lg\aleph(12)-\lg\aleph(11)=0{,}7128459$,
$\aleph(12)=416630184$, $\lg\aleph(12)=8{,}6197508$, $\lg\aleph(13)-\lg\aleph(12)=0{,}7128457$,
$\aleph(13)=2150782812$, $\lg\aleph(13)=9{,}3325965$,

Widzimy, że stosunek funkcyj alef pojedyńczych dąży do granicy oznaczonéj. Tworzymy wyrażenia:

$$\frac{\aleph(13)}{\aleph(12)}=5{,}1623307,\quad \text{błąd}<\frac{1}{10^7}$$

$$\frac{\aleph(14)}{\aleph(12)}=\left[\frac{\aleph(13)}{\aleph(12)}\right]^2=26{,}6496687.$$

$$\frac{\aleph(15)}{\aleph(12)}=\left[\frac{\aleph(13)}{\aleph(12)}\right]^3=137{,}57443038,$$

$$\frac{\aleph(11)}{\aleph(12)} = 0{,}1937109,$$

$$\frac{\aleph(10)}{\aleph(12)} = 0{,}0375240,$$

$$\frac{\aleph(9)}{\aleph(12)} = 0{,}0072688,$$

$$P_2 = 6 - \frac{\aleph(13)}{\aleph(12)} = 0{;}8376693$$

$$P_3 = 5 - 6\,\frac{\aleph(13)}{\aleph(12)} = \frac{\aleph(14)}{\aleph(12)} = 0{,}6756845,$$

$$P_4 = 4 - 5\,\frac{\aleph(13)}{\aleph(12)} + 6\,\frac{\aleph(14)}{\aleph(12)} - \frac{\aleph(15)}{\aleph(12)} = 0{,}5119283,$$

$$P_5 = 2\,\frac{\aleph(11)}{\aleph(12)} - \frac{\aleph(10)}{\aleph(12)} + \frac{\aleph(9)}{\aleph(12)} = 0{,}3571666,$$

$$P_6 = \frac{\aleph(11)}{\aleph(12)} - \frac{\aleph(10)}{\aleph(12)} = 0{,}1561869,$$

$$P_7 = \frac{\aleph(11)}{\aleph(12)} = 0{,}1937109.$$

Można więc rozłożyć równanie dane na dwa czynniki:

$$x^7 - 6x^6 + 5x^5 - 4x^4 + 3x^2 - 2x + x - 1 = (x - 5{,}1623307) \times (x^6 - 0{,}8376693x^5$$
$$+ 0{,}6756845x^4 - 0{,}5119283x^3 + 0{,}3571666x^2 - 0{,}1561869x + 0{,}1937109).$$

Dla sprawdzenia wykonywamy mnożenie i będzie:

$$x^7 - 6x^6 + 4{,}999999x^5 - 4{,}000036x^4 + 2{,}9999106x^3 - 2{,}0000079x^2 +$$
$$+ 0{,}9999994x - 0{,}999999 = 0.$$

2) $x^7 - 2x^6 + 12x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 6x^2 + 5x - 1 = 0.$

$\aleph(1) = 2$, $\aleph(2) = -8$, $\aleph(3) = -36$, $\aleph(4) = 29$, $\aleph(5) = 458$,
$\aleph(6) = 455$, $\aleph(7) = -4419$, $\aleph(8) = -12727$, $\aleph(9) = 28366$,
$\aleph(10) = 192982$, $\aleph(11) = 8390$, $\aleph(12) = -2175690$, $\aleph(13) = -3819042$
$\aleph(14) = 18154222$, $\aleph(15) = 74412353$.

Widać odrazu, że stosunek funkcyj alef pojedyńczych do żadnéj oznaczonéj granicy nie dąży. Obliczamy funkcye alef złożone 1-go rzędu:

