przeto będzie

$$X_4 = 2\int x dx = x^2 .$$

Następnie mamy

$$a = 1 , \quad b = -8 , \quad c = 15 , \quad \alpha = 3 , \quad X = \frac{1}{x^2} .$$

Przy powyższych wartościach, warunek (8) jest spełniony, a więc, przekształcamy równanie dane, zakładając $y = z + x^2$, wskutek czego otrzymujemy

$$\frac{dz}{dx} + 2x = \frac{1}{2^2} (z^2 + 2x^2 z + x^4 - 8z - 8x^2 + 15) + 2 + 2x - x^2 .$$

Podstawienie $z = \frac{1}{u} + 3$ doprowadza do nowego równania

$$-\frac{du}{dx} = \frac{1}{x^2} (1 - 2u + 2x^2 u) ,$$

które można napisać tak:

$$\frac{du}{dx} + \frac{2x^2 - 2}{x^2} \cdot u = -\frac{1}{x^2} .$$

Całką tego równania jest

$$u = e^{-2x - \frac{2}{x}} \left(c - \int e^{2x + \frac{2}{x}} \frac{dx}{x^2} \right) .$$

Podstawiając w ostatni związek wartość $u = \frac{1}{z-3}$, gdzie $z = y - x^2$, mieć będziemy całkę szukaną

$$\left(\frac{1}{y - x^2 - 3} - \frac{1}{2} \right) e^{2x + \frac{2}{x}} + \int e^{2x + \frac{2}{x}} dx = C .$$

Płock, dnia 22 września 1891 roku.

O ZASADZIE NAJPRAWDOPODOBNIEJSZEGO BYTU. [1]

PRZEZ

WŁ. GOSIEWSKIEGO.

Zadaniem pracy niniejszéj jest poznanie praw zmienności w ogóle.

Gdy idzie o prawa zmienności szczególnych, jak np. ruchu, ciepła, światła i t. p., posiłkujemy się zwykle faktami, zdobytemi przez doświadczenie, i dopiero uogólniając je, budujemy odnośną teoryą. W ten sposób, który się nazywa metodą indukcyjną, powstały wszystkie prawie teorye fizyczne i niefizyczne.

Ale gdy chcemy zbudować teoryą zmienności wogóle, któraby obejmowała wszystkie odrazu dziedziny zjawisk przyrody, wówczas na faktach doświadczalnych opierać się już nie można: bo zmienności ogólnych w przyrodzie niema; są tylko zmienności szczególne. Tu zatém metoda indukcyjna na nic by się nie zdała.

Nie mając faktów żadnych, prócz jedynego, że zmienności wogóle dokonywają się w czasie oraz z prędkościami oznaczonemi (tak przynajmniéj sobie wyobrażamy), uciekniemy się zresztą do zasad prawdopodobieństwa, i nie kusząc się o prawdziwą, spróbujemy zbudować teoryą zmienności najprawdopodobniejszą.

Z pojęciem zmienności łączy się koniecznie pojęcie zmieniającego się przedmiotu, w ten mianowicie sposób, że wyobrażamy sobie różne stany tego przedmiotu, w różnych chwilach upływającego czasu.

[1] Rzecz referowana w d. 18 lipca 1891 r. na posiedzeniu sekcyi fizyko-matematycznej VI-go Zjazdu przyrodników i lekarzy w Krakowie.

icm©

Według zasady przyczynowości, ciąg takich stanów tworzyć powinien nieprzerwany łańcuch przyczyn i skutków, którego każde ogniwo wyobraża jednocześnie skutek stanu przeszłego i przyczynę przyszłego.

My wszakże zasady przyczynowości *a priori* nie stawiamy, ale rozważamy różne ciągi stanów, i z pomiędzy możliwych—wybieramy najprawdopodobniejszy. Ten najprawdopodobniejszy okazuje się wprawdzie owym łańcuchem przyczyn i skutków; jednak w ten sposób zasada przyczynowości przychodzi dopiero *a posteriori*, i nie w charakterze prawdy, tylko—prawdopodobieństwa.

Taką jest metoda naszego postępowania w celu oznaczenia praw zmienności wogóle; jest ona, jak widzimy, dedukcyjną.

Aby zadanie uczynić możliwie ogólném z innych także względów, przyjmujemy za przedmiot zmienny—układ wszelakich jakości, byleby nadających się do oznaczeń ilościowych. O ile więc stosunki w całym ogóle zjawisk przyrody przywodzą się istotnie do ilościowych, o tyle nasz układ powinien odtworzyć obraz przedmiotowy tego ogółu—najprawdopodobniejszy.

Tak pojmowany układ podlega:

1) prawu zachowania bytu;

2) prawu najłatwiejszego sposobu bytowania; oraz

3) zmierza do osiągnięcia stanu równie prawdopodobnego, jak ten, z którego był wyszedł.

Zadanie nasze zawiera w sobie zadanie mechanizmu w zwykłém także znaczeniu, i w ten sposób daje możność zbudowania mechaniki, bez uciekania się do tak zwanych zasad Newtona.

Przedsiębiorąc atoli rozwiązanie tego zadania, mieliśmy na widoku nie wskazanie sposobu postawienia mechaniki na gruncie czysto-teoretycznym, ale raczéj sposobu rozszerzenia jéj zakresu u samych podstaw, w celu ustanowienia metody łatwiejszego oraz ogólniejszego, niż dotąd, rozwiązywania zadań przyrodniczych.

