$$\sum_{\mu} q'_{\mu} \frac{\partial L_{\nu}}{\partial q'_{\mu}} = f_{\nu}(q_{\mu}, q'_{\mu}, L_{\nu}), \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, p)$$

gdzie $f_{\nu}(q_{\mu}, q'_{\mu}, L_{\nu})$, oznacza funkcyą $2m+p$ zmiennych $q_{\mu}, q'_{\mu}, L_{\nu}$ i taką, że $f_{\nu}(q_{\mu}, q'_{\mu}, 0) = 0$, mamy, na zasadzie związków (5):

$$\sum_{\mu} q'_{\mu} \frac{\partial L_{\nu}}{\partial q'_{\mu}} = 0, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, p)$$

a wtedy równania (20) i (21) redukują się odpowiednio do następujących:

$$T - U = 0, \qquad \int_{t_0}^{t_1} 2T\,dt = minimum,$$

z których pierwsze wyraża prawo zachowania energii, a drugie — prawo najmniejszego działania, w powszechném ich znaczeniu.

W taki to sposób pomienione prawa mieszczą się odpowiednio w prawach: zachowania bytu i najłatwiejszego sposobu bytowania. Daje on nam miarę tego, o ile bardziéj zawiłemi być mogą zjawiska przyrody, niż sobie wyobrażają ci, którzy sądzą, że cały ich ogół da się podporządkować pod układ mechaniczny swobodny.

Warszawa, w październiku 1891.

O PEWNÉJ KLASIE RÓWNAŃ PRZESTĘPNYCH.

NAPISAŁ

M. P. RUDZKI.

§ I.

Będziemy rozważali w téj rozprawie równania przestępne:

$$J_m = 0, \tag{1}$$

gdzie J_m oznacza funkcyą Bessela, t. j. funkcyą:

$$\sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{(-1)^i \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2i}}{\Gamma(i+1)\,\Gamma(m+i+1)}$$

Pierwiastkami równań tego rodzaju zajmował się Poisson.[1] Znakomity ten matematyk zauważył, że gdy wartość zmiennéj x jest bardzo wielka w porównaniu z liczbą m, to równanie różniczkowe, któremu czynią zadość funkcye Bessela, może być napisane pod przybliżonym kształtem:

$$\frac{d^2 J_m(\sqrt{x})}{dx^2} + J_m(\sqrt{x}) = 0,$$

skąd wynika, że bardzo wielkie pierwiastki równania (1) muszą być bliskie wartością pierwiastkom równania

[1]) Todhunter, Elementary Treatise on Laplace, Lame and Bessels functions, str. 312 i nast.

$$\cos\left[\frac{m\pi}{2}+\frac{\pi}{4}-x\right]=0$$

Dla $m>-1$, funkcya Bessela daje się napisać pod następującym kształtem:

$$J_m=\frac{x^m}{2^m\,\Gamma\,(m+1)}\,\varphi_m(\theta)\,,$$

przyczém

$$\theta=\left(\frac{x}{2}\right)^2$$

$$\varphi_m=1-\frac{\theta}{m+1}+\frac{\theta^2}{1.\,2.\,(m+1)\,(m+2)}-\,.\,.\,.\,. \tag{3}$$

Oczywiście, z pierwiastków równania:

$$\varphi_m=0$$

możemy otrzymać wszystkie pierwiastki równania (1), prócz pierwiastka wielokrotnego: $x=0$, możemy tedy zamiast funkcyi Bessela rozważać funkcye φ_m, jeżeli $m>-1$.

Z prac najnowszych poświęconych teoryi równań, będących przedmiotem niniejszego artykułu, godną jest uwagi rozprawa Hurwitza „Ueber die Nullstellen der Bessel'schen Functionen".[1] Metody badania w niej użyte, są ogólniejsze od tych, które stosujemy w pracy niniejszéj i odnoszą się do innéj grupy równań z tej dziedziny; nasza metoda daje się zato dogodniéj zastosować do przypadku, jaki rozpatrujemy.

