$$c_2 = \frac{E\varphi_y\,\psi_y - F(\varphi_x\,\psi_y + \psi_x\,\varphi_y) + G\varphi_x\,\psi_x}{EG - F^2},$$

$$c_3 = c_{12} = \frac{\varphi_x\,\psi_y - \varphi_y\,\psi_x}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Ponieważ równania układu naszego są symetryczne względem funkcyj φ i ψ, więc z istnienia całki c_1 wynika wprost, że

$$c_1' = \frac{E\psi_y^2 - 2F\psi_y\,\psi_x + G\,\psi_x^2}{EG - F^2}$$

musi być także całką układu. Istotnie łatwo sprawdzić tożsamość:

$$c_1\,c_1' - c_2^2 = c_3^2,$$

która dowodzi, że całka c' jest funkcyą całek c_1, c_2 i c_3.

Wobec tego możemy przyjąć, że najogólniejszém rozwiązaniem danego układu jest funkcya dowolna całek:

$$\frac{E\varphi_y^2 - 2F\varphi_y\,\varphi_x + G\,\varphi_x^2}{EG - F^2},\ \frac{\varphi_x\,\psi_y - \varphi_y\,\psi_x}{\sqrt{EG - F^2}},\ \frac{E\psi_y^2 - 2F\psi_y\,\psi_x + G\,\psi_x^2}{EG - F^2}.\ ^{1)}$$

Zauważmy, że wszystkie całki obliczaliśmy w przykładzie tym przez całkowanie. Przeglądając przebieg rachunków łatwo dostrzedz, że w jednym tylko przypadku, przy obliczaniu całek wspólnych równań $X_4(f) = 0$, $X_1(f) = 0$, $X_3(f) = 0$, można się było raz obejść bez całkowania, korzystając z działania Y_2. Całkowanie to jednak było tak proste, żeśmy tego zaniechali.

Szczuki, wrzesień 1890.

---

1) Otrzymane niezmienniki znane są pod nazwą *niezmienników różniczkowych Beltrami'ego* (Beltrami'sche Differentialinvarianten). Beltrami pierwszy otrzymał jej metodą, od podanéj tu zupełnie odmienną. Patrz: Beltrami. Giornale di Matematiche. Tom 2 i 3. „Ricerche di analisi applicata alla geometria", rozdział XIV, a także: Beltrami. Mathem. Ann. Tom 1. „Zur Theorie des Krümmungsmaasses".

O PRAWIE PRAWDOPODOBIEŃSTWA UKŁADU BŁĘDÓW, JAKO ZDARZEŃ WOGÓLE ZALEŻNYCH.

PRZEZ

WŁ. GOSIEWSKIEGO.

Kwestya uzasadnienia, a nawet oznaczenia prawa prawdopodobieństwa błędów dostrzeżeń, jest jeszcze do dzisiaj otwartą. W artykulikach [1]) poprzednich, poświęconych temu samemu przedmiotowi, kwestyę tę traktowałem bardzo niefortunnie. Obecnie sądzę, że natrafiłem na taką definicyą, która, będąc dość prostą i naturalną, wystarcza zarazem do rozwiązania zadania, w całéj zresztą ogólności.

Uderzony analogią między prawem Maxwella rozdziału prędkości w gazie doskonałym, a prawem Gaussa rozdziału błędów między dostrzeżeniami, powziąłem myśl, aby, dla otrzymania tego ostatniego, wyjść z podobnego punktu widzenia jak Maxwell. Zadanie Maxwella [2]) przedstawić można tak.

Jest układ nieskończonéj liczby poruszających się punktów, równych co do masy, a różnych co do prędkości, w ten sposób, że jakąbądź pomyślimy

---

1) Wł. Gosiewski. O prawdopodobieństwie błędów przypadkowych. (Prace mat. fiz. t. I.)

M. A. Baraniecki. O pewném wnioskowaniu analityczném w t. I tego wydawnictwa. (Prace mat. fiz. t. II)

Wł. Gosiewski. Dowód prawa Gaussa, które dotyczy błędów przypadkowych (Prace mat. fiz. t. II)

C. Russjan (z Odessy). O pewnym dowodzie prawa Gaussa. (Prace mat. fiz. t. niniejszy—III. Patrz niżéj).

2) Philosophical Magazine, January, 1860. Również Scientific Papers of. I. Cl. Maxwell, Cambridge, 1890, Vol. I., p. 380.

icm©

prędkość ze względu na wartość i kierunek, znajdziemy zawsze w układzie pewną liczbę punktów, tę prędkość posiadających. Owóż Maxwellowi chodziło o oznaczenie prawdopodobieństwa wylosowania z układu punktu, posiadającego daną prędkość; aby zaś to zadanie zrobić oznaczoném, przyjął w układzie rodzaj symetryi, zadość czyniącéj warunkom następującym: 1) prawdopodobieństwo wylosowania punktu, mającego daną składową prędkości w jakimbądź oznaczonym kierunku, jest funkcyą téj tylko składowéj; 2) składowe prostokątne prędkości tego samego punktu są, jako zdarzenia, niezależne. Wyrażając następnie prawdopodobieństwo szukane dwojakim sposobem: raz, jako złożone z trzech prawdopodobieństw, odpowiadających trzem składowym prędkości, drugi raz, jako zależne tylko od saméj wartości prędkości, otrzymał równanie, a z tego równania oznaczył prawo szukanego prawdopodobieństwa.