To rozszerzenie polega nie tylko na tém, że zamiast ruchu rozważa się tu zmienność wogóle, ale nadto i na tém, że związki krępujące układ są zależnemi od elementów (respective współrzędnych) i prędkości, podczas gdy dotąd albo ich całkiem nie bywało, albo jeśli bywały, to zaledwie zależne od samych współrzędnych.

Pomienione związki wprowadziliśmy wreszcie nie dowolnie, jak się to zwykle dzieje. Stały się one wynikiem tego, że prawdopodobieństwo stanu układu jest funkcyą nieciągłą w sąsiedztwie jéj wartości równych zeru.

W przypadku mechanizmu zwykłego, prawo zachowania bytu utożsamić by można z prawem zachowania energii, któréj jednak wyrażenie nie składa się, jak dotąd bywało, z dwóch tylko wyrazów, t. j. energii potencyalnéj i aktualnéj, ale zawiera nadto wyrazy innego rodzaju energii, pochodzące od związków krępujących układ. Wyrazy te znikają, w miarę jak związki nie zawierają prędkości, lub jak od nich zależą w pewien sposób szczególny, np. jednorodnie.

Odpowiednio do tego, prawo najłatwiejszego sposobu bytowania utożsamiło by się znowu z prawem najmniejszego działania; jeśli się tylko zgodzimy pojmować je ogólniej, niż chciał Lagrange i jego następcy.

Mając do wypowiedzenia myśli, z któremi się nigdzie nie spotykałem, musiałem też wprowadzić i terminy nowe, a przynajmniéj w téj dziedzinie wiedzy dotąd jeszcze nie przystosowywane. Są to wyrażenia: *byt* i *bytowanie*. O ile mi sądzić o tém wolno, mniemam, że odpowiadają one właściwie istocie rzeczy.

§ I.

Rozróżniać będziemy jakość *złożoną* od jakości *prostych*.

Przez jakość *prostą* A rozumiemy taką, któréj w poczuciu zmysłowém rozłożyć na prostsze nie można i która daje się porównać z inną jakością a, do niej podobną, w ten sposób, że jeśli a mieści się w A razy q, liczba mianowana q będzie *miarą* jakości A. Barwa np. biała będzie, w tém znaczeniu, jakością również prostą jak każda barwa widma słonecznego, mimo że dla naszego umysłu jest złożoną z barw pomienionego widma.

Uważmy jakości proste $A_1, A_2, \ldots, A_m$, których miarami odpowiedniemi niech będą: $q_1, q_2, \ldots, q_m$. W przypadku ogólnym liczby q mogą być pewnemi grupami jednorodne, innemi—różnorodne. Tak np. jedne z nich mogą wyobrażać współrzędne, inne—objętości, inne—ciśnienia, inne—temperatury, a jeszcze inne—gęstości elektryczne lub magnetyczne—objętościowe lub powierzchniowe, i t. p.

Jakość *złożona* W z prostych $A_1, A_2, \ldots, A_m$ będzie jakby rodzajem wynikowéj tych prostych, utworzonéj według prawa, którego natury określać nie potrzebujemy i które zresztą może być różnie zawiłe dla różnych jakości złożonych.

Jako już wyrażalne ilościowo, jakości proste A_μ nazywać będziemy *elementami* q_μ, a jako wynikową tych jakości, jakość złożoną W nazywać będziemy *układem jakości* i oznaczać przez $W(q_1, q_2, \ldots, q_m)$, lub prościej—przez $W(q_\mu)$.

Elementy q_μ są funkcyami czasu, a tém samém układ $W(q_\mu)$ jest zmienny w czasie. Z pojęciem przeto układu, a raczej jego postaci $W(q_\mu)$ w chwili t, łączy się pojęcie jego postaci $W(q_\mu + dq_\mu)$ w chwili następnéj $t + dt$, gdzie

$$dq_\mu = \frac{dq_\mu}{dt}\, dt = q'_\mu\, dt\,.$$

Iloraz $dq_\mu / dt = q'_\mu$ jest oczywiście prędkością zmieniania się elementu q_μ, którą nazywać będziemy wprost: *prędkością elementu* q_μ.

icm©

Prędkości q'_μ odnoszą się do téj samej chwili t co i elementy q_μ; aby więc określić *stan układu* w chwili t, w ten sposób, iżby w tém określeniu zawierało się i to, że nasz układ jest zmienny, należy do tego celu użyć nie tylko elementów q_μ, ale i prędkości q'_μ. Symbol zatèm $(q_\mu, q'_\mu) = (q_\mu, dq_\mu/dt)$ wyobrażać będzie stan układu w chwili t.

Zbiór postaci układu $W(q_\mu)$, odpowiadających wszystkim po koiei chwilom od $t = t_0$ do $t = t_1 > t_0$, daje dopiero właściwe wyobrażenie o naturze samego układu, bo uprzytomnia sposób jego *bytowania* w czasie od t_0 do t_1. Diagramat tego sposobu przedstawić by można symbolicznie za pomocą całki

$$B = \frac{1}{dt}\int_{t_0}^{t_1} W(q_\mu)\, dt\,,$$

do któréj zresztą nie przywiązujemy żadnego szczególnego znaczenia.