Będziemy rozważali tylko takie funkcye φ_m, w których m jest liczbą dodatnią.

Z wzoru (3) łatwo wyprowadzić równania:

$$\begin{aligned}&\varphi_m+(m+1)\,\varphi'_m+\theta\,.\,\varphi''_m=0\\&\varphi'_m+(m+2)\,\varphi''_m+\theta\,.\,\varphi'''_m=0\\&.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\\&.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\end{aligned}\tag{4}$$

gdzie φ' oznacza pierwszą pochodną względem θ, φ'' drugą i t. d. Na podstawie tych równań Todhunter,[2] rozszerzając znany wynik Fouriera, dowodzi, że pierwiastki równania

[1] Mathematische Annalen, tom XXXIII, 1889. Str. 246—266.

[2] loc. cit. str. 37.

$$\varphi_m\;(\theta)=0$$

są wszystkie rzeczywiste i dodatnie.

Równanie (3) pokazuje, że φ_{m+1} tylko czynnikiem stałym różni się od $\frac{d\varphi_m}{d\theta}$, z łatwością też znajdujemy związek:

$$\varphi_{m+1}=-(m+1)\,\frac{d\varphi_m}{d\theta}\,. \tag{5}$$

Gdyby φ_m i φ_{m+1}, albo, co na jedno wychodzi, φ_m i $\frac{d\varphi_m}{d\theta}$ były jednocześnie równemi zeru, to wszystkie pozostałe funkcye φ_m stałyby się równemi zeru; zatém pierwiastki równań

$$\varphi_m=0$$

byłyby wielokrotnemi nieskończoną liczbę razy. Z samego kształtu funkcyi widać, że to przypuszczenie jest niemożliwe; wnosimy stąd, że pierwiastki są jednokrotne.

Z wzoru (3) natychmiast widać, że dla wartości ujemnych zmiennéj θ funkcya φ_m jest stale dodatnia; pierwszy zatém pierwiastek równania

$$\varphi_m=0$$

znajduje się po za punktem $\theta=0$, ponieważ zaś φ_{m+1}, czyli $\frac{d\varphi_m}{d\theta}$ zmienia znak między pierwszym a drugim pierwiastkiem tego równania, przeto im większą jest liczba m, tém daléj od tego punktu znajduje się pierwszy pierwiastek. Wprawdzie rozumowanie nasze dotyczy przypadku, w którym m powiększa się odrazu o całą jednostkę, ale oczywistą jest rzeczą, że ta uwaga pozostanie słuszną i wtedy, gdy przypuścimy, że m zmienia się w sposób ciągły. Spostrzegamy też, że φ_∞ dla wszelkich skończonych wartości zmiennéj θ pozostaje równém jedności. Aby się o tém przekonać, dość jest spojrzeć na wzór (3).

W ogólnym przypadku nie możemy dokładniéj określić położenia pierwiastków równań

$$\varphi_m=0\,,$$

albo, co na jedno wychodzi, równań

$$J_m=0\,,$$

atoli w pewnym specyalnym przypadku, gdy $m=n+\frac{1}{2}$, n zaś jest liczbą całkowitą i dodatnią, możemy bliżéj określić położenie tych pierwiastków. Następnie zaś, rozważając znowu funkcyą φ_m, jako funkcyą argumentu m, zmieniającego się w sposób ciągły, możemy wyciągnąć pewne wnioski o położeniu pierwiastków tych równań w ogólnym przypadku. Funkcye $\varphi_{n+1/2}$ są to właściwie pochodne funkcyi $\varphi_{1/2}$ z pewnemi stałemi współczynnikami. Dają się one wyrazić w następujący sposób: [1])

$$\varphi_{n+1/2} = J_{n+1/2}\, 2^{n+1/2}\, \Gamma(n+3/2)\, x^{-n-1/2} = C\, x^{-2n-1} \left[X_n \sin x - X'_n \cos x\right] \quad (6)$$

