

O LINIACH GEODEZYJNYCH.

NAPISAL

J. SOCHOCKI.

Jakkolwiek teoria linii geodezyjnych jest w naszym czasie obszernie opracowaną, nie mało jednakże pozostaje do zrobienia, aby doprowadzić ją do ostatecznej doskonałości; sądząc przeto, że uwagi, dotyczące się najważniejszych jej zasad, które zamierzam tu podać, okażą się pożytecznymi przy studyowaniu przedmiotu i przyczynią się do ułatwień w różnych zastosowaniach.

1. Pierwotne określenie linii geodezyjnej, jako linii najkrótszej, łączącej na danej powierzchni dwa dane punkty, prawie bezpośrednio prowadzi do wniosku, dającego inną tej linii własność, która ją także zupełnie określa, mianowicie: że płaszczyzna ściśle styczna linii geodezyjnej w każdym jej punkcie jest prostopadłą do powierzchni. Biorąc tę własność za punkt wyjścia, należy zauważyć przedewszystkiem, że wyraża się ona analitycznie przez równanie różniczkowe drugiego rzędu; więc ogólne równanie linii geodezyjnej w swjej formie skończonej zawiera dwa parametry dowolne C i C' . Jeśli wprowadzimy związek dowolny między niemi, na przykład $C' = \varphi(C)$, wtedy w równaniu pozostanie tylko jeden parametr dowolny C , dla szczególnych wartości którego otrzymywać będziemy różne linie geodezyjne. Zbiór wszystkich, otrzymanych takim sposobem, linii nazywać będziemy *układem* albo *systematem* linii geodezyjnych.

Układ stanowi element ważny w ogólnej teorii linii geodezyjnych, i najlepiej jest rozpocząć od badania własności układu, gdyż, podlegając większej liczbie różnych operacyi, daje on materiał przystępniejszy dla dochodzenia.

Zobaczmy potem, jak z własności zasadniczych układu otrzymują się wprost pierwsze podstawy ogólnej teorii linii geodezyjnych.

Każdy układ może być określony sposobem czysto geometrycznym; gdyż wszystkie linie, składające dany układ, są styczne do jednej i tej samej linii obwijającej: ta linia obwijająca oczywiście może być wybraną dowolnie i określa w zupełności odpowiedni układ.

W szczególnym przypadku krzywa obwijająca może się zredukować do punktu.

Na powierzchniach obrotowych zasługują przedewszystkiem na uwagę układy, których linia obwijająca jest równoleżnikiem.

Nareszcie można określić układ za pomocą jednej z ortogonalnych jego trajektoryi; będzie on wtedy przedstawiał zbiór linii geodezyjnych prostopadłych do pewnej danej linii.

2. Jedną z najdonioślejszych własności układu linii geodezyjnych jest szczególne wyrażenie różniczki łuku, należącego do układu i zawartego między dwoma punktami zmiennymi. Otrzymuje się ono drogą zwyczajnego różniczkowania. W samej rzeczy, niech na powierzchni $f=0$ dany będzie układ linii geodezyjnych, określonych równaniami

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(t, C), \\ y &= f_2(t, C), \\ z &= f_3(t, C), \end{aligned} \right\} \dots \quad (1)$$

gdzie C oznacza ilość stałą dla jednej i tej samej linii w układzie, a t jest zmienna niezależna, określająca różne punkty na krzywej. Wyobraźmy sobie na powierzchni dwie krzywe S_1 i S_2 , zupełnie dowolne, i weźmy pod uwagę jakąkolwiek linią C , należącą do układu (1); wartości t dla punktów przecięcia się C z S_1 i S_2 oznaczmy odpowiednio przez t_1 i t_2 , mamy oczywiście

$$t_1 = \varphi_1(C), \quad t_2 = \varphi_2(C).$$

Długość łuku na krzywej C , zawartego między punktami t_1 i t_2 wyraża się tak:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2} dt; \quad (2)$$

za kierunek dodatni na linii C przyjmiemy ten, który idzie od t_1 do t_2 , tak że wartość (2) jest dodatnią.

Przyjawszy teraz ilość C za zmienną niezależną i uważając s jako funkcję jednej zmiennej C , szukać będziemy jej pochodnej.

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dC} = & \int_{t_1}^{t_2} \frac{\frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial C} + \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial C} + \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial^2 z}{\partial t \partial C}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2}} dt \\ & + \left[\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2} \right]_{t_1} \frac{dt_2}{dC} \\ & - \left[\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2} \right]_{t_1} \frac{dt_1}{dC}. \end{aligned}$$

Oznaczywszy przez α, β, γ kąty, jakie styczna do krzywej C w punkcie t tworzy z osiami współrzędnych, możemy napisać

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dC} = & \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial^2 x}{\partial t \partial C} \cos \alpha + \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial C} \cos \beta + \frac{\partial^2 z}{\partial t \partial C} \cos \gamma \right) dt \\ & + \left[\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2} \right]_{t_1} \frac{dt_2}{dC} \\ & - \left[\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2} \right]_{t_1} \frac{dt_1}{dC}, \end{aligned}$$

stąd przy pomocy całkowania częściowego otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dC} = & - \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial x}{\partial C} d \cos \alpha + \frac{\partial y}{\partial C} d \cos \beta + \frac{\partial z}{\partial C} d \cos \gamma \right) \\ & + \left(\cos \alpha \frac{\partial x}{\partial C} + \cos \beta \frac{\partial y}{\partial C} + \cos \gamma \frac{\partial z}{\partial C} \right)_{t_1} + \left[\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2} \right]_{t_1} \frac{dt_2}{dC} \\ & - \left(\cos \alpha \frac{\partial x}{\partial C} + \cos \beta \frac{\partial y}{\partial C} + \cos \gamma \frac{\partial z}{\partial C} \right)_{t_1} - \left[\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2} \right]_{t_1} \frac{dt_1}{dC}. \end{aligned}$$

Weźmy teraz pod uwagę krzywą S_1 ; równania jej otrzymują się z (1) przez podstawienie $\varphi_1(C)$ w miejsce t , przyczem C należy przyjąć za zmien-

ną niezależną. Niech σ_1 oznacza długość łuku na S_1 , licząc od stałego punktu C_0 do zmiennego C , i niech λ_1, μ_1, ν_1 oznaczają kąty, jakie styczna do S_1 tworzy z osiami współrzędnych, mamy

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_1}{dC} \cos \lambda_1 &= \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)_{t_1} \frac{dt_1}{dC} + \left(\frac{\partial x}{\partial C} \right)_{t_1}, \\ \frac{d\sigma_1}{dC} \cos \mu_1 &= \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)_{t_1} \frac{dt_1}{dC} + \left(\frac{\partial y}{\partial C} \right)_{t_1}, \\ \frac{d\sigma_1}{dC} \cos \nu_1 &= \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)_{t_1} \frac{dt_1}{dC} + \left(\frac{\partial z}{\partial C} \right)_{t_1}; \end{aligned}$$

stąd otrzymujemy

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial x}{\partial C} \right)_{t_1} &= \cos \lambda_1 \frac{d\sigma_1}{dC} - \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)_{t_1} \frac{dt_1}{dC}, \\ \left(\frac{\partial y}{\partial C} \right)_{t_1} &= \cos \mu_1 \frac{d\sigma_1}{dC} - \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)_{t_1} \frac{dt_1}{dC}, \\ \left(\frac{\partial z}{\partial C} \right)_{t_1} &= \cos \nu_1 \frac{d\sigma_1}{dC} - \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)_{t_1} \frac{dt_1}{dC}. \end{aligned}$$

Podobne wzory będą miały oczywiście miejsce i dla krzywej S_2 ,

$$\left(\frac{\partial x}{\partial C} \right)_{t_2} = \cos \lambda_2 \frac{d\sigma_2}{dC} - \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)_{t_2} \frac{dt_2}{dC}, \quad \text{i t. d.}$$