Jeśliby było możliwém, aby $W(q_\mu)$ wyobrażało postać całego świata w chwili t, wówczas rozciągając całkowanie do całéj wieczności, t. j. kładąc $t_0 = -\infty$, $t_1 = +\infty$, uprzytomnilibyśmy w całce B przeszłość, teraźniejszość i przyszłość świata.

O ile mi wiadomo, analogicznemu pojęciu nadawali starożytni filozofowie nazwę *bytu* (τὸ ὄν). W celu jedynie krótkiego wyrażania się, tę samę nazwę zachowamy dla całki B, i zamiast mówić: sposób bytowania układu w czasie od t_0 do t_1, będziemy, w miarę potrzeby, niekiedy mówili: byt układu w czasie od t_0 do t_1, lub jeszcze krócéj: byt.

§ 2.

Elementy q_μ i prędkości q'_μ nie stanowią grupy zmiennych całkiem między sobą niezależnych, w tém mianowicie znaczeniu: że gdybyśmy nadali im pewne wartości dowolne, to niewiadomém by było, czy te wartości do układu $W(q_\mu)$ należą lub nie należą. t. j. czy stan tego układu (q_μ, q'_μ) tworzą lub go nie tworzą. Można atoli rozumieć przez φ (= funkcyi zmiennych q_μ, q'_μ) prawdopodobieństwo faktu, że elementy q_μ i prędkości q'_μ do układu $W(q_\mu)$ należą, a więc stan jego (q_μ, q'_μ) tworzą; wówczas wszystkie grupy wartości, zadość czyniące równaniu

$$\varphi(q_\mu, q'_\mu) = 0, \tag{1}$$

należyć do układu $W(q_\mu)$ nie mogą stanowczo, podczas gdy wszystkie inne, zadość czyniące nierównościom

$$1 > \varphi(q_\mu, q'_\mu) > 0, \tag{2}$$

należyć doń mogą mniéj lub więcéj prawdopodobnie.

Gdy więc φ, t. j. prawdopodobieństwo stanu układu przyjmiemy jako funkcyą elementów i prędkości — znaną, wtedy staje zadanie oznaczenia sposobu bytowania układu $W(q_\mu)$ — najprawdopodobniejszego. To właśnie zadanie będzie przedmiotem pracy niniejszéj.

§ 3.

Aby wyznaczyć sposób bytowania układu najprawdopodobniejszy w czasie od t_0 do t_1, należy określić przedewszystkiém prawdopodobieństwo tego bytowania wogóle, i założyć następnie, że to prawdopodobieństwo jest *maximum*. Stąd wynikną warunki najprawdopodobniejszego bytu.

Rozdzielmy przedział czasu od t_0 do t_1 na przedziały nieskończenie małe dt, tak aby było $t_1 - t_0 = ndt$, i niech chwilom:

$$t^0,\ t' = t_0 + dt,\ t'' = t_0 + 2dt, \ldots,\ t_1 = t_0 + ndt$$

odpowiadają postaci układu:

$$W(q_\mu)_0,\ W(q_\mu)',\ W(q_\mu)'', \ldots,\ W(q_\mu)_1. \tag{3}$$

Postaciom tym odpowiadają znowu stany:

$$(q_\mu, q'_\mu)_0,\ (q_\mu, q'_\mu)',\ (q_\mu, q'_\mu)'', \ldots, (q_\mu, q'_\mu)_1,$$

których prawdopodobieństwa są:

$$\varphi_0, \varphi', \varphi'', \ldots, \varphi_1.$$

Według takich oznaczeń, prawdopodobieństwo bytowania układu w czasie od t_0 do t_1, dokonywającego się sposobem, wyrażonym przez szereg postaci (3), będzie iloczynem:

$$P = \varphi_0\, \varphi'\, \varphi'' \ldots \varphi_1,$$

którego logarytm naturalny wyrazić można za pomocą całki

$$\lg P = \frac{1}{dt}\int_{t_0}^{t_1} \lg \varphi\, dt. \tag{4}$$

W całce (4) natura prawdopodobieństwa φ, jako funkcyi elementów i prędkości, jest z założenia oznaczona, a nieoznaczonemi są tylko same elementy, jako funkcye czasu. Stosownie więc do tego, przez jakie funkcye czasu wyrażać będziemy elementy q_μ, P otrzymywać będzie raz większe, drugi raz mniejsze wartości. Układem przeto najprawdopodobniejszym w czasie od t_0 do t_1 jest oczywiście ten, który przywodzi P, t. j. prawdopodobieństwo bytu, do maximum. Stąd pochodzi nazwa zasady najprawdopodobniejszego bytu.

§ 4.

Prawdopodobieństwo φ jest funkcyą $2m$ zmiennych q_μ, q'_μ ciągłą, ale tylko w sąsiedztwie wartości φ większych od zera; w sąsiedztwie wartości φ równych zeru, prawdopodobieństwo φ jest funkcyą wogóle przerywaną: gdy bowiem zmieniać będziemy q_μ i q'_μ sposobem ciągłym, φ zmierzać może do zera stopniami nieznacznemi, lub stawać się zerem nagle.