C jest to pewna stała, J_m, jak wyżéj, funkcya Bessela, X_n i X'_n są to wielomiany następującego kształtu:

$$X_n = 1 - \frac{A_2}{2!} x^2 + \frac{A_4}{4!} x^4 - \ldots\ldots$$

$$X'_n = x - \frac{A_3}{3!} x^3 + \frac{A_5}{5!} x^5 - \ldots\ldots,$$

przyczém

$$A_0 = 1,$$
$$A_1 = 1, \qquad A_{i+1} = \frac{2(n-i)}{2n-i} A_i .$$

Z wzoru (6) zaraz widać, że pierwiastki równań

$$J_{n+1/2} = 0\ ,\ \varphi_{n+1/2} = 0$$

mogą być znalezione z równania:

$$\frac{X_n}{X'_n} - \operatorname{cotg} x = 0 \quad (7)$$

albowiem $x = 2\sqrt{\theta}$. Pierwiastki równania (7) występują parami; dość jest znać pierwiastki dodatnie, albowiem pierwiastki ujemne mają tę samą wartość bezwzględną, tylko znak przeciwny.

Otóż pokażemy, że dodatnie pierwiastki równania: (7) znajdują się pojedyńczo w $(n+2)$-éj, $(n+4)$-éj, $(n+6)$-éj i t. d. ćwiartkach koła, t. j. pierwszy pierwiastek znajduje się między

$$(n+1)\frac{\pi}{2} \quad \text{i} \quad (n+2)\frac{\pi}{2};$$

drugi między

$$(n+3)\frac{\pi}{2} \quad \text{i} \quad (n+4)\frac{\pi}{2} \qquad \text{i t. d.}$$

Przeprowadzimy dowodzenie tylko dla przypadku, gdy n jest liczbą parzystą; dla przypadku, gdy n jest liczbą nieparzystą, czytelnik może sam

[1]) Poisson, Théorie math. de la chaleur § 81 i nast.

je sobie przerobić. Okażemy, że jeżeli prawidło ma miejsce dla równania rzędu $n-1$-go i n-go, to będzie również miało miejsce dla równania rzędu $(n+1)$-go, następnie zaś przekonamy się bezpośrednio, że to prawidło stosuje się do pierwszych trzech równań najniższego rzędu.

Wielomiany X_n i X'_n dają się wyrazić w następujący sposób:

$$\begin{aligned} X_n &= \prod_{\mu=1}^{\mu=i}\left(1-\frac{x^2}{a_\mu^2}\right), && \text{gdy } n = 2i \text{ albo } n = 2i+1; \\ X'_n &= x\prod_{\mu=1}^{\mu=i-1}\left(1-\frac{x^2}{b_\mu^2}\right), && \text{gdy } n = 2i; \\ X'_n &= x\prod_{\mu=1}^{\mu=i}\left(1-\frac{x^2}{b_\mu^2}\right), && \text{gdy } n = 2i+1; \end{aligned} \quad (8)$$

$a^2, b^2 \ldots$ są to kwadraty pierwiastków równań

$$X_n = 0$$
$$X'_n = 0$$

Na podstawie wzorów (8) zauważyć można, że gdy funkcya $\frac{X_n}{X'_n}$ przejdzie przez wszystkie przemiany znaków, to będzie wciąż dodatnią, jeżeli n jest liczbą nieparzystą, zaś wciąż ujemną, jeżeli n jest liczbą parzystą.

Stąd znowu oczywisty wypływa wniosek, że przecięcia krzywych

$$\frac{X_n}{X'_n} \quad \text{i} \quad \operatorname{cotg} x$$

mogą zachodzić się *tylko w ćwiartkach nieparzystych*, gdy n jest liczbą nieparzystą, natomiast mogą zachodzić *w ćwiartkach parzystych*, [1]) gdy n jest liczbą parzystą. Przyczynę łatwo zrozumiemy, pamiętając, że cotg x jest dodatnią w nieparzystych, ujemną w ćwiartkach parzystych.