Podstawiając w wyrażeniu $\frac{ds}{dC}$, powyżej otrzymaném, w miejsce

$$\left(\frac{\partial x}{\partial C} \right)_{t_1}, \left(\frac{\partial y}{\partial C} \right)_{t_1}, \dots, \left(\frac{\partial z}{\partial C} \right)_{t_1}$$

odpowiednie wyrażenia według ostatnich wzorów, otrzymamy

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dC} = & - \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial x}{\partial C} d \cos \alpha + \frac{\partial y}{\partial C} d \cos \beta + \frac{\partial z}{\partial C} d \cos \gamma \right) \\ & + (\cos \alpha \cos \lambda_2 + \cos \beta \cos \mu_2 + \cos \gamma \cos \nu_2)_{t_2} \frac{d\sigma_2}{dC} \\ & - (\cos \alpha \cos \lambda_1 + \cos \beta \cos \mu_1 + \cos \gamma \cos \nu_1)_{t_1} \frac{d\sigma_1}{dC} \end{aligned}$$

$$-\frac{dt_2}{dC} \left[\cos \alpha \frac{\partial x}{\partial t} + \cos \beta \frac{\partial y}{\partial t} + \cos \gamma \frac{\partial z}{\partial t} - \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2} \right]_{t_2}$$

$$+\frac{dt_1}{dC} \left[\cos \alpha \frac{\partial x}{\partial t} + \cos \beta \frac{\partial y}{\partial t} + \cos \gamma \frac{\partial z}{\partial t} - \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2} \right]_{t_1}$$

Podstawiając na drugiej stronie w dwóch ostatnich wierszach zamiast $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ odpowiednie wyrażenia, otrzymujemy w rezultacie dla obydwóch wielomianów zawartych w wielkich nawiasach wartość zero; nazywając następnie przez ω_2 kąt pomiędzy krzywą S_2 i krzywą geodezyjną C w punkcie ich wzajemnego przecięcia się, a przez ω_1 kąt pomiędzy krzywą S_1 i kierunkiem ujemnym krzywej geodezyjnej C , mamy

$$(\cos \alpha \cos \lambda_2 + \cos \beta \cos \mu_2 + \cos \gamma \cos \nu_2)_{t_2} = \cos \omega_2,$$

$$(\cos \alpha \cos \lambda_1 + \cos \beta \cos \mu_1 + \cos \gamma \cos \nu_1)_{t_1} = -\cos \omega_1.$$

Powyższe równanie przyjmuje tedy postać:

$$ds = -dC \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial x}{\partial C} d \cos \alpha + \frac{\partial y}{\partial C} d \cos \beta + \frac{\partial z}{\partial C} d \cos \gamma \right) + \cos \omega_1 d\sigma_1 + \cos \omega_2 d\sigma_2. \quad (3)$$

Dotąd nie wprowadziliśmy jeszcze w rachunek głównego naszego założenia, że linie C są geodezyjne, więc wzór (3) ma miejsce dla wszelkiego układu, choćby linie składające go nie były geodezyjnymi; w przypadku gdy linie C są geodezyjnymi, ma miejsce równość

$$\frac{\partial x}{\partial C} d \cos \alpha + \frac{\partial y}{\partial C} d \cos \beta + \frac{\partial z}{\partial C} d \cos \gamma = 0,$$

wyrażająca warunek wzajemnej prostopadłości dwóch prostych

$$\frac{X-x}{d \cos \alpha} = \frac{Y-y}{d \cos \beta} = \frac{Z-z}{d \cos \gamma},$$

$$\frac{X-x}{\frac{\partial x}{\partial C}} = \frac{Y-y}{\frac{\partial y}{\partial C}} = \frac{Z-z}{\frac{\partial z}{\partial C}},$$

z których pierwsza jest normalną główną krzywej C w punkcie (x, y, z) , a druga leży w płaszczyźnie stycznej do powierzchni w tymże punkcie (x, y, z) ; więc dla układu geodezyjnego zamiast (3) mamy

$$ds = \cos \omega_1 d\sigma_1 + \cos \omega_2 d\sigma_2. \quad (4)$$

Jestto właśnie wzór, który tu chcieliśmy wyprowadzić z całą ścisłością, gdyż, jak już wyżej powiedziano, odgrywa on rolę zasadniczą w teorii linii geodezyjnych. Pierwsze jego zastosowanie polega na ustanowieniu dla krzywych na jakiegokolwiek powierzchni teorii rozwiniętych i rozwijających, zupełnie podobnej do tej, która ma miejsce dla krzywych na płaszczyźnie. Następnie wzór ten prowadzi bezpośrednio do znanych powszechnie dwóch twierdzeń Gaussa.

Pierwsze z nich polega na tém, że jeżeli obie krzywe S_1 i S_2 przecinają wszystkie linie geodezyjne C ortogonalnie, wtedy długość s jest ilością stałą, a także i odwrotnie, jeśli krzywa S_1 przecina wszystkie krzywe C pod kątem prostym i przytém długość s jest stałą, to wtedy krzywa S_2 jest również ortogonalną trajektorią krzywych C . W takim razie krzywe S_1 i S_2 nazywają się równoległymi.

Drugie twierdzenie Gaussa stosuje się do przypadku, kiedy wszystkie krzywe C w układzie przechodzą przez jeden i tenże punkt O , a krzywa S_1 redukuje się do tegoż punktu O ; wzór (4) przyjmuje wtedy postać

$$ds = d\sigma_2 \cos \omega_2, \quad (5)$$

skąd widać bezpośrednio, że jeśli s jest ilością stałą, to S_2 jest trajektorią ortogonalną dla układu C i naodwrot. W takim razie krzywa S_2 nazywa się linią kołową na danej powierzchni.

3. Zwykle mało zwraca się uwagi na tę okoliczność, że forma wzoru

$$ds = d\sigma_1 \cos \omega_1 + d\sigma_2 \cos \omega_2 \quad (1)$$

jest charakterystyczną dla linii geodezyjnych, mianowicie:

Jeśli w układzie krzywych C dla wszelkich dwóch krzywych linii S_1 i S_2 ma miejsce wzór (1), to wszystkie linie C są geodezyjne.

Dla dowiedzenia tego weźmy wzór

$$ds = -dC \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial x}{\partial C} d \cos \alpha + \frac{\partial y}{\partial C} d \cos \beta + \frac{\partial z}{\partial C} d \cos \gamma \right) + \cos \omega_1 d\sigma_1 + \cos \omega_2 d\sigma_2,$$

który, jak nam wiadomo, ma miejsce dla układu złożonego z jakichkolwiek linii, i wprowadźmy do niego nasze założenie (1); otrzymujemy

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial x}{\partial C} d \cos \alpha + \frac{\partial y}{\partial C} d \cos \beta + \frac{\partial z}{\partial C} d \cos \gamma \right) = 0.$$

Równość ta ma miejsce przy wszelkich wartościach t_2 , więc w miejsce t_2 możemy napisać poprostu t ;

$$\int_t^t \left(\frac{\partial x}{\partial C} d \cos \alpha + \frac{\partial y}{\partial C} d \cos \beta + \frac{\partial z}{\partial C} d \cos \gamma \right) = 0;$$

stąd, biorąc pochodną, otrzymujemy

$$\frac{\partial x}{\partial C} d \cos \alpha + \frac{\partial y}{\partial C} d \cos \beta + \frac{\partial z}{\partial C} d \cos \gamma = 0,$$

na mocy czego wnosimy, że normalna główna krzywej C w każdym jej punkcie jest prostopadłą do prostej

$$\frac{X-x}{\frac{\partial x}{\partial C}} = \frac{Y-y}{\frac{\partial y}{\partial C}} = \frac{Z-z}{\frac{\partial z}{\partial C}}.$$

A ponieważ też sama normalna główna jest zawsze prostopadłą do stycznej

$$\frac{X-x}{\frac{\partial x}{\partial t}} = \frac{Y-y}{\frac{\partial y}{\partial t}} = \frac{Z-z}{\frac{\partial z}{\partial t}},$$

więc musi być prostopadłą do płaszczyzny stycznej, innymi słowy, linia C jest geodezyjną.

4. Przypuśćmy, że mamy powierzchnię, wyrażoną za pomocą trzech równań

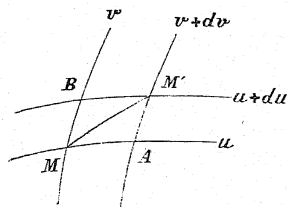
$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \theta(u, v).$$

Szczególne wartości danych jednej ze zmiennych u lub v określa odpowiednią krzywą na powierzchni, a przecięcie się dwóch krzywych

$$u = \text{const.}, \quad v = \text{const.}$$

daje punkt (u, v) .