$\aleph(6,1/0) = 2230927$, $\lg \aleph(6,1/0) = 6{,}3484854$,
$R = 1{,}0549499$
$\aleph(7,1/0) = 25318346$, $\lg \aleph(7,1/0) = 7{,}4034353$,
$R = 1{,}0549395$
$\aleph(8,1/0) = 287325883$, $\lg \aleph(8,1/0) = 8{,}4583748$,
$R = 1{,}0549376$
$\aleph(9,1/0) = 3260711870$, $\lg \aleph(9,1/0) = 9{,}5133124$,
$R = 1{,}0549370$
$\aleph(10,1/0) = 37004061584$, $\lg \aleph(10,1/8) = 10{,}5682494$,
$R = 1{,}0549372$
$\aleph(11,1/0) = 419939399680$, $\lg \aleph(11,1/0) = 11{,}6231866$,
$R = 1{,}0549372$
$\aleph(12,1/0) = 4765668738480$, $\lg \aleph(12,1/0) = 12{,}6781238$,
$R = 1{,}0549372$
$\aleph(13,1/0) = 54083030.10^6$, $\lg \aleph(13,1/0) = 13{,}7330610$,
$R = 1{,}0549373.$
$\aleph(14,1/0) = 6137596.10^8$, $\lg \aleph(14,1/0) = 14{,}7879983.$

A zatem stosunek funkcyj alef złożonych 1-go rzędu dąży do granicy oznaczonéj.

$$\aleph(11,1/1) = \aleph(11)\,\aleph(12) - \aleph(10)\,\aleph(13) = 71875235.10^4,$$
$$\aleph(11,1/2) = \aleph(11)\,\aleph(13) - \aleph(10)\,\aleph(14) = -35354802.10^5,$$
$$\aleph(11,1/3) = \aleph(11)\,\aleph(14) - \aleph(10)\,\aleph(15) = -14207936.10^6,$$
$$\aleph(9,1/1) = \aleph(9)\,\aleph(10) - \aleph(8)\,\aleph(11) = 55809465.10^2,$$

$$\frac{\aleph(11,1/1)}{\aleph(11,1/0)} = 1{,}711562, \quad \frac{\aleph(11,1/2)}{\aleph(11,1/0)} = -8{,}419023,$$

$$\frac{\aleph(11,1/3)}{\aleph(11,1/0)} = -33{,}8333, \quad \frac{\aleph(10,1/0)}{\aleph(11,1/0)} = 0{,}088118,$$

$$\frac{\aleph(9,1/0)}{\aleph(11,1/0)} = 0{,}013290.$$

$$Q_3 = 2 - \frac{\aleph(11,1/1)}{\aleph(11,1/0)} = 0{,}288438,$$

$$Q_4 = 12 - 2\,\frac{\aleph(11,1/1)}{\aleph(11,1/0)} + \frac{\aleph(11,1/2)}{\aleph(11,1/0)} = 0{,}157853,$$

$$Q_5 = 4 - 12\,\frac{\aleph(11,1/1)}{\aleph(11,1/0)} + 2\,\frac{\aleph(11,1/2)}{\aleph(11,1/0)} - \frac{\aleph(11,1/3)}{\aleph(11,1/0)} = 0{,}456510,$$

$$Q_6 = 5\,\frac{\aleph(10,1/0)}{\aleph(11,1/0)} - \frac{\aleph(9,1/0)}{\aleph(11,1/0)} = 0{,}427300$$

$$Q_7 = \frac{\aleph(10,1/0)}{\aleph(11,1/0)} = 0{,}088118.$$

Tym sposobem rozkładamy rownanie dane na dwa czynniki:

I. $x^2 - 1{,}7115622\,x + 11{,}348467.$

II. $x^5 - 0{,}288438x^4 + 0{,}157853x^3 - 0{,}45651x^2 + 0{,}4273x - 0{,}088118.$

7. Wroński stosuje swoję metodę teleologiczną do rozwiązywania równań $z^m - N = 0$ [1]). W tym celu wybiera M tak, by M^m było najbliższém liczby danéj N, i założywszy, że:

$$z = x - M. \tag{33}$$

podstawia w równanie

$$z^m - N = 0. \tag{34}$$

Otrzymuje wtedy równanie

$$x^m - m_1 M x^{m-1} + m_2 M^2 x^{m-2} - \quad + (-1)^m M^m - N = 0. \tag{35}$$

$$\text{gdzie } m_a = \frac{m(m-1)}{1.\ 2.} \cdots \frac{(m-a+1)}{a} = \frac{m^{a/-1}}{1^{a/1}}.$$

do którego można zastosować powyższą metodę i znaleść jeden z pierwiastków

$$x = \frac{\aleph(q)}{\aleph(q-1)}, \quad \text{skąd } z = \frac{\aleph(q)}{\aleph(q-1)} - M. \tag{36}$$

W równaniach $z^m - N = 0$ można z łatwością otrzymać wzór dla funkcyi alef pojedyńczéj, jako funkcyi liczb m i M.