Pierwsze przecięcie tych krzywych, t. j. pierwszy pierwiastek równania

$$\frac{X_n}{X'_n} - \operatorname{cotg} x = 0$$

znajduje się po za punktem, w którym funkcya

$$\frac{X_n}{X'_n}$$

po raz ostatni zmienia swój znak. Ta uwaga będzie dowiedziona wraz z prawidłem o położeniu pierwiastków; tymczasem przyjmujemy ją *a priori*. Za-

[1]) Mówimy tak przez skrócenie. Właściwie powinnibyśmy powiedzieć, że koniec *odciętéj* punktu przecięcia się owych krzywych znajduje się w danéj ćwiartce.

kładamy, że zachodzi dla funkcyj $n-1$-go i n-go rzędu, a następnie dowodzimy, że w takim razie zachodzi koniecznie dla funkcyi $(n+1)$-go rzędu.

W danym razie pierwszy pierwiastek równania

$$\frac{X_{n+1}}{X'_{n+1}} - \operatorname{cotg} x = 0 \tag{9}$$

powinien się znajdować w $(n+3)$-éj ćwiartce, przyczém powinniśmy pamiętać, że według założenia n jest liczbą parzystą.

Ten pierwszy pierwiastek musi się znajdować w przestrzeni, zawartéj między pierwszym pierwiastkiem równania

$$\frac{X_n}{X'_n} - \operatorname{cotg} x = 0, \tag{10}$$

znajdującym się (dajmy na to w punkcie α) w $(n+2)$-éj ćwiartce, i drugim pierwiastkiem tegoż równania, znajdującym się (dajmy na to w punkcie β) w $(n+4)$-éj ćwiartce. I następne pierwiastki równań (9) i (10) idą po sobie na przemiany, albowiem pierwiastki równania (9) są te same, co równania

$$\varphi_{n+{}^3\!/_2} = 0,$$

a równania (10) te same, co równania

$$\varphi_{n+{}^1\!/_2} = 0.$$

Tymczasem funkcya $\varphi_{n+{}^3\!/_2}$ jest pochodną funkcyi $\varphi_{n+{}^1\!/_2}$ pomnożoną przez pewną stałą, a ponieważ wszystkie pierwiastki obu równań są jednokrotne, więc muszą iść po sobie na przemiany.

Pierwiastki równania

$$\frac{X_{n-1}}{X'_{n-1}} - \operatorname{cotg} x = 0$$

znajdują się, według założenia, w $(n+1)$-éj, $(n+3)$-éj, $(n+5)$-éj i t. d. ćwiartkach. Powiedzieliśmy już, że funkcye $\frac{X_n}{X'_n}$ zmieniają znak, zanim natrafimy na pierwiastki równań kształtu (9). Oczywiście więc w całym wyżéj pomienionym odstępie od α do β będziemy mieli:

$$\begin{aligned} X_{n-1} &= (-1)^{i-1}\,\xi_{n-1}, \\ X_n &= (-1)^{i}\quad \xi_n, \\ X'_{n-1} &= (-1)^{i-1}\,\xi'_{n-1}, \\ X'_n &= (-1)^{i-1}\,\xi'_n, \end{aligned} \tag{11}$$

gdzie ξ, ξ' oznaczają liczby stale dodatnie.