Zadanie o błędach jest o wiele zawilsze. Bo najprzód, jakkolwiek błędy, jako jednorodne, można przyrównać do odpowiednich składowych pewnéj wynikowéj, to jednak z uwagi, że błędów może być ilekolwiek, należy przyjąć tyle wymiarów przestrzeni ile jest błędów, a zatem rozważać kwestyą w przestrzeni wielowymiarowéj. Powtóre, niewiadomo na jakich osiach, prostokątnych czy ukośnokątnych, odcinać błędy jako składowe wynikowéj; dla ogólności przyjmuję osi ukośnokątne. Dzięki właśnie temu, okazuje się, że układ osi prostokątny odpowiada niezależności błędów, ukośnokątny — zależności wogóle, a układ zerokątny odpowiada zależności ich maksymalnéj.

Zamiast wreszcie dwóch hypotez Maxwella, przyjmuję tylko jednę, taką: prawdopodobieństwo układu błędów jest funkcyą saméj ich wynikowéj, niezależną od jéj kierunku. Ta hypoteza wynika łatwo przez rozszerzenie określenia Gaussa, które dotyczy prawdopodobieństwa błędu pojedyńczego, do układu błędów; określenie to jest następujące: prawdopodobieństwo błędu zależy tylko od wartości błędu, a nie zależy od jego znaku.

W porównaniu zatém z układem punktów Maxwella, nasz układ jest ogólniejszy, albowiem posiada tę tylko własność, że liczba punktów, odpowiadających danéj wynikowéj błędów, jest proporcyonalna do pewnéj funkcyi wartości tej wynikowej.

W końcu winienem dodać, że, o ile mi wiadomo, wpływ zależności zdarzeń na całkowity ich przebieg nie był dotąd nigdy należycie oceniony; dopiero więc po raz pierwszy w pracy niniejszéj ta szczerba jest wypełnioną, o ile do tego nadawało się rozważane tu zadanie. Nadspodziewane wyniki, które w ten sposób otrzymałem, sądzę, że zainteresują czytelnika.

§ 1.

Zadanie oznaczenia miary najprawdopodobniejszéj dla wielkości nieznanéj x, z wiadomych jéj miar dostrzegalnych $x_1, x_2, \ldots, x_n$, sprowadza

się, jak wiadomo, do oznaczenia prawdopodobieństwa popełnienia, przy dostrzeganiu, układu błędów kolejnych:

$$u_1 = x - x_1,\ u_2 = x - x_2,\ \ldots,\ u_n = x - x_n.$$

Ale błędy jednorodne, jakimi są $u_1, u_2, \ldots, u_n$, upodobnić można do współrzędnych punktu liniowych w *rozmaitości* (Mannigfaltigkeit) n—wymiarowéj; wówczas promień wodzący tego punktu, ze względu na kierunek i wartość, wyobrażać będzie jakby *wynikową* błędów.

Według takiego poglądu, za *miarę* układu błędów można przyjąć ich wynikową; czy więc powiemy układ błędów, czy—wynikowa błędów, będzie wszystko jedno.

Aby błędy ewentualne mogły być jakiekolwiek, a każdemu ich układowi by odpowiadał punkt inny, przyjmujemy rozmaitość *płaską* (przestrzeń wielowymiarową) i współrzędne *prostokreślne*, przy osiach tworzących między sobą kąty, które dla osi dodatnich μ i ν, oznaczać będziemy przez (μ, ν).

Więc błąd ewentualny może mieć każdą wartość zawartą między $-\infty$ i $+\infty$, a wynikowa błędów ewentualnych może mieć wszelki kierunek i każdą wartość od o do ∞.

Gauss, między innemi, przyjął takie określenie: prawdopodobieństwo błędu, popełnionego przy jednokrotném dostrzeżeniu, jest funkcyą tego tylko błędu, niezależną od jego znaku.

Rozciągając to określenie do układu błędów, otrzymamy zasadę następującą: *prawdopodobieństwo układu błędów jest funkcyą saméj ich wynikowéj niezależną od jéj kierunku*, zasadę, którą sformułować można tak jeszcze:

Różne kierunki promienia wodzącego w przestrzeni n—wymiarowéj są jednakowo możliwe dla wynikowéj n błędów, a różne wartości tego promienia nie są jednakowo możliwe.

Ta jedna zasada wystarczy do rozwiązania naszego zadania w całéj ogólności.

§ 2.

Wynikowa błędów jest wiadoma, skoro znamy jéj kierunek i wartość.