Weźmy pod uwagę dwa punkty nieskończenie bliskie i wyobraźmy sobie



nakreślone krzywe współrzędne, przechodzące przez każdy z nich; za kierunek dodatni na każdej z krzywych u, v , licząc od punktu M , przyjmujemy ten, w którym wartość u lub v wzrasta. Wprowadźmy zwykle przyjęte oznaczenia:

$$A = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2, \quad B = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v},$$

$$C = \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)^2,$$

i nazwijmy długości łuków MA, MB, MM' odpowiednio przez $d\sigma_1, d\sigma_2, d\sigma$; dla dwóch pierwszych mamy wzory

$$d\sigma_1 = \sqrt{C} dv, \quad d\sigma_2 = \sqrt{A} du;$$

są to poprostu różniczki łuków na krzywych u i v ; co się zaś tyczy łuku $d\sigma$, to, odrzucając ilości nieskończenie małe wyższego rzędu, możemy napisać

$$d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

gdyż zamiast łuku MM' możemy wziąć cięciwę MM' ; lepiej jednak wziąć pod uwagę rzuty elementu $d\sigma$ na osie X, Y, Z ; w rzeczy samej, rzut linii $d\sigma$ na oś X równa się

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv$$

$$= \sqrt{A} du \cos(v, x) + \sqrt{C} dv \cos(u, x)$$

$$= d\sigma_2 \cos(v, x) + d\sigma_1 \cos(u, x).$$

Podobne wyrażenia otrzymujemy dla dwóch pozostałych rzutów

$$dy = d\sigma_2 \cos(v, Y) + d\sigma_1 \cos(u, Y),$$

$$dz = d\sigma_2 \cos(v, Z) + d\sigma_1 \cos(u, Z).$$

Równania te pokazują nam, że jeżeli odrzucimy ilości nieskończenie małe wyższych rzędów, to element linijny $d\sigma$ może być uważanym, jako przekątna równoległoboku zbudowanego na liniach

$$d\sigma_1 = \sqrt{C} dv, \quad d\sigma_2 = \sqrt{A} du,$$

z których pierwsza leży na stycznej w punkcie M do krzywej u . Stąd wynika następujący wzór dla wielkości $d\sigma^2$:

$$d\sigma^2 = A du^2 + 2 \sqrt{AC} \cos \omega du dv + C dv^2,$$

albo, po wprowadzeniu ilości B , która oczywiście jest równą $\sqrt{AC} \cos \omega$:

$$d\sigma^2 = A du^2 + 2 B du dv + C dv^2. \quad (1)$$

Niech O oznacza punkt stały na powierzchni, a M punkt zmienny, i niech $s = OM$ będzie łukiem geodezyjnym, łączącym O z M ; ilość s jest funkcją dwóch zmiennych niezależnych u i v , jej różniczka zupełna równa się

$$ds = \frac{\partial s}{\partial u} du + \frac{\partial s}{\partial v} dv.$$

Pochodna częściowa $\frac{\partial s}{\partial u}$ może być wyrażoną za pomocą wzoru (5) w poprzednim numerze, gdyż wyraża ona pochodną łuku s w układzie linii geodezyjnych; także i pochodna $\frac{\partial s}{\partial v}$ może być wyrażoną przy pomocy tegoż wzoru; w rzeczy samej mamy

$$\frac{\partial s}{\partial u} du = d\sigma_2 \cos \theta_2,$$

$$\frac{\partial s}{\partial v} dv = d\sigma_1 \cos \theta_1$$

gdzie θ_1 i θ_2 oznaczają kąty, jakie przedłużenie linii OM w punkcie M tworzy z liniami współrzędnymi u i v . Różniczka zupełna ds wyraża się tak:

$$ds = d\sigma_1 \cos \theta_1 + d\sigma_2 \cos \theta_2,$$

lecz summa rzutów dwóch elementów $d\sigma_1$ i $d\sigma_2$ na jakąkolwiek oś równa się rzutowi elementu $d\sigma$ na tę samą oś, mamy przeto

$$ds = d\sigma \cos \theta, \quad (2)$$

gdzie θ oznacza kąt między przedłużeniem OM i elementem $d\sigma$.

Odległość geodezyjna dwóch punktów zmiennych (u, v) i (u', v') jest funkcją czterech zmiennych, jej różniczka zupełna jest sumą dwóchróżniczek: jednej względem zmiennych u i v , drugiej względem dwóch pozostałych zmiennych u' i v' , mamy więc

$$ds = d\sigma \cos \theta + d\sigma' \cos \theta'. \quad (3)$$

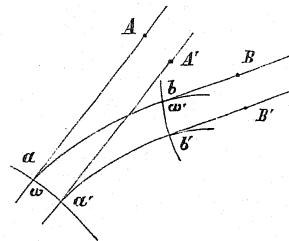
Forma tego wzoru jest też sama co i wzoru (4) w poprzednim numerze, względem którego (3) jest uogólnieniem.

5. Na mocy powyższych wywodów łatwo jest dowieść następującego twierdzenia, znanego dobrze w nauce, lecz zwykle wyprowadzanego przez autorów sposobem ubocznym

Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby wszystkie linie w układzie

$$x = f_1(t, C), \quad y = f_2(t, C), \quad z = f_3(t, C)$$

były geodezyjnymi jest, iżby wszystkie ich styczne były normalnymi do jednej i tej samej powierzchni.



Przypuśćmy najprzód, że wszystkie styczne są prostopadłe do pewnej powierzchni P ; niech ab i $a'b'$ przedstawiają nam dwie krzywe danego układu nieskończenie bliskie i zawarte między dowolnymi krzywymi S_1 i S_2 ; niech następnie aA , $a'A'$, bB i $b'B'$ przedstawiają styczne do ab i $a'b'$ w ich początku i końcu, a punkty A , A' , B , B' niechaj będą punktami spotkania tych stycznych z powierzchnią P . Na mocy znanych właściwości rozwijającej mamy

$$aA - bB = ab,$$

$$a'A' - bB = a'b',$$

stąd, czyniąc $a'b' - ab = ds$, otrzymujemy

$$ds = d(aA) - d(bB);$$

lecz znowu z innej strony, nazywając

$$aa' = d\sigma, \quad bb' = d\sigma_1,$$

mamy

$$d(aA) = d\sigma \cos \omega, \quad d(bB) = d\sigma_1 \cos \omega_1;$$

więc

$$ds = d\sigma \cos \omega + d\sigma_1 \cos \omega_1.$$

Wyrażenie to dowodzi, że ab jest linią geodezyjną.

Przejdźmy do przypadku odwrotnego; przypuśćmy, że wszystkie krzywe w danym układzie są geodezyjne, i niech aa' , bb' przedstawiają dwie dowolnie wzięte trajektorie ortogonalne w tymże układzie; mieć będziemy

$$ab = a'b'.$$

Przyjawszy teraz trajektorę aa' za początkową, odłóżmy na stycznych aA , $a'A'$, ... jedną i tę samą długość dowolną

$$aA = a'A' = \dots = k,$$

następnie na każdej innej stycznej w jakimkolwiek punkcie na powierzchni, na przykład w b , odłóżmy długość

$$bB = k - ab.$$

Miejsce geometryczne wszystkich punktów, takich jak $A, A', B, \dots$ przedstawiać będzie pewną powierzchnię, która przecinać będzie proste $aA, a'A', bB, \dots$ pod kątem prostym.

Rzeczywiście, według założenia mamy

$$\begin{aligned} aA - bB &= ab, \\ a'A' - b'B' &= a'b', \end{aligned}$$

stąd otrzymujemy

$$a'b' - ab = bB - b'B';$$

lecz $ab = a'b'$, przeto

$$d(bB) = 0,$$

albo

$$bb' \cos \omega_1 + BB' \cos bBB' = 0.$$

Według założenia bb' przecina linią ab pod kątem prostym, więc $\cos \omega_1 = 0$, i ostatnie równanie przyjmuje postać

$$BB' \cos bBB' = 0,$$

stąd wnosimy

$$\cos bBB' = 0,$$

czyli, że prosta bB jest prostopadłą do łuku BB' ; lecz z ogólnej teorii rozwiniętych wiadomo, że styczna bB jest prostopadłą do łuku rozwijającej; będąc zatem prostopadłą do dwóch różnych kierunków na powierzchni, jest tém samém prostopadłą do samej powierzchni ABB' .