Zamiast jednak uważać prawdopodobieństwo φ jako funkcyą nieciągłą w sąsiedztwie wartości φ równych zeru, możemy postąpić w ten sposób.

Wyobraźmy sobie tego rodzaju $p < m$ związków między $2m$ zmiennemi q_μ, q'_μ, któreby spełniały się zawsze, gdy φ jest większe od zera, a nie spełniały nigdy, gdy φ równe zeru, i zastąpmy prawdopodobieństwo φ funkcyą, w sąsiedztwie wartości φ równych zeru ciągłą, ale je odtwarzającą w pozostałych dziedzinach. Wówczas grupy wartości q_μ, q'_μ, związków nie sprawdzające, do układu z powodu $\varphi = 0$ nie należą; zatém jest wszystko jedno, czy funkcya przedstawiająca φ będzie wtedy zerem, czy nie będzie.

Możemy zatém odtąd uważać prawdopodobieństwo φ jako funkcyą zmiennych q_μ, q'_μ ciągłą wszędzie, ale za to wprowadzimy związki, odpowiednio układ krępujące, które, w powyżéj opisany sposób, nieciągłość prawdopodobieństwa φ zastępują.

Oznaczmy te związki przez

$$L_\nu(q_\mu, q'_\mu) = 0, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, p) \tag{5}$$

a przez δq_μ przemienności elementów q_μ jako funkcyj czasu, w odróżnieniu od ich różniczek $dq_\mu = q'_\mu\, dt$.

Z równania (5) otrzymamy:

$$\sum_\mu \left(\frac{\partial L_\nu}{\partial q_\mu}\delta q_\mu + \frac{\partial L_\nu}{\partial q'_\mu}\delta q'_\mu\right) = 0$$

i następnie

$$\frac{1}{dt}\int_{t_0}^{t_1} dt \sum_\mu \left(\lambda_\nu \frac{\partial L_\nu}{\partial q_\mu}\delta q_\mu + \lambda_\nu \frac{\partial L_\nu}{\partial q'_\mu}\delta q'_\mu\right) = 0, \tag{6}$$

gdzie λ_ν wyobraża czynnik dowolny.

Wykonajmy na wyrazach postaci

$$dt.\ \lambda_\nu \frac{\partial L_\nu}{\partial q'_\mu}\delta q'_\mu = \lambda_\nu \frac{\partial L_\nu}{\partial q'_\mu} d\delta q_\mu$$

całkowanie przez części i oddzielmy wyrazy niescałkowane od zcałkowanych; wtedy równanie (6) przyjmie postać

$$0 = \frac{1}{dt}\int_{t_0}^{t_1} dt \sum_\mu \left(\lambda_\nu \frac{\partial L_\nu}{\partial q_\mu} - \frac{d}{dt}\lambda_\nu \frac{\partial L_\nu}{\partial q'_\mu}\right)\delta q_\mu - \frac{1}{dt}\sum_\mu \lambda_{\nu,0}\frac{\partial L_{\nu,0}}{\partial q'_{\mu,0}}\delta q_{\mu,0} + \frac{1}{dt}\sum_\mu \lambda_{\nu,1}\frac{\partial L_{\nu,1}}{\partial q'_{\mu,1}}\delta q_{\mu,1}, \tag{7}$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, p)$$

gdzie $q_{\mu,0}$, $q'_{\mu,0}$, $L_{\nu,0}$, $\lambda_{\nu,0}$, $\delta q_{\mu,0}$ i $q_{\mu,1}$, $q'_{\mu,1}$, $L_{\nu,1}$, $\lambda_{\nu,1}$, $\delta q_{\mu,1}$ są odpowiednio wartościami ilości q_μ, q'_μ, L_ν, λ_ν, δq_μ w chwilach t_0 i t_1.

§ 5.

Stosując do całki (4) znane reguły rachunku przemienności i postępując zresztą podobnie jak w § poprzednim, otrzymamy łatwo

$$\delta \lg P = \frac{1}{dt}\int_{t_0}^{t_1} dt \sum_\mu \left(\frac{\partial \lg\varphi}{\partial q_\mu} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \lg\varphi}{\partial q'_\mu}\right)\delta q_\mu - \frac{1}{dt}\sum_\mu \frac{\partial \lg\varphi_0}{\partial q'_{\mu,0}}\delta q_{\mu,0} + \frac{1}{dt}\sum_\mu \frac{\partial \lg\varphi_1}{\partial q'_{\mu,1}}\delta q_{\mu,1}, \tag{8}$$

gdzie, obok oznaczeń już znanych, φ_0 i φ_1 są odpowiednio wartościami φ w chwilach t_0 i t_1.