Zakreślmy z początku współrzędnych, jako środka, promieniem jedność, rozmaitość n—1—wymiarową (analogiczną do okręgu koła i powierzchni kuli) i oznaczmy przez $\partial\sigma$ jéj element, a przez ω jéj całą rozciągłość. Stosownie do tego czy liczba n jest parzysta lub nieparzysta, będzie odpowiednio:

$$\omega = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\left(\frac{n}{2}-1\right)!},\quad \omega = \frac{2^{\frac{n+1}{2}}\ \pi^{\frac{n-1}{2}}}{1.\,3.\,5.\,\ldots\,(n-2)}.$$

icm©

Zgodnie z temi określeniami i zasadą § poprzedniego, stosunek $\partial\sigma/\omega$ wyraża prawdopodobieństwo, że wynikowa błędów ma kierunek oznaczony; jeżeli wyrazimy nadto, również zgodnie z powyższą zasadą, przez $F(\varrho_n)\,\partial\varrho_n$ prawdopodobieństwo, że wartością téj wynikowéj jest ϱ_n, to prawdopodobieństwo układu błędów będzie iloczynem

$$P = \frac{\partial\sigma}{\omega} F(\varrho_n)\,\partial\varrho_n .$$

Przechodząc teraz do współrzędnych prostokreślnych, mamy:

$$\varrho_n^{n-1}\partial\sigma\,\partial\varrho_n = k_n\,\partial u_1\,\partial u_2\ldots\partial u_n ,$$

$$\frac{1}{\omega\varrho_n^{n-1}} F(\varrho_n) = f\,\Big(\sum_\mu\sum_\nu u_\mu u_\nu \cos(\mu,\nu)\Big),$$

gdzie

$$k_n = \begin{vmatrix} 1, \cos(1,2)\ldots, \cos(1,n) \\ \cos(2,1),\ldots\ldots, \cos(2,n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \cos(n,1),\ \cos(n,2),\ldots, 1 \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} \qquad \begin{pmatrix} \mu = 1, 2, \ldots, n \\ \nu = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix} \quad \cos(\mu,\mu) = 1.$$

We współrzędnych zatém prostokreślnych, prawdopodobieństwo układu błędów przyjmuje postać następującą:

$$(1) \qquad P = k_n f\,\Big(\sum_\mu\sum_\nu u_\mu u_\nu \cos(\mu,\nu)\Big)\,\partial u_1\,\partial u_2\ldots\partial u_n, \quad {}^{1)}$$

w któréj należy jeszcze wyznaczyć naturę funkcyi f. Aby jednak to zrobić, rozważymy przed tém pewien przypadek szczególny.

§ 3.

Załóżmy w formule (1): $n=1$, i opuśćmy następnie znaczek 1; wówczas otrzymamy wyrażenie prawdopodobieństwa błędu pierwszego u, pod postacią $\varphi(u^2)\,\partial u$; albowiem funkcya f zależyć może od liczby n, jako parametru stałego, zatem dla wyróżnienia przypadku $n=1$ oznaczamy ją przez φ.

Jeśli więc błędy $u_1, u_2, \ldots, u_n$ są, jako zdarzenia, niezależne, prawdopodobieństwo układu błędów będzie iloczyném.

[1]) Formuła (1) wyobraża zatem i prawdopodobieństwo wylosowania punktu, któremu odpowiada układ błędów $u_1, u_2, \ldots, u_n$, odniesiony do osi ukośnokątnych, jeśli kwestyę rozważać będziemy z punktu widzenia Maxwell'a.

$$(2) \qquad \varphi(u_1^2)\,\varphi(u_2^2)\ldots\varphi(u_n^2)\,\partial u_1\,\partial u_2\ldots\partial u_n .$$

Według określeń § 1, oba wyrażenia (1) i (2) powinny być sobie równe, przy wszelkich wartościach zmiennych u_μ. Ztąd wynika tożsamość

$$k_n f\,\Big(\sum_\mu\sum_\nu u_\mu u_\nu \cos(\mu,\nu)\Big) = \varphi(u_1^2)\,\varphi(u_2^2)\ldots\varphi(u_n^2),$$

któréj aby się stało zadość, powinno być przedewszystkiém $\cos(\mu,\nu)=0$, i następnie $\varphi(u^2) = he^{-\alpha u^2}$, rozumiejąc przez α i h stałe. Z uwagi wreszcie, że błąd nie może być nieskończenie wielki, ale że się tylko zawiera między $-\infty$ i $+\infty$, wynika nadto: $\alpha > o$, $h = \sqrt{\alpha}/\sqrt{\pi}$. W ten sposób mamy:

$$(3) \qquad \varphi(u^2)\,\partial u = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\alpha u^2}\,\partial u .$$

Powyższe zatém wyrażenie (3), które Gauss otrzymał na podstawie trzech założeń: 1) niezależności błędów jako zdarzeń, 2) zależności prawdopodobieństwa błędu tylko od jego wartości i 3) prawa średniéj arytmetycznéj, otrzymaliśmy niezależnie od dwóch ostatnich, ale za to uczyniliśmy prawdopodobieństwo układu błędów zależném jedynie od wartości ich wynikowéj, pozostawiając w mocy pierwsze założenie Gaussa, t. j. niezależność błędów; przy tém okazało się także, że to założenie wymaga osi prostokątnych. Stąd mamy twierdzenie następujące:

Z pomiędzy wszystkich konstrukcyj współrzędnych prostokreślnych, jedne tylko współrzędne prostokątne mogą wyobrażać zdarzenia niezależne.