Obliczając kolejne funkcye alef pojedyńcze, otrzymamy:

$$\aleph(1) = \frac{m^{1/1}}{1^{1/1}} M.$$

$$\aleph(2) = \frac{m^{2/1}}{1^{2/1}} M^2$$

$$\aleph(3) = \frac{m^{3/1}}{1^{3/1}} M^3$$

$$\aleph(m-1) = \frac{m^{m-1/1}}{1^{m-1/1}} M^{m-1}$$

$$\aleph(m) = \frac{m^{m/1}}{1^{m/1}} M^m + N$$

$$\aleph(m+1) = \frac{m^{m+1/1}}{1^{m+1/1}} M^{m+1} + \frac{m^{1/1}}{1^{1/1}} MN + N\aleph(1) = \frac{m^{m+1/1}}{1^{m+1/1}} M^{m+1} + \frac{2m^{1/1}}{1^{1/1}} MN.$$

[1]) Hoene Wroński: „Reforme absolne du savoir humain“. T. III.

$$\aleph(m+2) = \frac{m^{m+2/1}}{1^{m+2/1}} M^{m+2} + \frac{m^{1/1}}{1^{1/1}} \frac{2m^{1/1}}{1^{1/1}} M^2N - \frac{m^{2/-1}}{1^{2/1}} M^2N + \frac{m^{2/1}}{1^{2/1}} M^2N$$

$$= \frac{m^{m+2/1}}{1^{m+2/1}} M^{m+2} + \frac{2m^{2/1}}{1^{2/1}} M^2N.$$

$$\aleph(2m-1) = \frac{m^{2m-1/1}}{1^{2m-1/1}} M^{2m-1} + \frac{2m^{m-1/1}}{1^{m-1/1}} M^{m-1} N.$$

$$\aleph(2m) = \frac{m^{2m/1}}{1^{2m/1}} M^{2m} + \frac{2m^{m-1/1}}{1^{m/1}} M^m N + N^2 \quad \text{i t. d.}$$

Wszystkie te wzory zawierają się w ogólnym wzorze

$$\aleph(\omega) = M^\omega \left\{ \frac{m^{\omega/1}}{1^{\omega/1}} + \frac{(2m)^{\omega-m/1}}{1^{\omega-m/1}} \frac{N}{M^m} + \frac{(3m)^{\omega-2m/1}}{1^{\omega-2m/1}} \frac{N^2}{M^{2m}} + \ldots \right\}, \tag{37}$$

który dla ω skończonéj wielkości kończy się, gdy $\omega - qm \leqq 0$, przyczém należy pamiętać, że $\frac{(\overline{q+1}\ m)^{\omega-qm/1}}{1^{\omega-qm/1}}$ jest jednością, gdy $\omega - qm = 0$, i jest zerem, gdy $\omega - qm < 0$.

Dla uzasadnienia wzoru (37) przyjmujemy, że jest prawdziwy dla wszystkich funkcyj alef do $\aleph(\omega)$ włącznie i okażemy, że wtedy będzie prawdziwy i dla $\aleph(\omega+1)$. W tym celu szukamy $\aleph(\omega+1)$ według ogólnego wzoru na funkcye alef pojedyńcze

$$\aleph(\omega+1) = m_1 M^{\omega+1} \left[\frac{m^{\omega/1}}{1^{\omega/1}} + \frac{(2m)^{\omega-m/1}}{1^{\omega-m/1}} \cdot \frac{N}{M^m} + \ldots + \frac{(\overline{q+1}.m)^{\omega-qm/1}}{1^{\omega-qm/1}} \frac{N^q}{M^{qm}} + \ldots \right]$$

$$- m_2 M^{\omega+1} \left[\frac{m^{\omega-1/1}}{1^{\omega-1/1}} + \frac{(2m)^{\omega-m-1/1}}{1^{\omega-m-1/1}} \cdot \frac{N}{M^m} + \ldots + \frac{(\overline{q+1}.m)^{\omega-qm-1/1}}{1^{\omega-qm-1/1}} \cdot \frac{N^q}{M^{qm}} + \ldots \right]$$

. . . .