Należy tu zwrócić uwagę na to, że w szczególnych przypadkach powierzchnia ABB' może się zredukować do linii.

6. Własność układu linii geodezyjnych, dowiedziona w poprzednim numerze, doprowadza łatwo do rezultatów analitycznych, które nie mogą być pominiętemi.

Przypuśćmy, że z każdego punktu x, y, z na pewnej danej powierzchni wychodzi prosta; niech dostawy kątów, które ta prosta tworzy z osiami współrzędnych, będą X, Y, Z . Są to pewne funkcje zmiennych x, y, z , czyniące zadanie równaniu

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1.$$

Warunek niezbędny i dostateczny, żeby wszystkie te proste były prostopadłemi do jednej i téjże powierzchni, polega na tém, żeby wyrażenie

$$Xdx + Ydy + Zdz,$$

uważane jako funkcja dwóch zmiennych niezależnych, było różniczką zupełną. Otóż zajmijmy się teraz bliższém rozpatrzeniem tego warunku.

Zgodzimy się przedewszystkiém punkty na danej powierzchni określać za pomocą jakichkolwiek współrzędnych krzywokreślnych u i v , i niech równanie

$$f(u, v, a) = 0 \quad (1)$$

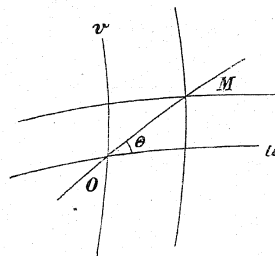
o parametrze dowolnym a przedstawia wszystkie krzywe danego układu. Przez każdy punkt na powierzchni przechodzi jedna krzywa układu (1) i dwie krzywe współrzędne

$$u = \text{const.}, \quad v = \text{const.};$$

kąt, jaki w tym punkcie tworzą między sobą krzywe u i v , będziemy oznaczali przez ω , a kąt między krzywą (1) i krzywą u — przez θ . Tak θ jak i ω są oczywiście funkcjami dwóch zmiennych niezależnych u i v , z tą tylko różnicą, że ω nie zależy od żadnych układów na powierzchni, gdy tymczasem θ określa się za pomocą równania (1).

Długość łuku $OM = ds$, zawartego między punktami (u, v) i $(u + du, v + dv)$ wyraża się wiadomym nam sposobem

$$ds^2 = A du^2 + 2B du dv + C dv^2; \quad (2)$$



kąt ω otrzymujemy z wzorów

$$\cos \omega = \frac{B}{\sqrt{AC}}, \quad \sin \omega = \sqrt{\frac{AC - B^2}{AC}}, \quad (3)$$

kąt zaś θ z równania

$$\frac{du}{dv} = \sqrt{\frac{C}{A}} \frac{\sin \theta}{\sin(\omega - \theta)}, \quad (4)$$

z którego ilość stała a powinna być wyrugowana przy pomocy (1).

Biorąc to wszystko pod uwagę, przejdźmy do utworzenia kryterium, aby przy wszelkich wartościach na a krzywe (1) były geodezyjnemi. Polega ono na tém, żeby wyrażenie

$$\left(X \frac{\partial x}{\partial u} + Y \frac{\partial y}{\partial u} + Z \frac{\partial z}{\partial u} \right) du + \left(X \frac{\partial x}{\partial v} + Y \frac{\partial y}{\partial v} + Z \frac{\partial z}{\partial v} \right) dv$$

powinno być różniczką zupełną; lecz oznaczywszy przez α, β, γ i α', β', γ' kąty, jakie krzywe u i v w punkcie (u, v) tworzą z osiami współrzędnych prostokreślnych, mamy

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \sqrt{A} \cos \alpha', \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \sqrt{A} \cos \beta', \quad \frac{\partial z}{\partial u} = \sqrt{A} \cos \gamma';$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \sqrt{C} \cos \alpha, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \sqrt{C} \cos \beta, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \sqrt{C} \cos \gamma,$$

i powyższe wyrażenie różniczkowe może być napisane tak:

$$\sqrt{A} (X \cos \alpha' + Y \cos \beta' + Z \cos \gamma') du + \sqrt{C} (X \cos \alpha + Y \cos \beta + Z \cos \gamma) dv,$$

albo

$$\sqrt{A} \cos (\omega - \theta) du + \sqrt{C} \cos \theta dv.$$

Otrzymujemy stąd następujące twierdzenie:

Twierdzenie. Aby wszystkie krzywe w układzie $f(u, v, a) = 0$ były geodezyjnymi, jest koniecznym i dostatecznym, iżby kąt θ zawarty między jakąkolwiek krzywą danego układu i krzywą współrzędną u , uważany za funkcję dwóch zmiennych niezależnych u i v , zadość czynił równaniu

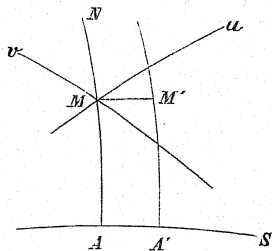
$$\frac{\partial \sqrt{A} \cos (\omega - \theta)}{\partial v} = \frac{\partial \sqrt{C} \cos \theta}{\partial u}$$

Ze względu na ważność tego twierdzenia, postaramy się dojść do niego inną jeszcze drogą.

7. Niech S przedstawia nam trajektorę ortogonalną krzywych w układzie $f(u, v, a) = 0$; przez każdy punkt (u, v) na powierzchni przejdzie jedna krzywa danego układu, która spotyka trajektorę S w pewnym punkcie A ; jeśli punkt wzięty pod uwagę jest M , to długość łuku AM nazywać będziemy odległością geodezyjną punktu M od krzywej S i oznaczać ją będziemy przez p ; ta ilość jest oczywiście funkcją dwóch zmiennych niezależnych u i v .

Różniczka zupełna funkcji p wyrazi się według ogólnego wzoru dla różniczki łuku geodezyjnego

$$dp = MM' \cos M'MN.$$



Lecz element linijny MM' jest, jak nam już wiadomo, przekątną równoległoboku zbudowanego na elementach $\sqrt{A} du$ i $\sqrt{C} dv$; z nich pierwszy leży na stycznej do krzywej v , drugi na stycznej do krzywej u ; więc rzut linii $MM' = ds$ na jakąkolwiek oś równa się summie rzutów linii $\sqrt{A} du$ i $\sqrt{C} dv$ na tę samą oś, mianowicie:

$$MM' \cos M'MN = \sqrt{A} du \cos (v, MN) + \sqrt{C} dv \cos (u, MN),$$

to jest,

$$dp = \sqrt{A} \cos (\omega - \theta) du + \sqrt{C} \cos \theta dv.$$

Równanie to pokazuje, że wyrażenie

$$\sqrt{A} (\cos (\omega - \theta) du + \sqrt{C} \cos \theta dv)$$

jest różniczką zupełną, i prócz tego wskazuje nam geometryczne znaczenie jego całki.

8. Jeśli funkcja $\theta = F(u, v)$ czyni zadość równaniu

$$\frac{\partial \sqrt{A} \cos (\omega - \theta)}{\partial v} = \frac{\partial \sqrt{C} \cos \theta}{\partial u},$$

to wszystkie proste styczne do danej powierzchni, tworzące w punkcie styczności z linią współrzędną u kąt równy $F(u, v)$, będą prostopadłe do jednej i tej samej powierzchni, a w punktach styczności będą stycznymi do linii, tworzących na powierzchni pewien układ geodezyjny. Dla wyznaczenia tego układu należy znaleźć całkę ogólną równania (4) w numerze 6.

Gdyby funkcja $F(u, v)$, w wyrażeniu swém zawierała stałą dowolną a , w takim razie całka ogólna równania (4) n^o 6 zawierałaby stałe dowolne dwie i przedstawiałaby równanie ogólne linii geodezyjnej.