Według takiego poglądu, układ osi prostokątny odpowiada niezależności zdarzeń; zatem w przypadku ogólnym kąty (μ,ν) będą ostre, a układ osi *zerokątny* odpowiadać będzie maksymum zależności zdarzeń. W ten sposób, przechodząc przez wszystkie układy współrzędnych, od zerokątnego do prostokątnego, wyczerpujemy całą skalę stosunków między zdarzeniami, począwszy od ich zależności maksymalnéj, a skończywszy na ich niezależności.

§ 4.

Z poprzedzającego wyniku, że wyrażenie (1), w którem kąty (μ,ν) są ostre, wyobraża prawdopodobieństwo błędów, jako zdarzeń między sobą do pewnego stopnia zależnych. Należałoby więc obecnie zająć się wyznaczeniem natury funkcyi f w tym ogólnym przypadku. Zrobimy jednak przed tém małe wyboczenie, aby określić to, co właściwie rozumieć należy przez różne stopnie zależności zdarzeń.

Rozważając zdarzenia ze stanowiska najogólniejszego, przypisać je należy współdziałaniu przyczyn dwojakiego rodzaju, a mianowicie: przyczyn działających prawidłowo, które nazywać będziemy—*pewnemi*, i przyczyn działających przypadkowo, które nazywać będziemy—*niepewnemi*. Np. jeżeli z urny, zawierającéj ma gałek białych i mb—czarnych (a i b mogą być liczby względem siebie pierwsze), mamy wylosować jednę, to oczekiwane zdarzenie zależy od dwóch przyczyn: od jednéj—pewnéj, że w urnie znajduje się na każdych a gałek białych b—czarnych, i tę przyczynę wyrażać będziemy przez $\psi(a, b)$, i od drugiéj—niepewnéj, że ręka trafi na tę, a nie na owę gałkę.

Jeżeli teraz chcemy porównać zdarzenia, mające kolejno lub współcześnie nastąpić, to z uwagi, że skutków przyczyn niepewnych z góry przewidzieć nie podobna, porównanie to możemy zrobić jedynie ze względu na przyczyny zdarzeń pewne. W myśl tego okażemy co następuje.

Zdarzenie jest od innego niezależne, kiedy związek ich przyczyn pewnych jest oznaczony; kiedy zaś ten związek jest nieoznaczony, zdarzenie jest mniéj lub więcéj zależne.

Jakoż, jeżeli zdarzenie drugie jest od pierwszego niezależne, wówczas jego przyczyna pewna nie powinna zależyć od tego, co na zdarzenie pierwsze wskutek losu (działania przyczyny niepewnéj) wypadnie; zatém jest oznaczona. Przeciwnie, jeżeli zdarzenie drugie jest od pierwszego zależne, to jego przyczyna pewna powinna zależyć od tego, co na zdarzenie pierwsze los przyniesie; zatém jest nieoznaczona. Owóż w przypadku pierwszym związek przyczyn pewnych obu zdarzeń jest oznaczony, a w przypadku drugim—nieoznaczony, c. b. d. o.

Objaśnijmy powyższe rozumowanie przykładem.

Przypuśćmy, że przy danych poprzednich (ma gałek białych i mb—czarnych), zamiast jednéj, mamy losować dwie gałki z kolei. Wówczas, jeżeli przed losowaniem drugiém gałka, poprzednio wylosowana, ma być napowrót wrzucona, oba zdarzenia (pierwszego i drugiego losowania) będą miały przyczyny pewne jednakie, równe $\psi(a, b)$, i zdarzenie drugie nastąpi niezależnie od pierwszego t. j. tak, jak gdyby pierwsze nie istniało. Jeżeli zaś przed losowaniem drugiém gałki poprzednio wylosowanéj napowrót wrzucać nie mamy, wówczas przyczyną pewną zdarzenia drugiego może być $\psi(a-1/m, b)$ lub $\psi(a, b-1/m)$, stosownie do tego, czy w losowaniu pierwszém wyjdzie gałka biała czy czarna. Stąd oczywista, że zdarzenie drugie jest od pierwszego zależne, i że jego przyczyna pewna jest nieoznaczona, bo niewiadomo którą z dwóch wybrać: $\psi(a-1/m, b)$ czy $\psi(a, b-1/m)$.

Możemy wreszcie uwidocznić na tym przykładzie różne stopnie zależności zdarzenia drugiego od pierwszego, począwszy od pewnego jéj stopnia, a skończywszy na niezależności, zakładając na m wszystkie po kolei liczby, od $m=1$ do $m=\infty$.

Powracając do przypadku ogólnego, zauważmy, że w szeregu zdarzeń niezależnych, po sobie następujących (np. w szeregu kolejnych błędów), przyczyny pewne każdego zdarzenia są oznaczone. Jeżeli zaś, w tym szeregu, każde zdarzenie jest od poprzedzających zależne, wówczas przyczyny ich pewne są nieoznaczone, t. j. nie dają się z góry dokładnie przewidzieć, choćby nawet przyczyny pewne zdarzenia pierwszego były znane. Stąd przyczyny pewne zdarzeń zależnych są w pewnéj mierze niepewnemi, i wysokości téj miary odpowiada mniéjsza lub większa zależność zdarzeń, w ten sposób, że zdarzenia maksymalnie zależne następują dopiero pod wpływem samych przyczyn niepewnych.