$$+ (-1)^{m-1} \{M^m + (-1)^{m-1} N\} M^{\omega+1-m} \left[\frac{m^{\omega+1-m/1}}{1^{\omega+1-m/1}} + \ldots + \frac{(q+1.m)^{\omega+1-\overline{q+1}.m/1}}{1^{\omega+1-\overline{q+1}.m/1}} \frac{N^q}{M^{qm}} + \ldots \right]$$

Szereg skończony:

$$X = m_1 \frac{(\overline{q+1}\ .\ m)^{\omega-qm/1}}{1^{\omega-qm/1}} - m_2 \frac{(\overline{q+1}\ .\ m)^{\omega-qm-1/1}}{1^{\omega-qm-1/1}} + \ldots + (-1)^{m-1} \frac{(\overline{q+1}\ .\ m)^{\omega+1-\overline{q+1}\ .\ m/1}}{1^{\omega+1-\overline{q+1}\ .\ m/1}}$$

$$+ \frac{(qm)^{\omega+1-qm/1}}{1^{\omega+1-qm/1}}$$

$$=\frac{(q\overline{+1}\,.\,m)^{\omega+1-q\overline{+1}\,.\,m/1}}{1^{\omega+1-qm/1}}\left[m_1(\omega+1)^{m-1/1}(\omega+1-qm)^{1/-1}-m_2(\omega+1)^{m-2/1}(\omega+1-qm)^{2/-1}+\right.$$

$$\left.\ldots+(-1)^{m-1}(\omega+1-qm)^{m/-1}\right]+\frac{(qm)^{\omega+1-qm/1}}{1^{\omega+1-qm/1}}$$

$$=\frac{(q\overline{+1}\,.\,m)^{\omega+1-q\overline{+1}\,.\,m}}{1^{\omega+1-qm/1}}\left[(\omega+1)^{m/1}-(qm)^{m/1}\right]+\frac{(qm)^{\omega+1-qm/1}}{1^{\omega+1-qm/1}} \tag{38}$$

Wzór (38) otrzymujemy na mocy teoryi fakultetów [1]). Będzie daléj

$$X=\frac{(q\overline{+1}\,.\,m)^{\omega+1-q\overline{+1}\,.\,m/1}(\omega+1)^{m/1}}{1^{\omega+1-qm/1}}-\frac{(q\overline{+1}\,.\,m)^{\omega+1-q\overline{+1}\,.\,m/1}(qm)^{m/1}}{1^{\omega+1-qm/1}}$$

$$+\frac{(qm)^{\omega+1-qm/1}}{1^{\omega+1-qm/1}}=\frac{(q\overline{+1}\,.\,m)^{\omega+1-qm/1}}{1^{\omega+1-qm/1}} \tag{38'}$$

Jeżeli teraz w wyżéj znalezioném wyrażeniu na $\aleph(\omega+1)$ zsumujemy wyrazy, zawierające jednakowe potęgi $\frac{N}{M^m}$, i tak otrzymane współczynniki przy różnych potęgach $\frac{N}{M^m}$ przekształcimy według wzoru (38'), to otrzymamy dla funkcyi $\aleph(\omega+1)$ wzór

$$\aleph(\omega+1)=M^{\omega+1}\left[\frac{m^{\omega+1/1}}{1^{\omega+1/1}}+\frac{(2m)^{\omega+1-m/1}}{1^{\omega+1-m/1}}\frac{N}{M^m}+\frac{(3m)^{\omega+1-2m/1}}{1^{\omega+1-2m/1}}\frac{N^2}{M^{2m}}-\ldots\right] \tag{39}$$

w którym pamiętać należy, że dla $\omega=$ wielkości skończonéj, współczynniki przy różnych potęgach $\frac{N}{M^m}$ stają się zerami, gdy $\omega+1-qm>0$, jednością zaś, gdy $\omega+1-qm=0$.

A zatem wzór (37) istnieje dla wszystkich wartości dodatnich na ω.

Dla pokazania, jak w praktyce wzór (37) stosować i jakie ułatwienia przy samém obliczaniu wprowadzić można, weźmy przykład

$$z^5-18=0.$$

Załóżmy $M=2$, wtedy $z=x-2$,

$$x^5-5.2.x^4+10.2^2x^3-10.2^3.x^2+5.2^4.x-2^5-18=0.$$

Szukamy wartości funkcyj $\aleph(40)$, $\aleph(41)$, $\aleph(42)$.