Z drugiéj strony łatwo można dowieść [1]) następujących związków:

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= (2n+1)\,X_n - x^2\,X_{n-1} \\ X'_{n+1} &= (2n+1)\,X'_n - x^2\,X'_{n-1} \end{aligned} \tag{12}$$

Na podstawie wzorów (12) i (11) możemy napisać następujący:

$$\frac{X_{n+1}}{X'_{n+1}} = \frac{x^2\,\xi_{n-1} + (2n+1)\,\xi_n}{x^2\,\xi'_{n-1} - (2n+1)\,\xi'_n}\,. \tag{13}$$

Widzimy tedy, że obecnie funkcya

$$\frac{X_{n+1}}{X'_{n+1}}$$

może zmienić znak raz tylko i to przechodząc przez nieskończoność (w przypadku gdy n jest nieparzyste, taż sama funkcya zmienia znak po raz ostatni, przechodząc przez zero). W punkcie $x=\alpha$ powyżej wymieniona krzywa $\frac{X_{n+1}}{X'_{n+1}}$ przechodzi powyżéj krzywéj $\operatorname{cotg} x$. Rzeczywiście pierwsza z nich, począwszy od punktu $x=0$, wciąż w swoim przebiegu wyprzedza drugą. Nietrudno się o tém przekonać. W pobliżu punktu $x=0$ różnica

$$\frac{X_{n+1}}{X'_{n+1}} - \operatorname{cotg} x$$

ma znak funkcyi φ_{n+1}, ponieważ zaś w pobliżu punktu tego wszystkie funkcye φ_m są dodatnie, zatém i powyższa różnica jest dodatnia. Wiemy już, że ta różnica nie może się stać równą zeru, zanim podobna różnica ze skaźnikiem o jedność niższym nie stanie się poraz pierwszy równą zeru. Krzywe $\frac{X'_{n+1}}{X_{n+1}}$ i $\operatorname{cotg} x$ muszą ciągle się wymijać; dzieje się to w ten sposób, że pierwsza z tych krzywych wyprzedza wciąż drugą, przechodząc przez zero przy wartościach dla x:

$$\frac{\pi}{2} + \varepsilon_1,\; \frac{3\pi}{2} + \varepsilon_2,\; \frac{5\pi}{2} + \varepsilon_3 \;\ldots\ldots$$

a przez nieskończoność przy wartościach:

$$\pi + \eta_1, \quad 2\pi + \eta_2 \;\ldots\ldots$$

[1]) Należy wyjść z wzoru wiążącego między sobą funkcye Bessela

$$m\,J_m = \frac{x}{2}\,[J_{m+1} + J_{m-1}]$$

przyczém

$$\frac{\pi}{2} > \varepsilon_i > 0 \qquad \frac{\pi}{2} > \eta_i > 0 \qquad i = 1, 2\ 3\ \ldots.$$

Policzywszy przy pomocy wzorów (8) liczbę przemian znaków funkcyi $\frac{X_n}{X'_n}$ przy przejściu przez zero i przy przejściu przez nieskończoność, przekonamy się, że liczba ta jest ściśle wystarczającą, aby nie dopuścić do przecięcia się obu krzywych nietylko do punktu $x = \alpha$, leżącego w $(n+2)$-éj ćwiartce, ale nawet nieco daléj po za punkt $(n+2)\frac{\pi}{2}$.

Rozpatrzmy tedy najpierw odcinek $(n+2)$-éj ćwiartki od punktu $x = \alpha$ do punktu $x = (n+2)\frac{\pi}{2}$.

W punkcie α krzywa $\frac{X_n}{X'_n}$ przechodzi powyżéj krzywéj $\cot g\, x$, może zaś jeszcze raz zmienić znak, przechodząc przez nieskończoność. Z drugiej strony pamiętajmy o tém, że od α do β może być tylko jeden pierwiastek równania

$$\varphi_{n+1} = 0$$

czyli tylko jedno przecięcie się krzywych $\frac{X_{n+1}}{X'_{n+1}}$ i $\cot g\, x$.