§ 5.

Po tém wyboczeniu przystępujemy do przypadku, w którym błędy są zdarzeniami do pewnego stopnia zależnemi, t. t. w którym kąty (μ, ν) są ostre. Zauważmy, że kwadrat wynikowej błędów jest, jako funkcya tych błędów, formą stopnia drugiego, którą można sprowadzić do sumy samych kwadratów. Wykonywając to wiadomym sposobem, [1] za pomocą przekształcenia prostokątnego, znajdziemy:

$$\varrho_n^2 = \sum_\mu \sum_\nu u_\mu u_\nu \cos(\mu, \nu) = \sum_\lambda s_\lambda v_\lambda^2,$$

$$(\lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

gdzie

$$v_\lambda = \sum_\mu a_{\mu,\lambda} u_\mu,$$

a spółczynniki $s_\lambda > o$ i $a_{\mu,\lambda}$ otrzymują się z równań

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{l} a_{1,\lambda}(1-s_\lambda) + a_{2,\lambda}\cos(1,2) + \ldots + a_{n,\lambda}\cos(1,n) = 0, \\ a_{1,\lambda}\cos(2,1) + a_{2,\lambda}(1-s_\lambda) + \ldots + a_{n,\lambda}\cos(2,n) = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{1,\lambda}\cos(n,1) + a_{2,\lambda}\cos(n,2) + \ldots + a_{n,\lambda}(1-s_\lambda) = 0 \\ \qquad a_{1,\lambda}^2 + a_{2,\lambda}^2 + \ldots + a_{n,\lambda}^2 = 1 \end{array}\right.$$

Skoro w ten sposób kwadrat promienia wodzącego jest sumą kwadratów współrzędnych prostokątnych $\sqrt{s_\lambda}\, v_\lambda$, można je uważać jako zdarzenia niezależne (§ 3), a więc jako błędy do których stosuje się prawo Gaussa, a mianowicie: że prawdopodobieństwo popełnienia błędu $\sqrt{s}\, v$ wyraża się za pomocą wzoru

$$p = \left(\frac{as}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-asv^2} \partial v,$$

[1]) Wł. Zajączkowski. Geometr. Analitycz. str. 75.

rozumiejąc przez a stałą dodatną. Wskutek tego, i z uwagi, że $s_1 s_2 \ldots s_n = k_n^2$, a $\partial v_1 \partial v_2 \ldots \partial v_n = \partial u_1 \partial u_2 \ldots \partial u_n$, wyrażenie (1) przyjmie postać

$$(5) \qquad P = k_n \left(\frac{a}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-a\varrho_n^2} \partial u_1 \partial u_2 \ldots \partial u_n,$$

gdzie

$$(6) \qquad \varrho_n^2 = \sum_\mu \sum_\nu u_\mu u_\nu \cos(\mu, \nu).$$

Formułę (5) otrzymać również można wprost z (1), nie posiłkując się przekształceniem wyrażenia ogólnego ϱ_n^2 (6) na sumę samych kwadratów, ale opierając się tylko na wynikach § 3. Jakoż, w przypadku niezależności błędów mamy, na mocy formuły (3) tegoż §:

$$f(\varrho_n^2) = \left(\frac{a}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-a\varrho_n^2};$$

że zaś zakładając wszystkie zmienne równemi zeru, z wyjątkiem jednéj u_μ, sprowadzamy $f(\varrho_n^2)$ do $f(u_\mu^2)$, niezależnie od wartości dostaw $\cos(\mu, \nu)$; przeto prawa strona powyższego równania wyobraża funkcyą $f(\varrho_n^2)$ w przypadku także ogólnym.

Poznajmy teraz wyniki, do których formuła (5) prowadzi.

§ 6.

Dla $n = 1$, mamy $k_1 = 1$, $\varrho_1^2 = u_1^2$; zatem według formuły (5), prawdopodobieństwo błędu pierwszego, które oznaczymy przez p_1, podlega prawu G a u s s a (3), a mianowicie:

$$p_1 = \left(\frac{a}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-a u_1^2} \partial u_1$$

wynik łatwy zresztą do przewidzenia wprost.

Aby znaleść wyrażenie prawdopodobieństwa błędu z kolei m-go, podstawmy w formule (5): $n = m$ i $n = m - 1$, i podzielmy wynik podstawienia pierwszego przez wynik podstawienia drugiego. Stąd powstanie iloraz

$$p_m = \frac{k_m}{k_{m-1}} \left(\frac{a}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-a(\varrho_m^2 - \varrho_{m-1}^2)} \partial u_m,$$

w którym

$$\varrho_m^2 - \varrho_{m-1}^2 = u_m^2 + 2 u_m \sum_1^{m-1} u_\mu \cos(\mu, m),$$

i który wyraża prawdopodobieństwo błędu m-go, w założeniu, że go poprzedziły błędy $u_1, u_2, \ldots u_{m-1}$ w oznaczonym porządku. To prawdopodobieństwo nie jest funkcyą błędu u_m parzystą, ani nie zależy w sposób parzysty od błędów poprzedzających.

§ 7.