[1]) O fakultetach patrz A. S. Montferrier. Encyclopédie mathématique. T. III str. 238 i dal. lub Dictionnaire mathématique tegoż autora.

$$\aleph(40)=2^{40}\left\{\frac{5^{40/1}}{1^{40/1}}+\frac{10^{35/1}}{1^{35/1}}\cdot\frac{18}{25}+\frac{15^{30/1}}{1^{30/1}}\cdot\frac{18^2}{2^{10}}+\frac{20^{25/1}}{1^{25/1}}\cdot\frac{18^3}{2^{15}}+\frac{25^{20/1}}{1^{20/1}}\cdot\frac{18^4}{2^{20}}\right.$$

$$\left.+\frac{30^{15/1}}{1^{15/1}}\cdot\frac{18^5}{2^{25}}+\frac{35^{10/1}}{1^{10/1}}\cdot\frac{18^6}{2^{30}}+\frac{40^{5/1}}{1^{5/1}}\cdot\frac{18^7}{2^{35}}+\frac{45^{0/1}}{1^{0/1}}\cdot\frac{18^8}{2^{40}}\right\}$$

$$=2^{40}a+2^{35}b+2^{30}c+2^{25}d+2^{20}e+2^{15}f+2^{10}g+2^5h+i$$

$$=A+B+C+D+E+F+G+H+J.$$

$$\begin{aligned}
a &= 135.751 \\
b &= 12.760.749.10^3 \\
c &= \frac{31.2.34}{13}\cdot b.\,18 = 37245679.10^6 \\
d &= \frac{13.21.29}{2.17.19}\,c.\,18 = 8216305.10^9 \\
e &= \frac{25}{20}\,d.\,18 = 184866750.10^9 \\
f &= 2\,c.\,18^3 = 434433600.10^9 \\
g &= \frac{35}{10}\,b.\,18^5 = 8421941.10^9 \\
h &= 8\,a.\,18^7 = 664875853.10^6 \\
i &= 18^8 = 11019961.10^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A &= 2^{40}.\ a = 149.10^{15} \\
B &= 2^{35}.\ b = 44242.10^{15} \\
C &= 2^{30}.\ c = 39992250.10^{15} \\
D &= 2^{25}.\ d = 275693454.10^{15} \\
E &= 2^{20}.\ e = 193846837.10^{15} \\
F &= 2^{15}.\ f = 14235520.10^{15} \\
G &= 2^{10}.\ g = 8624.10^{15} \\
H &= 2^{5}.\ h = 21.10^{15} \\
J &= i = 0 \\
\aleph(40) &= 523821098.10^{15}
\end{aligned}
\qquad \lg\aleph(40)=23,7191830.$$

$$\aleph(41)=2^{41}\left\{\frac{5^{41/1}}{1^{41/1}}+\frac{10^{36/1}}{1^{36/1}}\cdot\frac{18}{2^5}+\frac{15^{31/1}}{1^{31/1}}\cdot\frac{18^2}{2^{10}}+\frac{20^{26/1}}{1^{26/1}}\cdot\frac{18^3}{2^{15}}+\frac{25^{21/1}}{1^{21/1}}\cdot\frac{18^4}{2^{20}}\right.$$

$$\left.+\frac{30^{16/1}}{1^{16/1}}\cdot\frac{18^5}{2^{25}}+\frac{35^{11/1}}{1^{11/1}}\cdot\frac{18^6}{2^{30}}+\frac{40^{6/1}}{1^{6/1}}\cdot\frac{18^7}{2^{35}}+\frac{45^{1/1}}{1^{1/1}}\cdot\frac{18^8}{2^{40}}\right\}$$

$$= 2.45 \{ A_1 + B_1 + C_1 + D_1 + E_1 + F_1 + G_1 + H_1 + J_1 \}.$$

$$A_1 = 2^{40}. \frac{5^{40/1}}{1^{41/1}} \cdot \quad = \frac{A}{41} = \quad 4.10^{15}$$

$$B_1 = 2^{35}. \frac{10^{35/1}}{1^{36/1}} \cdot 18 = \frac{B}{36} = \quad 1229.10^{15}$$

$$C_1 = 2^{30}. \frac{15^{30/1}}{1^{31/1}} \cdot 18^2 = \frac{C}{31} = \quad 1290073.10^{15}$$

$$D_1 = 2^{25}. \frac{20^{25/1}}{1^{26/1}} \cdot 18^3 = \frac{D}{26} = \quad 10603594.10^{15}$$