9. Wszelka linia geodezyjna może być zawsze uważana za należącą do jakiegoś układu; więc z tego, co było wyżej powiedzianem, wynika, że współrzędne każdego punktu na danej linii geodezyjnej G i kąt θ , jaki w tymże punkcie krzywa G tworzy z krzywą u , czynią zadość następującym dwóm równaniom różniczkowym:

$$\sqrt{A} \sin (\omega - \theta) \frac{\partial \theta}{\partial v} + \sqrt{C} \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial u} = \cos \theta \frac{\partial \sqrt{C}}{\partial u} - \cos (\omega - \theta) \frac{\partial \sqrt{A}}{\partial v} + \sqrt{A} \sin (\omega - \theta) \frac{\partial \omega}{\partial v} \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\sqrt{C} \sin \theta} = \frac{dv}{\sqrt{A} \sin (\omega - \theta)}, \quad (2)$$

z których pierwsze, jak widzimy, jest równaniem o pochodnych częściowych, drugie — zwyczajnem

Stąd łatwo otrzymać nowe równanie różniczkowe zwyczajne ze zmiennymi θ, v i u ; w samej rzeczy, mamy

$$d\theta = \frac{\partial \theta}{\partial u} du + \frac{\partial \theta}{\partial v} dv,$$

skąd przy pomocy (2) znajdujemy

$$d\theta = \frac{V\overline{C} \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial u} + V\overline{A} \sin (\omega - \theta) \frac{\partial \theta}{\partial v}}{V\overline{C} \sin \theta} du,$$

a biorąc pod uwagę (1), otrzymujemy

$$d\theta = \frac{\cos \theta \frac{\partial V\overline{C}}{\partial u} + V\overline{A} \sin (\omega - \theta) \frac{\partial \omega}{\partial v} - \cos (\omega - \theta) \frac{\partial V\overline{A}}{\partial v}}{V\overline{C} \sin \theta},$$

albo

$$d\theta = \frac{1}{V\overline{C}} \left[\frac{\partial V\overline{C}}{\partial u} - \frac{\partial V\overline{A} \cos \omega}{\partial v} \right] \cot \theta du - \frac{1}{V\overline{C}} \frac{\partial V\overline{A} \sin \omega}{\partial v} du.$$

Podstawiając po stronie prawej w miejsce $\sin \omega$ i $\cos \omega$ odpowiednie wartości, otrzymamy

$$d\theta = \left[\frac{1}{2C} \frac{\partial C}{\partial u} - \frac{1}{C} \frac{\partial B}{\partial v} + \frac{1}{2} \frac{B}{C^2} \frac{\partial C}{\partial v} \right] \cot \theta du - \frac{1}{V\overline{AC-B^2}} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial v} - \frac{B}{C} \frac{\partial B}{\partial v} + \frac{1}{2} \frac{B^2}{C^2} \frac{\partial C}{\partial v} \right] du.$$

Z (2) znajdujemy

$$\frac{du}{\sin \theta} = \frac{B du + C dv}{V\overline{AC-B^2} \cos \theta},$$

skąd

$$\cot \theta du = \frac{B du + C dv}{V\overline{AC-B^2}}.$$

Podstawiając tę wartość w miejsce $\cot \theta du$ po stronie prawej poprzedniego równania, otrzymujemy

$$2V\overline{AC-B^2} d\theta = \left[\frac{B}{C} \frac{\partial C}{\partial u} - \frac{\partial A}{\partial v} \right] du + \left[\frac{\partial C}{\partial u} - 2 \frac{\partial B}{\partial v} + \frac{B}{C} \frac{\partial C}{\partial v} \right] dv. \quad (3)$$

Równania (2) i (3) razem przedstawiają ogólne równania różniczkowe linii geodezyjnej w tej samej formie, w jakiej je podał pierwszy raz Gauss;

kąt θ odgrywa tu rolę ilości pobocznej, wprowadzonej do rachunku dla dogodności; jeśli ją wyrugujemy, to mieć będziemy jedno równanie drugiego rzędu z dwiema zmiennymi u i v .

Metoda, której użyliśmy tu, doprowadza nas do następującego twierdzenia:

Twierdzenie. Wszelka linia geodezyjna jest charakterystyką równania o pochodnych częściowych

$$\frac{\partial V\overline{A} \cos (\omega - \theta)}{\partial v} = \frac{\partial V\overline{C} \cos \theta}{\partial u},$$

to jest, jeżeli to równanie przedstawimy pod postacią

$$U \frac{\partial \theta}{\partial u} + V \frac{\partial \theta}{\partial v} = W,$$

o ogólne równania różniczkowe linii geodezyjnej mogą być napisane tak:

$$\frac{du}{U} = \frac{dv}{V} = \frac{d\theta}{W}.$$

10. Niech

$$F(u, v, \theta) = a \quad (1)$$

przedstawia jedną całkę ogólną równań linii geodezyjnej

$$\frac{du}{U} = \frac{dv}{V} = \frac{d\theta}{W}. \quad (2)$$

Rozwiązawszy (1) względem θ , otrzymamy funkcję

$$\theta = f(u, v, a), \quad (3)$$

zadając czyniąc równaniu

$$\frac{\partial V\overline{A} \cos (\omega - \theta)}{\partial v} = \frac{\partial V\overline{C} \cos \theta}{\partial u}; \quad (4)$$

i naodwrot, jeśli się nam uda znaleźć funkcję $f(u, v, a)$ ze stałą dowolną a , któraby czyniła zadość równaniu (14), to równanie (3), albo równoważne z niem (1), da nam całkę ogólną układu dwóch równań (2).

Dla zupełnego rozwiązania układu (2) pozostaje znaleźć jeszcze drugą całkę ogólną

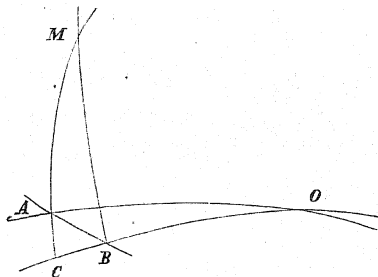
$$F_1(u, v, \theta) = b; \quad (5)$$

jeśli ją znajdziemy, to wyrugowawszy θ z równań (1) i (5), mieć będziemy ogólne równanie skończone linii geodezyjnej.

Układ (2) albo, co na jedno wychodzi, równanie (4) posiada szczególną własność, wskazaną przez Jacobi'ego, polegającą na tym, że jeżeli znamy jedną całkę ze stałą dowolną, to już dalej przy pomocy zwyczajnych kwadratur znajdziemy i drugą całkę ze stałą dowolną, a tym samym rozwiązujemy zupełnie układ (2), albo, co na jedno wychodzi, równania (4).

Dla dowiedzenia tego zwróćmy naprzód uwagę na następujące twierdzenie pomocnicze:

Niech na powierzchni dana będzie krzywa AO , którą wyznacza wartość parametru a ; weźmy na powierzchni jakikolwiek punkt M , którego współrzędne są u i v , i przeprowadźmy przez ten punkt linię geodezyjną MA prostopadłą do AO ; długość łuku MA oznaczmy przez p . Ilość p jest pewną funkcją ilości u , v i a , mającą tę własność, że jej pochodna częściowa $\frac{\partial p}{\partial a}$ zachowuje jedną i tę samą wartość we wszystkich punktach krzywej geodezyjnej MA .



Rzeczywiście, niech OB przedstawia krzywą, odpowiadającą nowej wartości parametru a , równiej $a + \Delta a$, MB linią geodezyjną, przechodzącą przez M i prostopadłą do OB ; oznaczmy przez C punkt przecięcia MA z OB ; mamy

$$MA = p, \quad MB = p + \Delta p, \quad \frac{\partial p}{\partial a} = \cos a \lim \frac{AB}{\Delta a},$$

gdzie a oznacza dla skrócenia kąt CAB , zaś łuk AB jest to miejsce geometryczne punktu B przy zmianie ilości ciągłej a od początkowej wartości a do wartości $a + \Delta a$.

Weźmy pod uwagę trójkąt prostokreślny ABC , oznaczmy jego boki przez $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, a kąty przez A , B , C ; będzie

$$\frac{\partial p}{\partial a} = \cos a \lim \frac{\overline{AB}}{\Delta a} = \cos a \lim \frac{\overline{AC} \sin C}{\sin B \Delta a},$$

albo

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial a} &= \cos a \lim \frac{\overline{AC}}{\Delta a} \lim \frac{\sin C}{\sin B} \\ &= \cos a \lim \frac{\overline{AC}}{\Delta a} \frac{\lim \sin C}{\lim \sin B}; \end{aligned}$$

lecz oczywiście

$$\lim \sin C = \sin \frac{\pi}{2} = 1,$$

$$\lim \sin B = \lim \sin (\pi - A - C) = \lim \sin \left(\frac{\pi}{2} - A \right) = \cos a,$$

przeto

$$\frac{\partial p}{\partial a} = \lim \frac{AC}{\Delta a}.$$

Prawa strona tego równania wcale nie zależy od miejsca, jakie punkt M zajmuje na krzywej MA ; więc we wszystkich punktach tej krzywej wartość $\frac{\partial p}{\partial a}$ jest stałą. Co było do okazania.

