O PEWNÉJ KLASIE ROWNAŃ ROŻNICZKOWYCH RZĘDU PIERWSZEGO.

PRZEZ

A. J. STODÓŁKIEWICZA.

Zadaniem artykułu niniejszego jest całkowanie klasy równań różniczkowych kształtu ogólnego

$$\frac{dy}{dx} = X\,(ay^2 + by + c) + X_1\,, \tag{1}$$

w których X i X_1 są danemi funkcyami zmiennéj niezależnéj x, zaś a, b, c — stałemi.

Równanie to, przy istnieniu jednego warunku, sprowadza się do równania liniowego.

Dajmy na to, że

$$X_1 = X_2 + X_3\,, \tag{2}$$

gdzie jeden z wyrazów drugiéj strony, naprzykład X_3 jest taki, że

$$\int X_3\,dx = X_4 \tag{3}$$

przedstawia funkcyą algebraiczną. Wprowadźmy nową zmienną z, określoną równaniem

$$y = z + X_4\,. \tag{4}$$

Podstawiając w równanie (1) na miejsce y wartość (4), otrzymamy po redukcyi:

$$\frac{dz}{dx} = X\,(az^2 + 2\,az\,X_4 + a\,X_4^2 + bz + b\,X_4 + c) + X_2 \tag{5}$$

Przyjmijmy następnie

$$z = \frac{1}{u} + \alpha\,,$$

gdzie u jest nowa zmienna, α zaś stała, którą poniżéj wyznaczymy; natenczas, gdy podstawimy w równanie (5) za z tę jego wartość, będziemy mieli

$$-\frac{1}{u^2}\frac{du}{dx} = X\left(\frac{a}{u^2} + \frac{2a\alpha}{u} + a\alpha^2 + \frac{2a}{u}X_4 + 2a\alpha X_4 + aX_4^2 + \frac{b}{u} + b\alpha + bX_4 + c\right) + X_2 \tag{6}$$

Na wyznaczenie α dajmy:

$$a\alpha^2 + b\alpha + c = 0\,. \tag{7}$$

Z rozważania kształtu równania (6) spostrzedz łatwo, że jeżeli spełnia się warunek

$$X\,(2a\alpha\,X_4 + a\,X_4^2 + bX_4) + X_2 \equiv 0\,, \tag{8}$$

wówczas równanie (6) zawsze sprowadza się do równania liniowego. W rzeczy saméj, mamy

$$-\frac{1}{u^2}\frac{du}{dx} = X\left(\frac{a}{u^2} + \frac{2a\alpha}{u} + \frac{2aX_4}{u} + \frac{b}{u}\right);$$

mnożąc zaś ostatnie równanie przez u^2, otrzymujemy

$$\frac{du}{dx} + X\,(2a\alpha + 2a\,X_4 + b)\,u = -\,a\,X\,. \tag{9}$$

Uwzględniając związki (2) i (3), możemy napisać warunek (8) pod postacią następującą

$$X\Big\{2a\alpha\int(X_1 - X_2)\,dx + a\Big[\int(X_1 - X_2)dx\Big]^2 + b\int(X_1 - X_2)\,dx\Big\} + X_2 \equiv 0\,.$$

Stąd wnioskujemy, że funkcya X_2 może mieć kształt do pewnego stopnia upodobany, byleby tylko $\int(X_1 - X_2)\,dx$ było całką algebraiczną, albowiem wszelka funkcya przestępna utrudniałaby całkowanie równania (9).

Dla objaśnienia téj teoryi podamy przykład.

Niech będzie równanie

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2}\,(y^2 - 8y + 15) + 2 + 2x - x^2\,.$$

Przyjmujemy

$$X_2 = 2 - x^2\,,\quad X_3 = 2x\,,$$

przeto będzie

$$X_4 = 2\int x dx = x^2 .$$

Następnie mamy

$$a = 1 , \quad b = -8 , \quad c = 15 , \quad a = 3 , \quad X = \frac{1}{x^2} .$$

Przy powyższych wartościach, warunek (8) jest spełniony, a więc, przekształcamy równanie dane, zakładając $y = z + x^2$, wskutek czego otrzymujemy

$$\frac{dz}{dx} + 2x = \frac{1}{2^2}(z^2 + 2x^2 z + x^4 - 8z - 8x^2 + 15) + 2 + 2x - x^2 .$$

Podstawienie $z = \frac{1}{u} + 3$ doprowadza do nowego równania

$$-\frac{du}{dx} = \frac{1}{x^2}(1 - 2u + 2x^2 u) ,$$

które można napisać tak:

$$\frac{du}{dx} + \frac{2x^2 - 2}{x^2} \cdot u = -\frac{1}{x^2} .$$

Całką tego równania jest

$$u = e^{-2x - \frac{2}{x}} \left(c - \int e^{2x + \frac{2}{x}} \frac{dx}{x^2} \right) .$$

Podstawiając w ostatni związek wartość $u = \frac{1}{z-3}$, gdzie $z = y - x^2$, mieć będziemy całkę szukaną

$$\left(\frac{1}{y - x^2 - 3} - \frac{1}{2} \right) e^{2x + \frac{2}{x}} + \int e^{2x + \frac{2}{x}} dx = C .$$

Płock, dnia 22 września 1891 roku.

O ZASADZIE NAJPRAWDOPODOBNIEJSZEGO BYTU.[1]

PRZEZ

WŁ. GOSIEWSKIEGO.

Zadaniem pracy niniejszéj jest poznanie praw zmienności w ogóle.

Gdy idzie o prawa zmienności szczególnych, jak np. ruchu, ciepła, światła i t. p., posiłkujemy się zwykle faktami, zdobytemi przez doświadczenie, i dopiero uogólniając je, budujemy odnośną teoryą. W ten sposób, który się nazywa metodą indukcyjną, powstały wszystkie prawie teorye fizyczne i niefizyczne.

Ale gdy chcemy zbudować teoryą zmienności wogóle, któraby obejmowała wszystkie odrazu dziedziny zjawisk przyrody, wówczas na faktach doświadczalnych opierać się już nie można: bo zmienności ogólnych w przyrodzie niema; są tylko zmienności szczególne. Tu zatém metoda indukcyjna na nic by się nie zdała.

Nie mając faktów żadnych, prócz jedynego, że zmienności wogóle dokonywają się w czasie oraz z prędkościami oznaczonemi (tak przynajmniéj sobie wyobrażamy), uciekniemy się zresztą do zasad prawdopodobieństwa, i nie kusząc się o prawdziwą, spróbujemy zbudować teoryą zmienności najprawdopodobniejszą.

Z pojęciem zmienności łączy się koniecznie pojęcie zmieniającego się przedmiotu, w ten mianowicie sposób, że wyobrażamy sobie różne stany tego przedmiotu, w różnych chwilach upływającego czasu.

[1] Rzecz referowana w d. 18 lipca 1891 r. na posiedzeniu sekcyi fizyko-matematycznej VI-go Zjazdu przyrodników i lekarzy w Krakowie.