$$\frac{\partial k_n}{\partial \cos(\mu, \nu)} - 2\alpha k_n (\bar{x} - x_\mu)(\bar{x} - x_\nu) = 0, \tag{25}$$

rozumiejąc przez $\bar{x}$ wyrażenie (13); są to równania w liczbie wystarczającéj do oznaczenia wartości α i wszystkich $\cos(\mu, \nu)$. Równania te mają wogóle wiele rozwiązań, ale z pomiędzy tych wielu należy wybrać jedno, które sprowadza *max.* P do największości bezwzględnéj.

Stąd widzimy, że rozwiązanie zadania Gaussa, w przypadku najogólniéjszym, przywodzi się do rozwiązania układu $1 + n(n-1)/2$ równań algebraicznych (24) i (25).

Warszawa, w maju 1891.

O DOWODZIE PRAWA GAUSS'A. [1]

PRZEZ

C. RUSJANA.

W Tomie II-im „Prac matematyczno-fizycznych" zamieszczony został artykuł p. Gosiewskiego o prawie Gaussa, dotyczącém błędów przypadkowych. Autor wyraża nadzieję, że podany przezeń dowód tego prawa jest zupełnie poprawny; mnie wydaje się on mylnym, tak ze względu na równanie zasadnicze, na którém się opiera, jako też ze względu na sposób, w jaki z równania tego wyprowadzone zostały wnioski.

Tok rozumowań autora jest taki:

Jeżeli $(x-a_1), (x-a_2), \ldots (x-a_n)$ są błędy dostrzeżenia niewiadoméj x, $\varphi_\mu(x-a_\mu)$ zaś prawdopodobieństwo błędu $x-a_\mu$, to

$$P = \varphi_1(x-a_1) \cdot \varphi_2(x-a_2), \ldots \varphi_n(x-a_n)$$

jest prawdopodobieństwem układu błędów: $(x-a_1), (x-a_2), \ldots (x-a_n)$, popełnionych przy n dostrzeżeniach. Dalej uważa autor, że P jest także prawdopodobieństwem osiągnięcia summy $(x-a_1) + (x-a_2) + \ldots + (x-a_n)$. Kładąc

$$n\varepsilon = (x-a_1) + (x-a_2) + \ldots + (x-a_n),$$

znajduje, że

$$[\psi(\varepsilon)]^n$$

jest prawdopodobieństwem otrzymania summy $n\varepsilon$, jeżeli $\psi(\varepsilon)$ jest prawdopodobieństwem popełnienia błędu ε.

Według autora, równanie

[1]) Porówn. artykuł poprzedzający.

$$P = [\psi(\varepsilon)]^n \tag{1}$$

powinno być tożsamością. To ostatnie równanie jest zasadniczém w dowodzie. Jest ono wszakże zupełnie mylném, o czém łatwo się przekonać w sposób następujący: Wynika z niego, że prawdopodobieństwa różnych układów błędów, których summa jest zawsze stałą, są sobie równe, niezależnie od wielkości pojedyńczych błędów; tymczasem można zawsze wybrać dwa układy błędów, zadość czyniących powyższemu warunkowi, i takie, aby bezwzględne wielkości pojedyńczych błędów pierwszego układu były większemi od bezwzględnych wielkości błędów drugiego. Na zasadzie równania (1) prawdopodobieństwa tych dwóch układów błędów powinny być sobie równe, co jest niedorzecznością, albowiem każdy czynnik pierwszego iloczynu jest mniejszy od każdego czynnika drugiego.

Na zasadzie tego równania autor wyprowadza wzór Gaussa. Stało się to dlatego, że nie spostrzegł jednéj okoliczności. Po napisaniu tego równania, postępuje w taki sposób: Przez różniczkowanie równania (1) otrzymuje:

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial x}}{P} = n\,\frac{\psi'(\varepsilon)}{\psi(\varepsilon)}\;;$$

albo, oznaczając

$$\frac{\varphi'_m(x-a_m)}{\varphi_m(x-a_m)} \text{ przez } \varphi_m(x-a_m),\ \text{i } \frac{\psi'(\varepsilon)}{\psi(\varepsilon)} \text{ przez } F(\varepsilon):$$

$$f_1(x-a_1)+f_2(x-a_2)+\ldots+f_n(x-a_n) = n\,F\left(\frac{u_1+u_2+\ldots+u_n}{n}\right);$$

Stąd

$$f_\mu = f_\nu\,;\ \nu = 1, 2, \ldots n,\ ;\quad F = f.;$$

$$f(u_1)+f(u_2)+\ldots+f(u_n) = n\,f\left(\frac{u_1+u_2+\ldots+u_n}{n}\right)$$

Zakładając teraz $u_1+u_2+\ldots+u_n =$ stałéj, otrzymujemy:

$$\frac{\partial f(u_1)}{\partial u_1} = \frac{\partial f(u_2)}{\partial u_2} = \ldots = \frac{\partial f(u_{n-1})}{\partial u_{n-1}} = \frac{\partial f(k-u_1-u_2-\ldots-u_{n-1})}{\partial(k-u_1\ldots-u_{n-1})} \tag{2}$$

albo też $\frac{\partial f(u)}{\partial u} =$ stałéj; całkując dwa razy, znajdujemy

$$\varphi(u) = H\,e^{au^2+bu} \tag{3}$$

Dowód ten tylko pozornie jest ścisłym. Istotnie, łatwo można zauważyć, że rozumowania powyższe tylko wtenczas prowadzą od równania (1) do formuły (3), kiedy równanie (2) zawiera w sobie zmienne $u_1, u_2, \ldots u_n$; w przeciwnym bowiem, razie $\frac{\partial f(u)}{\partial u} = a = 0$. Otóż autor nie zauważył, że równanie (2) nie może zawierać w sobie zmiennych właśnie na zasadzie równania (1); w rzeczy saméj, równanie (1) daje się napisać pod postacią:

$$\lg\varphi_1(u_1)+\lg\varphi_2(u_2)+\ldots+\lg\varphi_n(u_n) = n\lg\psi\left(\frac{u_1+u_2+\ldots+u_n}{n}\right).$$

Zakładając $u_1+u_2+\ldots+u_n =$ stałéj, łatwo otrzymać, że $\frac{\partial \lg\varphi(u)}{\partial u} =$ stałéj, t. j. że równanie (2) nie zawiera zmiennych; a zatém na zasadzie równania (1) otrzymujemy nie formułę Gaussa, ale inną

$$\varphi(u) = H\,e^{bu},$$

która, oczywiście, nie może przedstawiać prawdopodobieństwa błędu przypadkowego.

Odessa, w marcu 1890.