Według oznaczeń § 1, mamy $u_\mu = x - x_\mu$; zatém równanie (6) daje się przedstawić tak:

$$(7) \qquad \varrho_n^2 = \sum_\mu \sum_\nu (x - x_\mu)(x - x_\nu) \cos(\mu, \nu).$$

Na mocy wyrażenia prawdopodobieństwa P (5), wartość niewiadomej x najprawdopodobniejsza, zadość czynić powinna warunkowi

$$\sum_\mu \sum_\nu (x - x_\mu)(x - x_\nu) \cos(\mu, \nu) = Minimum,$$

z którego wynika

$$(8) \qquad x = \frac{\sum_\mu \sum_\nu x_\mu \cos(\mu, \nu)}{\sum_\mu \sum_\nu \cos(\mu, \nu)}$$

Uwzględniając tę wartość x w wyrażeniu (5), znajdziemy:

$$(9) \qquad max.\ P = k_n \left(\frac{a}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-a\, min.\, \varrho_n^2} \partial u_1 \partial u_2 \ldots \partial u_n$$

§ 8.

Napiszmy równanie (7) pod postacią

$$\varrho_n^2 = \sum_\mu \sum_\nu (x - \bar{x} + \bar{x} - x_\mu)(x - \bar{x} + \bar{x} - x_\nu) \cos(\mu, \nu),$$

rozumiejąc przez $\bar{x}$ ilość dowolną, i wykonajmy mnożenie względem wyrazów $x - \bar{x}$, $\bar{x} - x_\mu$ i $\bar{x} - x_\nu$; wówczas znajdziemy:

$$(10) \qquad \varrho_n^2 = (x - \bar{x})^2 \sum_\mu \sum_\nu \cos(\mu, \nu) + 2(x - \bar{x}) \sum_\mu \sum_\nu (\bar{x} - x_\mu) \cos(\mu, \nu)$$
$$+ \sum_\mu \sum_\nu (\bar{x} - x_\mu)(\bar{x} - x_\nu) \cos(\mu, \nu).$$

Dobierając następnie $\bar{x}$ w ten sposób, aby było

$$(11) \qquad \sum_\mu \sum_\nu (\bar{x} - x_u) \cos(\mu, \nu) = 0$$

i kładąc dla krótkości $x - \bar{x} = \varepsilon$, otrzymamy z (10) równanie

$$\varrho_n^2 = \sum_\mu \sum_\nu (\bar{x} - x_\mu)(\bar{x} - x_\nu) \cos(\mu, \nu) + \sum_\mu \sum_\nu \cos(\mu, \nu) . \varepsilon^2, \tag{12}$$

w którém

$$\bar{x} = \frac{\sum_\mu \sum_\nu x_\mu \cos(\mu, \nu)}{\sum_\mu \sum_\nu \cos(\mu, \nu)} \tag{13}$$

jest, według (8), wartością niewiadoméj najprawdopodobniejszą, a ε oznacza błąd popełniony wówczas, gdy tę wartość $\bar{x}$ przypisujemy niewiadoméj.

Na mocy równania (12) zdarzenie popełnienia n błędów

$$x - x_1, x - x_2, \ldots, x - x_n$$

rozłożyć się daje na dwa zdarzenia niezależne, a mianowicie: jedno, złożone z $n-1$ zdarzeń — popełnienia wprawdzie n błędów:

$$\bar{x} - x_1, \bar{x} - x_2, \ldots, \bar{x} - x_n,$$

ale zadość czyniących związkowi (11), i drugie proste — popełnienia jednego błędu: $(\sum_\mu \sum_\nu \cos(\mu \nu))^{1/2} \varepsilon$. Otóż prawdopodobieństwo zdarzenia drugiego, jako niezależnego od pierwszego, podlega oczywiście prawu Gaussa (3); zatém posiada postać

$$p_\varepsilon = \left(\frac{\alpha}{\pi} \sum_\mu \sum_\nu \cos(\mu, \nu)\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\alpha \sum_\mu \sum_\nu \cos(\mu, \nu) . \varepsilon^2} \partial\varepsilon, \tag{14}$$

i wyraża właściwie prawdopodobieństwo, że przypisując niewiadoméj wartość $\bar{x}$, *popełniamy błąd* ε.

Gdy $\varepsilon = o$, p_ε osiąga maximum $= \sqrt{\alpha \sum_\mu \sum_\nu \cos(\mu, \nu)} . \partial\varepsilon / \sqrt{\pi}$; więc miara $\bar{x}$ jest najprawdopodobniejsza, i tém prawdopodobniejsza, im więcéj razy wielkość x mierzymy, albowiem $max.\ p_\varepsilon$ rośnie z liczbą dostrzeżeń.

§ 9.