Dodajmy do równania (8) p równań (7) stronami odpowiedniemi; znajdziemy:

$$\delta \lg P = \frac{1}{dt}\int_{t_0}^{t_1} dt \sum_\mu \left\{\frac{\partial \lg\varphi}{\partial q_\mu} + \sum_\nu \lambda_\nu \frac{\partial L_\nu}{\partial q_\mu} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \lg\varphi}{\partial q'_\mu} + \sum_\nu \lambda_\nu \frac{\partial L_\nu}{\partial q'_\mu}\right)\right\}\delta q_\mu$$

$$- \frac{1}{dt}\sum_\mu \left(\frac{\partial \lg\varphi_0}{\partial q'_{\mu,0}} + \sum_\nu \lambda_{\nu,0}\frac{\partial L_{\nu,0}}{\partial q'_{\mu,0}}\right)\delta q_{\mu,0} + \frac{1}{dt}\sum_\mu \left(\frac{\partial \lg\varphi_1}{\partial q'_{\mu,1}} + \sum_\nu \lambda_{\nu,1}\frac{\partial L_{\nu,1}}{\partial q'_{\mu,1}}\right)\delta q_{\mu,1}$$

Tak przekształcone wyrażenie przemienności $\delta \lg P$ zawiera tyleż czynników dowolnych λ_ν ile jest związków (5). Kosztem więc dowolności tych czynników, przemienności δq_μ, poprzednio, t. j. w (8) nie dowolne, stały się obecnie dowolnemi. Że zaś warunkiem koniecznym maximum całki $\lg P$ jest, jak wiadomo: $\delta \lg P = 0$, przeto warunek ten prowadzi do grupy m równań:

$$\frac{\partial \lg\varphi}{\partial q_\mu} + \sum_\nu \lambda_\nu \frac{\partial L_\nu}{\partial q_\mu} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \lg\varphi}{\partial q'_\mu} + \sum_\nu \lambda_\nu \frac{\partial L_\nu}{\partial q'_\mu}\right) = 0, \tag{9}$$

$$(\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

dotyczącéj każdéj chwili t wewnątrz przedziału czasu od t_0 do t_1, i do dwóch grup po m równań:

$$\frac{\partial \lg \varphi_0}{\partial q'_{\mu,0}} + \sum_\nu \lambda_{\nu,0} \frac{\partial L_{\nu,0}}{\partial q'_{\mu,0}} = 0 , \quad \frac{\partial \lg \varphi_1}{\partial q'_{\mu,1}} + \sum_\nu \lambda_{\nu,1} \frac{\partial L_{\nu,1}}{\partial q'_{\mu,1}} = 0 , \tag{10}$$

$$(\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

dotyczących odpowiednio chwil krańcowych t_0 i t_1.

Równania (9), łącznie ze związkami (5), tworzą grupę $m+p$ równań, wystarczających do wyznaczenia tyluż niewiadomych funkcyj czasu q_μ, λ_ν. Funkcye te zawierać będą $2m$ stałych całkowania, które wyznaczymy z $2m$ warunków krańcowych (10).

§ 6.

Aby wyniki dopiero co otrzymane można było krótko sformułować, postąpimy w ten sposób.

Pomnóżmy równania (9) przez różniczki $dq_\mu = q'_\mu \, dt$ i dodajmy stronami odpowiedniemi; otrzymamy:

$$\sum_\mu \left(\frac{\partial \lg \varphi}{\partial q_\mu} + \sum_\nu \lambda_\nu \frac{\partial L_\nu}{\partial q_\mu} \right) dq_\mu - \sum_\mu q'_\mu \, d \left(\frac{\partial \lg \varphi}{\partial q'_\mu} + \sum_\nu \lambda_\nu \frac{\partial L_\nu}{\partial q'_\mu} \right) = 0 ,$$

zważywszy zaś następnie na tożsamości:

$$q'_\mu \, d\left(\frac{\partial \lg \varphi}{\partial q'_\mu} + \sum_\nu \lambda_\nu \frac{\partial L_\nu}{\partial q'_\mu} \right) = dq'_\mu \left(\frac{\partial \lg \varphi}{\partial q'_\mu} + \sum_\nu \lambda_\nu \frac{\partial L_\nu}{\partial q'_n} \right) - \left(\frac{\partial \lg \varphi}{\partial q'_\mu} + \sum_\nu \lambda_\nu \frac{\partial L_\nu}{\partial q'_\mu} \right) dq'_\mu ,$$

$$\sum_\mu \left(\frac{\partial \lg \varphi}{\partial q_\mu} dq_\mu + \frac{\partial \lg \varphi}{\partial q'_\mu} dq'_\mu \right) = d \lg \varphi , \quad \sum_\mu \left(\frac{\partial L_\nu}{\partial q_\mu} dq_\mu + \frac{\partial L_\nu}{\partial q'_\mu} dq'_\mu \right) = 0 ,$$

otrzymamy wreszcie

$$d \left\{ \lg \varphi - \sum_\mu q'_\mu \left(\frac{\partial \lg \varphi}{\partial q'_\mu} + \sum_\nu \lambda_\nu \frac{\partial L_\nu}{\partial q'_\mu} \right) \right\} = 0.$$

Stąd widocznie mamy:

$$\lg \varphi - \sum_\mu q'_\mu \left(\frac{\partial \lg \varphi}{\partial q'_\mu} + \sum_\nu \lambda_\nu \frac{\partial L_\nu}{\partial q'_\mu} \right) = \lg H ,$$

albo raczéj

$$\varphi = H \, e^{\sum_\mu q'_\mu \left(\frac{\partial \lg \varphi}{\partial q'_\mu} + \sum_\nu \lambda_\nu \frac{\partial L_\nu}{\partial q'_\mu} \right)} \tag{11}$$

gdzie H oznacza stałą dodatnią.

Uwzględniając tu po kolei warunki (10), znajdziemy:

$$\varphi_0 = \varphi_1 = H , \tag{12}$$

co znaczy, że stany krańcowe układu są równo prawdopodobne i że stała H jest wartością tego prawdopodobieństwa.