$$E_1 = 2^{20}. \frac{25^{20/1}}{1^{21/1}} \cdot 18^4 = \frac{E}{21} = \quad 9230802.10^{15}$$

$$F_1 = 2^{15}. \frac{30^{15/1}}{1^{16/1}} \cdot 18^5 = \frac{F}{16} = \quad 889720.10^{15}$$

$$G_1 = 2^{10}. \frac{35^{10/1}}{1^{11/1}} \cdot 18^6 = \frac{G}{11} = \quad 784.10^{15}$$

$$H_1 = 2^{5}. \frac{40^{5/1}}{1^{6/1}} \cdot 18^7 = \frac{H}{6} = \quad 4.10^{15}$$

$$J_1 = \quad \frac{45^{0/1}}{1^{1/1}} \cdot 18^8 = J = \quad 0$$

$$22016210.10^{15}$$

$$\times 90$$

$$\aleph(41) = \quad 1981458900.10^{15}$$

$$\lg \aleph(41) = 24{,}2969851.$$

$$\aleph(42) = 2^{42} \left\{ \frac{5^{42/1}}{1^{42/1}} + \frac{10^{37/1}}{1^{37/1}} \cdot \frac{18}{2^5} + \frac{15^{32/1}}{1^{32/1}} \cdot \frac{18^2}{2^{10}} + \frac{20^{27/1}}{1^{27/1}} \cdot \frac{18^3}{2^{15}} + \frac{25^{22/1}}{1^{22/1}} \cdot \frac{18^4}{2^{20}} \right.$$
$$\left. + \frac{30^{17/1}}{1^{17/1}} \cdot \frac{18^5}{2^{25}} + \frac{35^{12/1}}{1^{12/1}} \cdot \frac{18^6}{2^{30}} + \frac{40^{7/1}}{1^{7/1}} \cdot \frac{18^7}{2^{35}} + \frac{45^{2/1}}{1^{2/1}} \cdot \frac{18^8}{2^{40}} \right\}$$

$$= 2^2.\,46.\,45 \{ A_2 + B_2 + C_2 + D_2 + E_2 + F_2 + G_2 + H_2 + J_2 \}.$$

$$A_2 = 2^{40}. \frac{5^{40/1}}{1^{42/1}} \cdot \quad = \frac{A_1}{42} = \quad 887.10^{12}$$

$$B_2 = 2^{35}. \frac{10^{35/1}}{1^{37/1}} \cdot 18 = \frac{B_1}{37} = \quad 33215.10^{12}$$

$$C_2 = 2^{30}. \frac{15^{30/1}}{1^{32/1}} \cdot 18^2 = \frac{C_1}{32} = \quad 40314768.10^{12}$$

$$D_2 = 2^{25}. \frac{20^{25/1}}{1^{27/1}} \cdot 18^3 = \frac{D_1}{27} = 392725718\ 10^{12}$$

$$E_2 = 2^{30}. \frac{25^{20/1}}{1^{22/1}} \cdot 18^4 = \frac{E_1}{22} = 419581899.10^{12}$$

$$F_2 = 2^{15}. \frac{30^{15/1}}{1^{17/1}} \cdot 18^5 = \frac{F_1}{17} = \quad 52336471.10^{12}$$

$$G_2 = 2^{10}. \frac{35^{10/1}}{1^{12/1}} \cdot 18^6 = \frac{G_1}{12} = \quad 65334.10^{12}$$

$$H_2 = 2^{5}. \frac{40^{5/1}}{1^{7/1}} \cdot 10^7 = \frac{H_1}{7} = \quad 506.10^{12}$$

$$J_2 = \quad \frac{45^{0/1}}{1^{2/1}} \cdot 18^8 = \frac{J_1}{2} = \quad -$$

$$905057998.10^{12}$$

$$\times 8280$$

$$\aleph(42) = \quad 7493880223.10^{15}$$

$$\lg \aleph(42) = 24{,}8747067.$$

$\lg \aleph(41) - \lg \aleph(40) = 0{,}5778021 \quad \lg \aleph(42) - \lg \aleph(41) = 0{,}5777216.$

A zatém stosunek funkcyj alef dąży do granicy oznaczonéj; znalazłszy więc funkcye alef o dostatecznie dużym skaźniku, możemy stosunek dwóch sąsiednich uważać za x, a stąd znaleść z.

Warszawa, w październiku 1891.