Uwaga. Może się zdarzyć, że ilość $\frac{\partial p}{\partial a}$ jest stałą sposobem tożsamy, to jest dla wszystkich punktów na powierzchni. Będzie to miało miejsce tylko wtedy, gdy krzywe OA i OB są równoległe; lecz przypadek ten nie ma dla nas żadnej wagi: w dalszych zastosowaniach łatwo będzie domyslić się, że tam miejsca on mieć nie może.

Zwracając się teraz do twierdzenia Jacobi'ego, przypuścimy, że znaleźliśmy jedną całkę równania (4) w postaci (3); więc dla tej funkcji suma

$$\sqrt{A} \cos (\omega - \theta) du + \sqrt{C} \cos \theta dv$$

jest różniczką zupełną pewnej funkcji $P(u, v, a)$, którą potrafimy znaleźć jedynie za pomocą zwyczajnych kwadratur; dla skrócenia będziemy ją czasami oznaczali poprostu przez P .

Przy każdej wartości szczególniej dla a dwa równania

$$\frac{du}{\sqrt{C} \sin \theta} = \frac{dv}{\sqrt{A} \sin (\omega - \theta)}, \quad \theta = f(u, v, a)$$

wyznaczają pewien układ linii geodezyjnych, którego jedna którakolwiek z wielu ortogonalnych trajektorij zawierać będzie w swém równaniu parametru a , tak że ze zmianą tego parametru będą się zmieniały jednocześnie

i układ linii geodezyjnych i jego ortogonalna trajektoria, wzięta pod uwagę. Nie może być przy tym, aby różne położenia trajektorii ortogonalnej były równoległymi, gdyż w takim razie układ geodezyjny pozostawałby niezmiennym, innymi słowy, funkcja $f(u, v, a)$ nie zależałaby od a , co sprzeciwia się założeniu.

Oznaczwszy przez p odległość geodezyjną punktu (u, v) od trajektorii ortogonalnej układu, mamy (n^o 7)

$$dp = \sqrt{A} \cos(\omega - \theta) du + \sqrt{C} \cos \theta dv;$$

więc, na zasadzie powyższego określenia funkcji P , będzie

$$\begin{aligned} dp &= dP, \\ p &= P + C, \end{aligned}$$

gdzie C oznacza ilość stałą, zależącą w ogóle od a .

Przechodzimy stąd do wniosku, że równanie

$$P = \text{const.}$$

wyznacza trajektorie ortogonalne układu, określonego przez wartość parametru a ; w szczególności

$$P(u, v, a) = P(u_0, v_0, a) \quad (6)$$

jest równaniem trajektorii ortogonalnej, przechodzącej przez punkt dowolny (u_0, v_0) . Wzór

$$p = P(u, v, a) - P(u_0, v_0, a) \quad (7)$$

da je odległość geodezyjną jakiegokolwiek punktu (u, v) od krzywej (6).

Na mocy wyżej dowiedzionego twierdzenia pomocniczego, biorąc pod uwagę wzór (7), przechodzimy ostatecznie do wniosku, że we wszystkich punktach jednej i tej samej linii geodezyjnej, należącej do naszego układu, wartość pochodnej częściowej $\frac{\partial P}{\partial a}$ jest stałą; więc równanie jakiegokolwiek linii geodezyjnej naszego układu można napisać tak:

$$\frac{\partial P}{\partial a} = b \quad (8)$$

gdzie b przedstawia nową ilość stałą, wyznaczającą różne linie geodezyjne w układzie.

Równanie (8) przedstawia oczywiście w formie skończonej równania wszystkich linii geodezyjnych na danej powierzchni: jest to druga całka ogólna układu (2).

II. Przypuszczając, że funkcja $\theta = f(u, v, a)$ jest nam znana, zobaczmy, jak wyrazi się odległość geodezyjna dwóch jakichkolwiek punktów na powierzchni.

Ogólne równanie linii geodezyjnej, przechodzącej przez punkt (u_0, v_0) przedstawia się tak:

$$\frac{\partial P(u, v, a)}{\partial a} = \frac{\partial P(u_0, v_0, a)}{\partial a} \quad (1)$$

Abby linia ta przechodziła nadto przez drugi punkt dany (u_1, v_1) , mamy warunek

$$\frac{\partial P(u_1, v_1, a)}{\partial a} = \frac{\partial P(u_0, v_0, a)}{\partial a} \quad (2)$$

Wyrugowawszy z (1) i (2) ilość a , otrzymamy równanie linii geodezyjnej, łączącej (u_0, v_0) z (u_1, v_1) ; więc wartość a otrzymana z (2) wyznacza taki układ linii geodezyjnych, w którym linia przechodząca przez jeden z punktów (u_0, v_0) , (u_1, v_1) przechodzi także przez drugi.

Lecz z poprzedniego numeru wiadomo już, że odległość geodezyjna punktu (u_1, v_1) od trajektorii ortogonalnej układu, przechodzącej przez punkt (u_0, v_0) , równa się

$$P(u_1, v_1, a) - P(u_0, v_0, a);$$

jeśli przeto w tym wzorze na a damy wartość otrzymaną z (2), to znajdziemy oczywiście odległość geodezyjną punktu (u_1, v_1) od (u_0, v_0) . Mamy więc twierdzenie:

Odległość geodezyjna d dwóch punktów (u_0, v_0) i (u_1, v_1) wyznacza się za pomocą wzoru

$$d = P(u_1, v_1, a) - P(u_0, v_0, a),$$

przyczem wartość na a otrzymuje się z równania

$$\frac{\partial P(u_1, v_1, a)}{\partial a} - \frac{\partial P(u_0, v_0, a)}{\partial a} = 0.$$

12. Przejdźmy teraz do niektórych wniosków, wypływających bezpośrednio z równania geodezyjnego

$$\frac{\partial \sqrt{A} \cos(\omega - \theta)}{\partial v} = \frac{\partial \sqrt{C} \cos \theta}{\partial u} \quad (1)$$

Kładąc najprzód $\theta = 0$, otrzymujemy warunek konieczny i dostateczny, aby wszystkie linie współrzędne u były geodezyjnymi:

$$\frac{\partial \sqrt{A} \cos \omega}{\partial v} = \frac{\partial \sqrt{C}}{\partial u},$$

czyli

$$\frac{\partial \sqrt{C}}{\partial u} = \frac{\partial \frac{B}{\sqrt{C}}}{\partial v}. \quad (2)$$

Podobniez kładąc $\theta = \omega$, otrzymamy warunek konieczny i dostateczny, aby wszystkie linie v były geodezyjnymi:

$$\frac{\partial \sqrt{A}}{\partial v} = \frac{\partial \frac{B}{\sqrt{A}}}{\partial u}. \quad (3)$$

W przypadku układu współrzędnych ortogonalnych mamy $B = 0$, warunek (2) doprowadza do twierdzenia powszechnie znanego, mianowicie: aby wszystkie linie u były geodezyjnymi, jest koniecznym i wystarczającym, by współczynnik C był funkcją tylko jednej zmiennej v .

13. Za pomocą powyższych równań łatwo możemy dowieść następującego twierdzenia Liouville'a:

Jeżeli na powierzchni istnieją dwa układy linii geodezyjnych, przecinających się pod kątem stałym, to powierzchnia jest albo płaszczyzną, albo rozwijalną na płaszczyznę.