§ 7.

Równanie (11) jest warunkiem koniecznym maximum prawdopodobieństwa P. Uwzględnijmy to równanie w całce (4), przejdźmy następnie od logarytmów do liczb i załóżmy dla krótkości:

$$V = - \int_{t_1}^{t_1} dt \sum_\mu q'_\mu \left(\frac{\partial \lg \varphi}{\partial q'_\mu} + \sum_\nu \lambda_\nu \frac{\partial L_\nu}{\partial q'_\mu} \right) ; \tag{13}$$

znajdziemy:

$$P = H^{\frac{t_1 - t_0}{dt}} \, e^{-\frac{V}{dt}} \tag{14}$$

Podstawmy w równaniu (14) za elementy q_μ wszystkie po kolei układy funkcyj czasu, zadość czyniące związkom (5), równaniu (11) i warunkom (10) i dodajmy równości w ten sposób otrzymane stronami odpowiedniemi; znajdziemy:

$$Q = g \, H^{\frac{t_1 - t_0}{dt}} ,$$

gdzie

$$Q = \Sigma P , \quad g = \Sigma e^{-\frac{V}{dt}} ,$$

Odpowiednio do tego, prawdopodobieństwo P uważać można jako złożone z dwóch następujących:

$$Q = g \, H^{\frac{t_1 - t_0}{dt}} , \qquad R = g^{-1} \, e^{-\frac{V}{dt}} .$$

Zgodnie z wyrażeniem Q i znaczeniem stałéj H, czynnik Q wyobraża prawdopodobieństwo zdarzenia, jakoby wszystkie stany układu w czasie od

t_0 do t_1 miały prawdopodobieństwa jednakie, równe H, niezależnie od tego, jakiemi są te stany i jak po sobie następują; według bowiem równania (11), mamy:

$$H = \varphi\, e^{-\sum\limits_{\mu} q'_\mu \left(\frac{\partial \lg \varphi}{\partial q'_\mu} + \Sigma \lambda_\nu \frac{\partial L_\nu}{\partial q'_\mu} \right)}, \tag{15}$$

gdzie, podczas gdy H jest stałe, stan (q_μ, q'_μ) może być zmienny. Q wyraża zatém prawdopodobieństwo faktu, że jeden z ciągów stanów układu jest, tylko nie wiadomo który, a więc wyraża prawdopodobieństwo możliwości bytu.

Odpowiednio do tego wyniku, czynnik R wyobraża znowu prawdopodobieństwo, że gdy ciąg stanów układu już jest, to nie może być nieoznaczony; zależnie bowiem od wartości V, jeden ciąg stanów jest mniéj, inny—więcéj prawdopodobny. Najprawdopodobniejszy będzie oczywiście ten, któremu odpowiada wartość V najmniejsza.

Stąd i równania (13) otrzymujemy warunek

$$-\int_{t_0}^{t_1} dt \sum_{\mu} q'_\mu \left(\frac{\partial \lg \varphi}{\partial q'_\mu} + \Sigma \lambda_\nu \frac{\partial L_\nu}{\partial q'_\mu} \right) = minimum, \tag{16}$$

a według tego i formuły (14) mamy widocznie

$$max.\ P = H^{\frac{t_1 - t_0}{dt}}\, e^{-\frac{min.\ V}{dt}}.$$

Ostatecznie zatém zasada najprawdopodobniejszego bytu zawiera się w równaniach (15) i (16). Zobaczmy, co one znaczą.

§ 8.

Skoro Q oznacza prawdopodobieństwo możliwości bytu, przeto H oznacza prawdopodobieństwo możliwości stanu układu. Zatém równanie (15) wyraża, że stan układu jest jednakowo możliwy w każdéj chwili uważanego przedziału czasu, a to nazywać będziemy *prawem zachowania bytu.*

Warunek znowu (16) odpowiada ciągowi stanów układu, albo raczéj sposobowi bytowania tego układu—najprawdopodobniejszemu. Że zaś najprawdopodobniejszy—znaczy: najczęściéj się zdarzający, a tém samém i najłatwiejszy do urzeczywistnienia, więc równanie (16) wyraża prawo, które nazywać będziemy *prawem najłatwiejszego sposobu bytowania.*

Dołączając do tego wysłowienie warunków (12), otrzymujemy twierdzenie następujące:

Układ najprawdopodobniejszy podlega prawu zachowania bytu, prawu najłatwiejszego sposobu bytowania, oraz zmierza do osiągnięcia stanu równie prawdopodobnego, jak ten, z którego był wyszedł.

Z twierdzenia tego wynika wniosek następujący.

Równania (9) i (10) otrzymaliśmy jako warunki tylko konieczne maximum prawdopodobieństwa P. Gdy jednak elementy q_μ i czynniki λ_ν, jako całki grupy równań (9) i (10) łącznie ze związkami (5), podstawimy w równaniu (13), powinniśmy w ten sposób przywieść V do minimum, a tém samém P do maximum; gdyż P z natury rzeczy tylko maximum mieć może. Równania przeto (9) i (10) łącznie ze związkami (5) wyrażają warunki konieczne i dostateczne maximum prawdopodobieństwa P.