Do formuł (8), (9) i (14) wchodzi nadto $1 + n(n-1)/2$ stałych α i $\cos(\mu, \nu)$, których dotąd nie znamy, a które jednak wyznaczyć należy, jeśli z pomienionych formuł chcemy wyciągnąć wnioski pozytywne. W tym celu przypuśćmy, że możliwie wyborny dostrzegacz ma do czynienia z możliwie doskonałém narzędziem; wówczas prawdopodobieństwo popełnienia układu najprawdopodobniejszych błędów, t. j. $max.\ P$ (9) powinno być również największą ze względu na dostrzegacza i narzędzie w porównaniu z gorszemi, a tém samém ze względu na wartości stałych α i $\cos(\mu, \nu)$, które od zręczności jednego i dokładności drugiego zależą. Różniczkując więc wyrażenie $max\ P$ względem α i $\cos(\mu, \nu)$, otrzymamy warunek téj największości konieczny:

$$d\ max\ P = 0, \tag{15}$$

który, jeśli między α i $\cos(\mu, \nu)$ żadne już inne związki nie zachodzą, spełnia się przy wszelkich wartościach przyrostów $\partial\alpha$ i $\partial \cos(\mu, \nu)$ i prowadzi do tyluż równań, ile jest niewiadomych, t. j. do $1 + n(n-1)/2$ równań.

Atoli między kątami (μ, ν) mogą zachodzić pewne związki, które, jeśli są, powinny być w warunku (15) uwzględnione. Pod tym względem zasługuje na uwagę ważny dla naszego zadania przypadek, godzien szczegółowego rozbioru.

§ 10.

Przyjmijmy zręczność dostrzegacza i dokładność narzędzia za doskonałe bezwzględnie; wówczas przedewszystkiem każdy błąd będzie zdarzeniem jednakowo zależném od każdego z poprzedzających, [1]) t. j., wszystkie kąty (μ, ν) będą sobie równe i równe np. θ. Odpowiednio do tego założenia, formuły (13), (9) i (14) przyjmą postaci:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_\mu x_\mu, \tag{16}$$

$$max.\ P = (1 - \cos\theta)^{\frac{n-1}{2}} (1 + (n-1)\cos\theta)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\alpha(1-\cos\theta)\varrho^2} \partial u_1 \partial u_2 \ldots \partial u_n \tag{17}$$

$$\text{gdzie } \varrho^2 = \sum (\bar{x} - x_\mu)^2,$$

$$p_\varepsilon = \left(\frac{\alpha n (1 + (n-1)\cos\theta)}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\alpha n (1 + (n-1)\cos\theta) . \varepsilon^2} \partial\varepsilon. \tag{18}$$

Stosownie do wyrażenia (17), warunek (15) przedstawia się w przypadku obecnym tak:

---

[1]) Jeżeli zamiast gałek różnokolorowych, umieścimy w urnie gałki z odpowiedniemi napisami wielkości błędów, nie wyłączając ujemnych i równych zeru, to losując po jednéj gałce, bez wrzucenia wyciągniętych napowrót, mielibyśmy przykład szeregu błędów, jako zdarzeń jednostajnie zależnych.

$$d\,max.\,P = max.\,P\left\{\left(a\varrho^2 - \frac{n\,(n-1)\cos\theta}{2\,(1-\cos\theta)\,(1+(n-1)\cos\theta)}\right)\partial\cos\theta\right.$$
$$\left.+\left(\frac{n}{2a} - (1-\cos\theta)\,\varrho^2\right)\partial a\right\} = 0,$$

i prowadzi do równań następujących:

$$(19)\qquad \frac{\varrho^2}{n} = \frac{1}{2a\,(1-\cos\theta)}\,,\quad 1+(n-1)\cos\theta = (n-1)\cos\theta\,.$$

Z równań tych okazuje się, że stałe a i $\cos\theta$, odpowiadające wybornemu dostrzegaczowi i doskonałemu narzędziu, wyznaczyć się dają tylko przy nieskończenie wielkiéj liczbie dostrzeżeń, i to, jak dotąd, niezupełnie; równanie bowiem drugie (19) prowadzi do wartości $\cos\theta$ nieoznaczonéj, a równanie pierwsze (19) daje zaledwie iloczyn $a\,(1-\cos\theta)$, gdy obliczyliśmy przedtém, przy uwzględnieniu formuły (16), wyrażenie:

$$\frac{\varrho^2}{n} = \frac{1}{n}\sum_{\mu}(\bar{x}-x_\mu)^2,$$

z nieskończenie wielu danych dostrzegalnych. Pozostaje zatém, opierając się na tych samych danych, wyznaczyć jednęz dwóch stałych, a lub $\cos\theta$, co właśnie zamierzamy uczynić. Wprzódy jednak poświęcimy § następujący rozbiorowi przypadku, w którym błędy występują jako zdarzenia maksymalnie zależne.

§ 11.

G a u s s, przyjmując prawo średniéj arytmetycznéj za przybliżone, w przypadku liczby dostrzeżeń skończonéj, postawił domyślnie, jako zasadę naczelną, że, w razie liczby dostrzeżeń nieskończenie wielkiéj, prawo to jest ścisłe. O ile mi wszakże wiadomo, poglądu tego nie usiłowano nawet uzasadniać, a tém mniéj określić warunków, pod którémi można go uważać za prawdziwy. Sprobujemy to uzasadnienie zrobić.

Załóżmy, żeśmy przyczyny błędów pewne całkiem usunęli; wówczas, jeśli błędy powstawać jeszcze mogą, to jedynie pod wpływem przyczyn niepewnych, jako zdarzenia maksymalnie zależne (§ 4), którym odpowiadają kąty $(\mu,\nu) = 0$. Ponieważ w tych warunkach wyznacznik $k_n = 0$, przeto formuła (5) nie może być w przypadku obecnym wzięta za punkt wyjścia. Należy zatém uciec się do innego sposobu oznaczenia najprawdopodobniejszéj miary i jéj prawdopodobieństwa.