Przypuśćmy, że obie krzywe przecinają się jeszcze w $(n+2)$-éj ćwiartce. Ponieważ $\cot g\, x$ przechodzi przez nieskończoność ujemną w końcu $(n+2)$-éj ćwiartki, więc nasza krzywa, która po przecięciu się z $\cot g\, x$ znalazła się poniżéj téj ostatniéj krzywéj, jeżeli niema się z nią spotkać po raz wtóry w téj saméj ćwiartce, co niemożliwe ze względu na to, że od α do β może być tylko jeden pierwiastek równania

$$\varphi_{n+1} = 0\,,$$

to musi przejść przez nieskończoność wcześniej niż krzywa dotycznych. Lecz przechodząc z wartości ujemnych do dodatnich jeszcze przed punktem $x = (n+2)\frac{\pi}{2}$, nasza krzywa w $(n+3)$-éj ćwiartce będzie wciąż miała dodatnie skończone wartości; tymczasem krzywa $\cot g\, x$ w téjże ćwiartce przechodzi od dodatniéj nieskończoności do zera, musi zatém przeciąć się z naszą krzywą.

Widzimy zatém, że skoro tylko przecięcie się obu krzywych znajduje się w $(n+2)$-éj ćwiartce, to pomiędzy α i β musi być koniecznie drugie przecięcie się, t. j. drugi pierwiastek równania, co jak wiemy, jest niemożliwe. Stąd wniosek, że pierwszy pierwiastek nie może znajdować się w odcinku między $x = \alpha$ i $x = (n+2)\frac{\pi}{2}$.

Zobaczmy teraz, czy ten pierwiastek nie może się znajdować w $(n+4)$-éj ćwiartce t. j. między $(n+3)\frac{\pi}{2}$ i punktem $x = \beta$? W tym celu weźmy znany związek między funkcyami Bessela. Ponieważ $m = n + {}^1/_2$, mamy zatém:

$$J_{n+{}^3/_2} = \frac{2n+1}{x} J_{n+{}^1/_2} - J_{n-{}^1/_2}$$

Oczywiście, przy x dodatniém $J_{n+{}^3/_2}$ może tylko wtedy stać się równém zeru, gdy $J_{n+{}^1/_2}$ i $J_{n-{}^1/_2}$ mają jednakowe znaki; tymczasem między $(n+3)\frac{\pi}{2}$ i β funkcya $J_{n+{}^1/_2}$ jest wciąż ujemna, albowiem w punkcie α poraz pierwszy przeszła z dodatnich wartości do ujemnych, a dopiero w punkcie β znów powróci z ujemnych do dodatnich.

Tymczasem $J_{n-{}^1/_2}$ między drugą przemianą znaku w $(n+3)$-éj ćwiartce i trzecią w $(n+5)$-éj jest wciąż dodatnie.

Wobec tego $J_{n+{}^3/_2}$ między $(n+3)\frac{\pi}{2}$ i β nie może stać się równém zeru. Natomiast *może i musi* stać się *równem zeru w $(n+3)$-ej ćwiartce* t. j. między $(n+2)\frac{\pi}{2}$ i $(n+3)\frac{\pi}{2}$. Lecz tu $\cot g\, x$ jest wciąż dodatnie, a zatém i krzywa $\frac{X_n}{X'_n}$, aby się przeciąć z $\cot g\, x$, musi znaleść się powyżéj osi x-ów. W punkcie α, leżącym w $(n+2)$-éj ćwiartce, znaleźliśmy tę krzywą poniżéj osi x, miała tam bowiem znak ujemny. Musiała zatem przejść przez nieskończoność z wartości ujemnych do dodatnich, ale także dopiero w $(n+3)$-ej ćwiartce, albowiem przechodząc w $(n+2)$-ej ćwiartce, musiałaby przeciąć się z $\cot g\, x$. Jednocześnie widzimy, że przecięcie się krzywych: $\frac{X_n}{X'_n}$ i $\cot g\, x$ następuje dopiero po ostatniéj przemianie znaku pierwszéj z pomiędzy nich.

O dalszych przecięciach już wiemy, że będą się zdarzały we wszystkich nieparzystych ćwiartkach.

Widzimy tedy, że dla uzupełnienia dowodu należy tylko rozpatrzyć jeszcze trzy pierwsze funkcye.