§ 9.

W zadaniu naszém określiliśmy stan układu za pomocą elementów i prędkości, opierając się na tém, że jeśli postacią układu w chwili t jest $W(q_\mu)$, postacią jego w chwili $t + dt$ będzie $W(q_\mu + dq_\mu)$. Biorąc jednak rzeczy ściśléj i ogólniéj, postać układu w chwili $t + dt$ należałoby wyrazić symbolem

$$W(q_\mu + dq_\mu + d^2 q_\mu / 2! + d^3 q_\mu / 3! + \ldots),$$

tak aby do stanu jego w chwili t weszły elementy i ich pochodne względem czasu aż do pewnego rzędu włącznie, którego wielkość mogłaby nadto być różną dla różnych grup elementów, cały ich ogół składających.

W przypadku, w ten sposób uogólnionym, zadanie również nie przedstawia trudności. Jakoż, załóżmy

$$\psi = \lg \varphi + \sum_{\nu} \lambda_\nu L_\nu,$$

gdzie φ i L_ν mają te same znaczenia jak wyżéj, tylko że, obok elementów i prędkości, zawierają obecnie dalsze jeszcze pochodne elementów względem czasu; zaś współczynniki λ_ν są funkcyami czasu, mającemi się wyznaczyć odpowiednio do związków $L_\nu = 0$. Wtedy równania zmienności układu, w każdéj chwili t wewnątrz przedziału czasu od t_0 do t_1, przyjmą postać taką:

$$\frac{\partial \psi}{\partial q_\mu} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \psi}{\partial q'_\mu} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial \psi}{\partial q''_\mu} - \frac{d^3}{dt^3}\frac{\partial \psi}{\partial q'''_\mu} + \ldots = 0,$$

$$(\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

a równania, odpowiadające chwilom krańcowym t_0 i t_1, — taką:

$$\frac{\partial\psi_0}{\partial q'_{\mu,0}}-\frac{d}{dt_0}\frac{\partial\psi_0}{\partial q''_{\mu,0}}+\frac{d^2}{dt_0^2}\frac{d\psi_0}{dq'''_{\mu,0}}-\ldots=0,\quad \frac{\partial\psi_1}{\partial q'_{\mu,1}}-\frac{d}{dt_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial q''_{\mu,1}}+\frac{d^2}{dt_1^2}\frac{\partial\psi_1}{\partial q'''_{\mu,1}}-\ldots=0,$$

$$\frac{\partial\psi_0}{\partial q''_{\mu,0}}-\frac{d}{dt_0}\frac{\partial\psi_0}{\partial q'''_{\mu,0}}+\ldots=0,\qquad \frac{\partial\psi_1}{\partial q''_{\mu,1}}-\frac{d}{dt_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial q'''_{\mu,1}}+\ldots=0,$$

$$\frac{\partial\psi_0}{\partial q'''_{\mu,0}}-\ldots=0,\qquad \frac{\partial\psi_1}{\partial q'''_{\mu,1}}-\ldots=0,$$
$$\vdots\qquad\qquad\vdots$$

$$(\mu=1,2,\ldots,m)$$

Prawo zachowania bytu zawierać się będzie w równaniu

$$H=\varphi\, e^{-\theta},$$

w którém

$$\theta=\sum_\mu\Big\{q'_\mu\Big(\frac{\partial\psi}{\partial q'_\mu}-\frac{d}{dt}\frac{\partial\psi}{\partial q''_\mu}+\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial\psi}{\partial q'''_\mu}-\ldots\Big)$$
$$+q''_\mu\Big(\frac{\partial\psi}{\partial q''_\mu}-\frac{d}{dt}\frac{\partial\psi}{\partial q'''_\mu}+\ldots\Big)+q'''_\mu\Big(\frac{\partial\psi}{\partial q'''_\mu}+\ldots\Big)+\ldots\Big\},$$

a prawo najłatwiejszego sposobu bytowania w równaniu:

$$-\int_{t_0}^{t_1}\theta\, dt=minimum,$$

Jeżeli teraz elementy q_μ rozdzielimy na grupy, mianowicie takie, aby do grupy pierwszéj zaliczały się elementy, posiadające w wyrażeniu ψ pochodne tylko pierwsze, do drugiéj — pochodne pierwsze i drugie, do trzeciéj — pochodne pierwsze, drugie i trzecie, i t. d., wówczas, dla powodów łatwo zrozumiałych, elementy grupy pierwszéj obowiązywać będzie prawo bezwładności rzędu pierwszego, to właśnie, które stwierdzone zostało doświadczeniem dla ruchu; podczas gdy elementy grup wyższych obowiązywać będzie prawo bezwładności rzędów wyższych, wprawdzie nie stwierdzone jeszcze doświadczeniem, ale w zasadzie możliwe.

Taka jest istotna różnica między przypadkiem ogólnym zmienności układu, a tym, któryśmy rozbierali szczegółowo, t. j. tym, który podlega prawu bezwładności rzędu pierwszego.

§ 10.

Aby wyniki sformułowane w twierdzeniu §-u 8 można było porównać z zasadami panującemi obecnie, nadajmy prawdopodobieństwu φ odpowiednio dogodną postać.