Oznaczając przez k ilość stałą, mamy

$$\cos \omega = k = \frac{B}{\sqrt{AC}};$$

równania (2) i (3) w poprzednim numerze mają miejsce jednocześnie i odpowiednio przyjmują postać

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sqrt{C}}{\partial u} &= k \frac{\partial \sqrt{A}}{\partial v}, \\ \frac{\partial \sqrt{A}}{\partial v} &= k \frac{\partial \sqrt{C}}{\partial u}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Mnożąc wzajemnie obydwie strony tych równań, otrzymujemy

$$(1-k^2) \frac{\partial \sqrt{C}}{\partial u} \frac{\partial \sqrt{A}}{\partial v} = 0;$$

lecz k^2 nie równa się jedności, przeto

$$\frac{\partial \sqrt{C}}{\partial u} \frac{\partial \sqrt{A}}{\partial v} = 0. \quad (2)$$

Z (1) i (2) wnioskujemy, że

$$\frac{\partial \sqrt{C}}{\partial u} = \frac{\partial \sqrt{A}}{\partial v} = 0,$$

co pokazuje, że A jest funkcją tylko jednego u , a C — jednego v .

Wprowadziwszy w miejsce zmiennych u i v nowe zmienne u' i v' , wyznaczone za pomocą równań

$$\sqrt{A} du = du',$$

$$\sqrt{C} dv = dv',$$

nie zmieniamy w niczym samych linii współrzędnych, a element liniowy na powierzchni wyrazi się w nowych zmiennych tak:

$$ds^2 = du'^2 + 2 \cos \omega du' dv' + dv'^2.$$

Stąd bezpośrednio widać, że powierzchnia jest rozwijalną na płaszczyznę.

14. Dajmy, że mamy układ współrzędnych ortogonalnych, w którym wszystkie linie v są geodezyjne; w takim razie wzór dla elementu liniowego sprowadza się do następującej postaci:

$$ds^2 = du^2 + m^2 dv^2, \quad (1)$$

gdzie m przedstawia pewną funkcją zmiennych u i v . Zmienna u oznacza tu odległość geodezyjną punktu (u, v) od jednej z krzywych $u = \text{const.}$, wybranej dowolnie.

Równanie geodezyjne o pochodnych częściowych, odpowiadające formie (1) jest takie:

$$m \cot \theta \frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial v} = -m'_u,$$

gdzie $m'_u = \frac{\partial m}{\partial u}$; otrzymujemy stąd równania charakterystyki

$$\frac{du}{m \cot \theta} = \frac{dv}{1} = -\frac{d\theta}{m'_u}. \quad (2)$$

Są to też same równania, które Gauss podał pierwszy raz w swojej rozprawie: „Disquisitiones circa etc.“

15. Weźmy jakąkolwiek powierzchnię obrotową, nazwijmy przez u odległość jakiegokolwiek punktu od bieguna, licząc, naturalnie, tę odległość po

łuku południka, a przez v oznaczmy kąt między południkiem danego punktu i pewnym południkiem stałym, przyjętym za pierwszy. Długość elementu liniowego na powierzchni wyrażać się będzie tak:

$$ds^2 = du^2 + r_u^2 dv^2, \quad (1)$$

gdzie r_u przedstawia pewną funkcją jednej zmiennej u : jestto promień równoleżnika, przechodzącego przez punkt dany.

Linia $u = \text{const.}$ przedstawia równoleżnik, a $v = \text{const.}$ południk.

Równanie geodezyjne o pochodnych częściowych jest następujące:

$$\frac{\partial r_u \sin \theta}{\partial u} = \frac{\partial \cos \theta}{\partial v}. \quad (2)$$

Uczyniwszy

$$r_u \sin \theta = a,$$

gdzie a jest ilością stałą dowolną, otrzymamy funkcją θ , oczywiście czyniącą zadość równaniu (2). Wynika stąd następujące twierdzenie:

Na powierzchni obrotowej w każdym punkcie na danej linii geodezyjnej iloczyn z promienia odpowiedniego równoleżnika przez ustawę kąta, jaki linia geodezyjna czyni z południkiem, jest ilością stałą.

Na mocy tego twierdzenia zagadnienie o liniach geodezyjnych na jakiegokolwiek powierzchni obrotowej sprowadza się do zwyczajnych kwadratur.

Funkcja P , która dla powierzchni obrotowej wyznacza się z równania

$$dP = \cos \theta du + a dv,$$

jest taka:

$$P = a v + \int \sqrt{1 - \frac{a^2}{r_u^2}} du.$$

Biorąc pochodną częściową funkcji P względem a , otrzymujemy ogólne równanie linii geodezyjnej w postaci skończonej

$$v = a \int \frac{du}{r_u \sqrt{r_u^2 - a^2}} + b,$$

gdzie b jest ilość stała dowolna.

Ogólne równanie linii geodezyjnej, przechodzącej przez punkt (u_0, v_0) , przedstawia się tak:

$$v - v_0 = a \int_{u_0}^u \frac{du}{r_u \sqrt{r_u^2 - a^2}}, \quad (3)$$

gdzie a jest stała dowolna.

Odległość geodezyjna punktów (u_0, v_0) , (u_1, v_1) wyraża się wzorem

$$a(v_1 - v_0) = \int_{u_0}^{u_1} \sqrt{1 - \frac{a^2}{r_u^2}} du,$$

przyczem wartość ilości a otrzymuje się z równania

$$v_1 - v_0 = a \int_{u_0}^{u_1} \frac{du}{r_u \sqrt{r_u^2 - a^2}}.$$

16. Przejdźmy na koniec do powierzchni elipsoidy z trzema nierównościami.

Równanie elipsoidy we współrzędnych prostokątnych zwyczajnych jest

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

przypuśćmy, że $a > b > c$.

Dla wyznaczenia punktów na powierzchni wprowadzimy współrzędne eliptyczne λ_1 i λ_2 . Najprostsze określenie tych współrzędnych jest takie: przez środek elipsoidy przeprowadzmy płaszczyznę A równoległą do płaszczyzny stycznej w danym punkcie M ; linia przecięcia się elipsoidy z płaszczyzną A jest elipsa; długość połowy osi wielkiej tej elipsy oznaczmy przez $\sqrt{\lambda_1}$, długość połowy małej osi przez $\sqrt{\lambda_2}$; ilości λ_1 i λ_2 nazywają się właściwie współrzędnymi eliptycznymi punktu M i zawarte są w granicach

$$\begin{aligned} b^2 &< \lambda_1 < a^2, \\ c^2 &< \lambda_2 < b^2. \end{aligned}$$

Współrzędne zwyczajne punktu na powierzchni elipsoidy wyrażają się za pomocą współrzędnych eliptycznych następującym sposobem:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} &= \frac{(a^2 - \lambda_1)(a^2 - \lambda_2)}{h^2 k^2}, \\ \frac{y^2}{b^2} &= \frac{(\lambda_1 - b^2)(b^2 - \lambda_2)}{h^2 l^2}, \\ \frac{z^2}{c^2} &= \frac{(\lambda_1 - c^2)(\lambda_2 - c^2)}{k^2 l^2}, \end{aligned}$$

gdzie dla skrócenia położyliśmy

$$a^2 - b^2 = h^2, \quad a^2 - c^2 = k^2, \quad b^2 - c^2 = l^2.$$

Równanie $\lambda_1 = \text{const.}$ przedstawia na powierzchni elipsoidy krzywą, powstałą z przecięcia jej z powierzchnią, hyperboloidy dwupowłokowej

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda_1} - \frac{y^2}{\lambda_1 - b^2} - \frac{z^2}{\lambda_1 - c^2} = 1,$$

a równanie $\lambda_2 = \text{const.}$ przedstawia krzywą, powstałą z przecięcia się powierzchni elipsoidy z powierzchnią hyperboloidy jednopowłokowej

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda_2} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda_2} - \frac{z^2}{\lambda_2 - c^2} = 1.$$

Łatwo także przekonać się, że w jakimkolwiek punkcie na powierzchni elipsoidy styczne do krzywych λ_1 i λ_2 są równoległe do osi przecięcia, oznaczonego przez nas wyżej przez A : mianowicie, styczna do krzywej λ_1 jest równoległą do małej osi przecięcia A , a styczna do krzywej λ_2 jest równoległą do wielkiej osi przecięcia A .