Rozważamy najprzód funkcyą

$$J_{{}^1/_2} = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\, x^{-{}^1/_2} \sin x\,;$$

oczywiście, pierwiastki dodatnie równania

$$J_{{}^1/_2} = 0$$

będą: π, 2π ... i t. d. t. j. czynią zadość ogólnemu prawidłu; pierwiastki ujemne téj funkcyi i innych tego rodzaju tylko znakiem różnią się od dodatnich.

Przejdźmy teraz do równania

$$J_{3/2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, x^{-3/2} (\sin x - x \cos x) = 0;$$

Oczywiście, pierwiastki tego równania są te same, co równania:

$$\frac{1}{x} - \operatorname{cotg} x = 0;$$

ale w pierwszéj i drugiéj ćwiartce:

$$\operatorname{cotg} x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} - \ldots. - \frac{2^{2n} B_n x^{2n-1}}{1.2\ldots 2_n} - \ldots {}^{1)},$$

skąd wnosimy, że różnica:

$$\frac{1}{x} - \operatorname{cotg} x$$

od zera do π będzie wciąż dodatnia. Natomiast, ponieważ gałąź hyperboli równobocznéj

$$y = \frac{1}{x}$$

przechodzi po nad osią x i ma wciąż wartości skończone, tedy w 3-éj ćwiartce musi nastąpić przecięcie się jéj z krzywą cotg x, która tu przechodzi od $+\infty$ do zera. Oczywiście dalsze punkty przecięcia się znajdują się w $(n+5)$-éj, $(n+7)$-éj i t. d. ćwiartkach.

Zauważmy też, że funkcya $\frac{X_n}{X'_n}$ t. j. w danym razie $\frac{1}{x}$ zmieniła znak w punkcie $x=0$, t. j. znacznie wcześniej, zanim nastąpiło pierwsze przecięcie się obu krzywych.

Przejdźmy nakoniec do równania

$$J_{5/2} = x^{-5/2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[(3-x^2) \sin x - 3x \cos x \right] = 0,$$

którego pierwiastki będą te same, co równania

$$\frac{3-x^2}{3x} - \operatorname{cotg} x = 0;$$

zaraz spostrzegamy, że funkcya

$$\frac{X_2}{X'_2} = \frac{3-x^2}{3x}$$

1) B_n oznacza n tą liczbę Bernouilli'ego.

zmienia znak dwa razy: raz w punkcie $x=0$ przechodzi przez nieskończoność z wartości ujemnych do dodatnich, potem z dodatnich do ujemnych przez zero, przy

$$x = \sqrt{3}.$$

Tymczasem mamy w 1-éj i 2-éj ćwiartce

$$\frac{3-x^2}{3x} - \operatorname{cotg} x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \left\{ \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} - \ldots - \frac{2^{2n} B_n x^{2n-1}}{1.2\ldots 2n} - \ldots \right\}$$

Oczywiście, ta różnica aż do punktu π jest stale dodatnia, ale po za tym punktemw 3-éj ćwiartce cotg x jest dodatnie, a nasza krzywa, już poczynając od punktu $x=\sqrt{3}$, jest ujemna. Spotkanie obu krzywych nastąpi dopiero w 4-éj, potem znowu w 6-éj, 8-éj i t. d. ćwiartkach t. j. zgodnie z zapowiedzianém prawidłem i po za punktem, w którym funkcya $\frac{X_2}{X'_2}$ zmieniła znak.

Używając podanego wyżéj sposobu, możemy przy pomocy wiadomych już własności funkcyi $J_{3/2}$ i $J_{5/2}$ udowodnić prawidło dla funkcyi $J_{7/2}$, potém dla $J_{9/2}$ i t. d.; możemy więc wypowiedzieć następujące twierdzenie.