Jakąbykolwiek funkcyą zmiennych q_μ, q'_μ było prawdopodobieństwo φ, możemy zawsze uważać je jako iloczyn z funkcyi zależnéj tylko od zmiennych q_μ, przez funkcyą zmiennych q_μ i q'_μ.

Oznaczmy więc przez U funkcyą zmiennych q_μ, a przez T—funkcyą zmiennych q_μ i q'_μ; wówczas wolno założyć

$$\varphi=h\, e^{-(U+T)}, \tag{17}$$

gdzie h oznacza stałą dodatnią.

Uwzględniając to wyrażenie φ w równaniu (15) i przechodząc od liczb do logarytmów, znajdziemy:

$$\sum_\mu q'_\mu\Big(\frac{\partial T}{\partial q'_\mu}-\sum_\nu\lambda_\nu\frac{\partial L_\nu}{\partial q'_\mu}\Big)-T-U=\lg\Big(\frac{H}{h}\Big).$$

Możemy wreszcie wartość funkcyi U tak dobrać (przez dodanie odpowiedniéj stałéj), aby stała h równała się H, i wtedy równanie powyższe przyjmie ostatecznie postać:

$$\sum_\mu q'_\mu\frac{\partial T}{\partial q'_\mu}-T-U-\sum_\nu\lambda_\nu\sum_\mu q'_\mu\frac{\partial L_\nu}{\partial q'_\mu}=0. \tag{18}$$

Również znajdziemy łatwo, że równanie (16) przyjmie odpowiednio postać następującą:

$$\int_{t_0}^{t_1}(T+U)\,dt=\int_{t_0}^{t_1}dt\Big(\sum_\mu q'_\mu\frac{\partial T}{\partial q'_\mu}-\sum_\nu\lambda_\nu\sum_\mu q'_\mu\frac{\partial L_\nu}{\partial q'_\mu}\Big)=minimum. \tag{19}$$

Jeżeli teraz założymy, że funkcya T jest względem prędkości q'_μ wymierną i całkowitą stopnia drugiego i przytém stale dodatnią, wówczas równania (18) i (19) przywiodą się odpowiednio do następujących:

$$T-U-\sum_\nu\lambda_\nu\sum_\mu q'_\mu\frac{\partial L_\nu}{\partial q'_\mu}=0 \tag{20}$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\Big(2\,T-\sum_\nu\lambda_\nu\sum_\mu q'_\mu\frac{\partial L_\nu}{\partial q'_\mu}\Big)dt=minimum, \tag{21}$$

a układ stanie się mechanicznym, w zwykłém tego wyrazu znaczeniu, i skrępowany będzie związkami (5).

W przypadku, gdy wyrażenia L_ν nie zależą od prędkości q'_μ lub gdy zadość czynią równaniom postaci

icm©

$$\sum_{\mu} q'_{\mu} \frac{\partial L_{\nu}}{\partial q'_{\mu}} = f_{\nu}(q_{\mu}, q'_{\mu}, L_{\nu}), \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, p)$$

gdzie $f_{\nu}(q_{\mu}, q'_{\mu}, L_{\nu})$, oznacza funkcyą $2m+p$ zmiennych $q_{\mu}, q'_{\mu}, L_{\nu}$ i taką, że $f_{\nu}(q_{\mu}, q'_{\mu}, 0) = 0$, mamy, na zasadzie związków (5):

$$\sum_{\mu} q'_{\mu} \frac{\partial L_{\nu}}{\partial q'_{\mu}} = 0, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, p)$$

a wtedy równania (20) i (21) redukują się odpowiednio do następujących:

$$T - U = 0, \qquad \int_{t_0}^{t_1} 2\,T\,dt = minimum,$$

z których pierwsze wyraża prawo zachowania energii, a drugie — prawo najmniejszego działania, w powszechném ich znaczeniu.

W taki to sposób pomienione prawa mieszczą się odpowiednio w prawach: zachowania bytu i najłatwiejszego sposobu bytowania. Daje on nam miarę tego, o ile bardziéj zawiłemi być mogą zjawiska przyrody, niż sobie wyobrażają ci, którzy sądzą, że cały ich ogół da się podporządkować pod układ mechaniczny swobodny.

Warszawa, w październiku 1891.

O PEWNÉJ KLASIE RÓWNAŃ PRZESTĘPNYCH.

NAPISAŁ

M. P. RUDZKI.

§ I.

Będziemy rozważali w téj rozprawie równania przestępne:

$$J_m = 0, \tag{1}$$

gdzie J_m oznacza funkcyą Bessela, t. j. funkcyą:

$$\sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{(-1)^i \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2i}}{\Gamma(i+1)\,\Gamma(m+i+1)}$$

Pierwiastkami równań tego rodzaju zajmował się Poisson.[1]) Znakomity ten matematyk zauważył, że gdy wartość zmiennéj x jest bardzo wielka w porównaniu z liczbą m, to równanie różniczkowe, któremu czynią zadość funkcye Bessela, może być napisane pod przybliżonym kształtem:

$$\frac{d^2 J_m(\sqrt{x})}{dx^2} + J_m(\sqrt{x}) = 0,$$

skąd wynika, że bardzo wielkie pierwiastki równania (1) muszą być bliskie wartością pierwiastkom równania

[1]) Todhunter, Elementary Treatise on Laplace, Lame and Bessels functions, str. 312 i nast.