Element liniowy na powierzchni elipsoidy wyraża się tak:

$$ds^2 = \frac{1}{4} (\lambda_1 - \lambda_2) \left[\frac{\lambda_1 d\lambda_1^2}{(a^2 - \lambda_1)(\lambda_1 - b^2)(\lambda_1 - c^2)} + \frac{\lambda_2 d\lambda_2^2}{(a^2 - \lambda_2)(b^2 - \lambda_2)(\lambda_2 - c^2)} \right];$$

więc równanie geodezyjne o pochodnych częściowych przyjmuje postać

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{\lambda_1}{(a^2 - \lambda_1)(\lambda_1 - b^2)(\lambda_1 - c^2)}} \frac{\partial \sqrt{\lambda_1 - \lambda_2} \sin \theta}{\partial \lambda_2} \\ &= \sqrt{\frac{\lambda_2}{(a^2 - \lambda_2)(b^2 - \lambda_2)(\lambda_2 - c^2)}} \frac{\partial \sqrt{\lambda_1 - \lambda_2} \cos \theta}{\partial \lambda_1} \end{aligned}$$

Zobaczmy, czy nie można uczynić zadość temu równaniu, kładąc

$$\begin{cases} \sqrt{\lambda_1 - \lambda_2} \sin \theta = \varphi_1(\lambda_1), \\ \sqrt{\lambda_1 - \lambda_2} \cos \theta = \varphi_2(\lambda_2), \end{cases} \quad (1)$$

gdzie $\varphi_1(\lambda_1)$ oznacza pewną funkcją jednej zmiennej λ_1 , a $\varphi_2(\lambda_2)$ funkcją jednej zmiennej λ_2 ; z takiego przypuszczenia wynika

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \varphi_1(\lambda_1)^2 + \varphi_2(\lambda_2)^2,$$

a zatem

$$\begin{cases} \varphi_1(\lambda_1) = \sqrt{\lambda_1 - C}, \\ \varphi_2(\lambda_2) = \sqrt{C - \lambda_2}, \end{cases} \quad (2)$$

gdzie C oznacza stałą dowolną, która oczywiście musi być zawartą między a^2 i c^2 .

Z (1) i (2) otrzymujemy

$$\begin{cases} \sin^2 \theta = \frac{\lambda_1 - C}{\lambda_1 - \lambda_2}, \\ \cos^2 \theta = \frac{C - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}, \\ \tan^2 \theta = \frac{\lambda_1 - C}{C - \lambda_2}, \end{cases} \quad (3)$$

a stąd

$$\lambda_2 \sin^2 \theta + \lambda_1 \cos^2 \theta = C,$$

albo

$$\frac{\sin^2 \theta}{\lambda_1} + \frac{\cos^2 \theta}{\lambda_2} = \frac{C}{\lambda_1 \lambda_2}. \quad (4)$$

W równaniu tym θ oznacza kąt zawarty między krzywą λ_1 , przechodzącą przez punkt dany na powierzchni elipsoidy, a krzywą geodezyjną, należącą do układu, wyznaczonego wartością stałej C i przechodzącą przez tenże dany punkt. Jeżeli w tym punkcie przeprowadzimy styczną do linii geodezyjnej a przez środek elipsoidy równoległą do tej stycznej, to równoległa ta będzie leżała na przecięciu A i utworzy z osią małą tego przecięcia kąt θ , a z osią wielką kąt $\frac{\pi}{2} - \theta$; więc oznaczwszy jej długość, uważaną jako promień w elipsoidzie, przez d , mamy

$$\frac{1}{d^2} = \frac{\sin^2 \theta}{\lambda_1} + \frac{\cos^2 \theta}{\lambda_2}. \quad (5)$$

Z (4) i (5) otrzymujemy

$$\frac{1}{d^2} = \frac{C}{\lambda_1 \lambda_2},$$

albo

$$\frac{\lambda_1 \lambda_2}{d^2} = C. \quad (6)$$

Oznaczmy odległość środka elipsoidy od płaszczyzny stycznej do powierzchni elipsoidy w punkcie (λ_1, λ_2) przez p , mamy

$$\lambda_1 \lambda_2 p^2 = a^2 b^2 c^2; \quad (7)$$

z (6) i (7) otrzymujemy

$$d.p = \frac{a b c}{V C}.$$

Równanie to pokazuje, że dla wszystkich punktów jednej i tej samej linii geodezyjnej iloczyn $d.p$ jest stały. Jestto znane w geometrii twierdzenie Joachimsthała.

17. Funkcja, którą powyżej (n° 10) oznaczyliśmy przez P , dla powierzchni elipsoidy i dla współrzędnych eliptycznych przyjmuje następującą postać:

$$P = \int \frac{V \lambda_1 (\lambda_1 - C) d\lambda_1}{V(a^2 - \lambda_1)(\lambda_1 - b^2)(\lambda_1 - c^2)} + \int \frac{V \lambda_2 (C - \lambda_2) d\lambda_2}{V(a^2 - \lambda_2)(b^2 - \lambda_2)(\lambda_2 - c^2)}$$

Wziawszy pochodną względem C , otrzymamy następujące ogólne równanie linii geodezyjnej, przechodzącej przez punkt dany (λ'_1, λ'_2) :

$$\int_{\lambda'_1}^{\lambda_1} \frac{V \lambda_1 d\lambda_1}{V(\lambda_1 - C)(a^2 - \lambda_1)(\lambda_1 - b^2)(\lambda_1 - c^2)} = \int_{\lambda'_2}^{\lambda_2} \frac{V \lambda_2 d\lambda_2}{V(C - \lambda_2)(a^2 - \lambda_2)(b^2 - \lambda_2)(\lambda_2 - c^2)}.$$

Odległość geodezyjna dwóch punktów (λ'_1, λ'_2) i $(\lambda''_1, \lambda''_2)$ wyraża się tak:

$$\int_{\lambda'_1}^{\lambda''_1} \frac{V \lambda_1 (\lambda_1 - C) d\lambda_1}{V(a^2 - \lambda_1)(\lambda_1 - b^2)(\lambda_1 - c^2)} + \int_{\lambda'_2}^{\lambda''_2} \frac{V \lambda_2 (C - \lambda_2) d\lambda_2}{V(a^2 - \lambda_2)(b^2 - \lambda_2)(\lambda_2 - c^2)},$$

gdzie C jest pierwiastkiem równania

$$\int_{\lambda'_1}^{\lambda''_1} \frac{V \lambda_1 d\lambda_1}{V(\lambda_1 - C)(a^2 - \lambda_1)(\lambda_1 - b^2)(\lambda_1 - c^2)} = \int_{\lambda'_2}^{\lambda''_2} \frac{V \lambda_2 d\lambda_2}{V(C - \lambda_2)(a^2 - \lambda_2)(b^2 - \lambda_2)(\lambda_2 - c^2)}.$$

18. Wróćmy jeszcze do teorii ogólnej i weźmy pod uwagę funkcję P , którąśmy wyznaczali za pomocą innej funkcji, mianowicie funkcji θ . Oczywiście funkcja P winna sama czynić zadość pewnemu równaniu różniczkowemu o pochodnych częściowych, które może służyć do bezpośredniego jej określenia.

Oznaczmy przez θ i θ' kąty, jakie linia geodezyjna, należąca do danego układu, tworzy z liniami współrzędnymi u i v w danym punkcie na powierzchni, mamy wogóle

$$\pm \omega = \theta \pm \theta',$$

zatem

$$\cos^2 \omega + \cos^2 \theta + \cos^2 \theta' - 2 \cos \omega \cos \theta \cos \theta' = 1. \quad (1)$$

Funkcja P określa się równaniem

$$dP = V A \cos \theta' du + V C \cos \theta dv,$$

skąd otrzymujemy:

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta &= \frac{1}{V C} \frac{\partial P}{\partial v}, \\ \cos \theta' &= \frac{1}{V A} \frac{\partial P}{\partial u}; \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

oprócz tego mamy jeszcze

$$\cos \omega = \frac{B}{V A C}; \quad (3)$$

Podstawiając w (1) w miejsce trzech dostaw odpowiednie wyrażenia z (2) i (3), otrzymujemy ostatecznie następujące równanie o pochodnych częściowych do bezpośredniego wyznaczenia funkcji P :

$$A \left(\frac{\partial P}{\partial v} \right)^2 - 2 B \frac{\partial P}{\partial u} \frac{\partial P}{\partial v} + C \frac{\partial P}{\partial u^2} = A C - B^2.$$

Darboux w obszerném swém dziele: „Leçons sur la théorie générale des surfaces“ otrzymuje równanie (4) inną zupełnie drogą (tom 2, str. 425), i używa go za punkt wyjścia w ogólnych wywodach teorii linii geodezyjnych.

Petersburg, 20 listopada 1891 roku.