Pierwiastki dodatnie równania

$$J_{n+1/2} = 0$$

znajdują się pojedyńczo w $(n+2)$*-éj* $(n+4)$*-éj wogóle w* $(n+2i)$*-ej ćwiartce przyczém* $i = 1, 2, 3 \ldots$

Daléj zaś możemy powiedzieć: *pierwszy pierwiastek równania*

$$J_{n+1/2} = 0$$

następuje zawsze po ostatnich pierwiastkach równań

$$X_n = 0 \quad \text{i} \quad X'_n = 0$$

§ 2.

O pierwiastkach ujemnych już wiemy, że tylko znakiem różnią się od dodatnich. Wspominaliśmy też o tém, że uważając argument m jako zmienną, zmieniającą się w sposób ciągły, możemy dojść do przybliżonego poznania położenia pierwiastków równań:

$$J_m = 0$$

w których m nie jest liczbą postaci $n + 1/2$, a to opierając się na znajomości pierwiastków równań.

$$J_{n+1/2} = 0 \quad \text{gdzie} \quad n = 0, 1, 2, 3 \ldots$$

Teraz zrobimy jeszcze parę uwag z punktu widzenia ogólnéj teoryi równań.

Oczywistą jest przedewszystkiém rzeczą, że funkcye φ_m, jakkolwiek przestępne, zachowują się zupełnie tak, jak wielomiany; są to poprostu wielomiany o nieskończonéj liczbie wyrazów.

Daléj spostrzegamy, że funkcye Bessela, t. j. funkcye $J_{n+1/2}$ w danym obrębie od $-\frac{h\pi}{2}$ do $+\frac{h\pi}{2}$, gdzie h jest liczbą całkowitą dowolną, byleby o dwie jedności większą od największéj porządkowéj liczby n, ze wszystkich porównywanych między sobą funkcyj Bessela, mają jednakową liczbę pierwiastków, jeżeli policzymy wszystkie pierwiastki dodatnie, ujemne i równe zeru. Rozszerzając ten obręb do $+\infty$ i $-\infty$, możemy powiedzieć, że wszystkie funkcye Bessela mają jednakową liczbę pierwiastków, jakkolwiek ta liczba jest nieskończenie wielką.

Przyjrzawszy się daléj wielomianom X_n i X'_n, spostrzeżemy, że pierwsze wielomiany są kolejnemi przybliżeniami funkcyi $\cos x$, drugie zaś funkcyi $\sin x$.

Jeżeli we wzorach, tuż za wzorem (6) idących, założymy $n=\infty$, to wszystkie współczynniki A_i staną się równemi jedności, i otrzymamy dla wszelkich skończonych wartości x:

$$X_\infty = \cos x,$$
$$X'_\infty = \sin x.$$

W ten sposób łatwo zrozumieć, dlaczego rezultat dzielenia X_n przez X'_n aż do n tego wyrazu zgadza się z funkcyą $\operatorname{cotg} x$.

Pierwiastki równań:

$$X_n = 0$$
$$X'_n = 0$$

są stale większe od pierwiastków równań:

$$\cos x = 0,$$
$$\sin x = 0,$$

ale zbliżają się do nich coraz bardziéj w miarę tego, jak skaźnik n wzrasta.

Zauważmy wreszcie, że otrzymane przez nas rezultaty mają pewne zastosowanie fizyczne, o którém gdzie indziéj pisałem [1]); pierwiastki bowiem równań:

$$J_{n+1/2} = 0$$

[1]) W „Zapiskach" Noworossyjskiego Towarzystwa przyrodników. T. XIV oddziału matematycznego.

wyznaczają prędkość stygnienia kuli, któréj powierzchnia jest utrzymywana w pewnych temperaturach zmiennych, w zależności od szerokości i długości geograficznéj.

Rezultat jest taki, że im częstszemi są przy danych równych warunkach odstępstwa temperatury od średniej w tę i drugą stronę, w zależności od szerokości i długości geograficznéj, tém prędzéj musi nastąpić ich wyrównanie.

Warto zauważyć, że taki sam rezultat można wyprowadzić wprost z ogólnych zasad teoryi prawdopodobieństwa.

Rybnica, 21 lipca 1891 roku.