Podobnie jak zrobiliśmy w § 5, zastosujmy do kwadratu wynikowéj błędów, który obecnie ma postać:

$$\varrho_n^2 = \sum_\mu\sum_\nu u_\mu\,u_\nu,$$

przekształcenie prostokątne, i przytém takie, aby było

$$\left.\begin{aligned}\sum_\mu\sum_\nu u_\mu\,u_\nu &= \sum_\lambda s_\lambda\,v_\lambda^2,\\ v_\lambda &= \sum_\mu a_{\mu,\lambda}\,u_\mu\end{aligned}\right\}\qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

Na mocy równań (4) § 5 współczynniki s_λ i $a_{\mu,\lambda}$ otrzymują się w tym przypadku z równań

$$\begin{aligned}
a_{1,\lambda}\,(1-s_\lambda) + a \quad + \ldots + a_{n,\lambda} &= 0\,,\\
a_{1,\lambda} + a_{2,\lambda}\,(1-s_\lambda) + \ldots + a_{n,\lambda} &= 0\,,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
a_{1,\lambda} + a_{2\,\lambda} + \ldots + a_{n,\lambda}\,(1-s_\lambda) &= 0\,,\\
a_{1,\lambda}^2 + a_{2,\lambda}^2 + \ldots + a_{n,\lambda}^2 &= 1,
\end{aligned}$$

z których łatwo znajdujemy:

$$s_\lambda = 0,\ a_{\mu,\lambda} = 0/0,\qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n-1)$$
$$s_n = n,\quad a_{\mu,n} = 1/\sqrt{n},$$

a tém samém

$$\sqrt{s_\lambda}\,v_\lambda = 0\,,\ \sqrt{s_n}\,v_n = \sum_1^n u_\mu\,.$$

W ten sposób układ błędów

$$u_1, u_2, \ldots, u_n,$$

jako zdarzeń maksymalnie zależnych, daje się zastąpić układem tyluż błędów

$$0, 0, \ldots, \sum_1^n u_\mu,$$

jako zdarzeń niezależnych. Wychodzi zatém na to samo, jak gdybyśmy, robiąc n dostrzeżeń kolejnych, popełnili błąd tylko jeden: $\sum_1^n u_\mu$, przy dostrzeżeniu n—ém. Skoro więc błąd $\sum_1^n u_\mu$ jest poprzedzony $n-1$ błędami równemi zeru, prawdopodobieństwo popełnienia go, jako różnego od zera, wynosi $1/(n+1)$, a prawdopodobieństwo popełnienia go, jako równego zeru, wynosi $n/(n+1)$. Że zaś dla $n=\infty$ prawdopodobieństwo pierwsze staje się zerem, a drugie — jednością, przeto nierówność $\sum\limits_1^\infty u_\mu \lesseqgtr 0$ jest niemożliwa, a równość $\sum\limits_1^\infty u_\mu = 0$ jest konieczna. Możemy więc wypowiedzieć zasadę Gaussa, jako już dowiedzioną:

Średnia arytmetyczna nieskończenie wielu miar dostrzegalnych jest miarą prawdziwą wielkości mierzonéj, ale pod warunkiem, że przyczyny błędów pewne zostały usunięte, t. j. że błędy są zdarzeniami maksymalnie zależnemi.

Nieskończenie wielu dostrzeżeń dokonać oczywiście niepodobna; zatém musimy poprzestawać zawsze na n dostrzeżeniach, t. j. średnią arytmetyczną miar dostrzegalnych, nawet po usunięciu przyczyn pewnych popełniania błędów, uważać jako miarę tylko przybliżoną wielkości nieznanéj; albowiem prawdopodobieństwo dokładności téj miary, t. j. $n/(n+1)$, rośnie wprawdzie z liczbą n, ale jest zawsze mniejsze od jedności. Stąd wynika zasada następująca:

Choćbyśmy usunęli wszystkie przyczyny popełniania błędów — pewne, nie usuniemy wszakże ich przyczyn niepewnych, od wpływu których zabezpieczyć się już nie można.

§ 12.

Równania (19) wyrażają związki najprawdopodobniejsze między *błędem średnim* (tak nazywa się $\sqrt{\varrho^2/n}$), *wagą* (tak nazywa się $\sqrt{a}$), *miarą zależności* (tak nazywać będziemy cos θ) i liczbą dostrzeżeń ($n=\infty$). Załóżmy $\varrho^2/n = \bar{\varrho}^2$ i uwzględnijmy związki (19) w wyrażeniach (17) i (18), rugując z jednego i drugiego a, i kładąc w (18) $\varepsilon=0$; wówczas znajdziemy:

$$\text{(20)} \qquad max.\ P = \left(\frac{n-1}{(2\pi e\bar{\varrho}^2)^n}\cdot\frac{\cos\theta}{1-\cos\theta}\right)^{\frac{1}{2}} \partial u_1\,\partial u_2 \ldots \partial u_n\,,$$

$$\text{(21)} \qquad p_{\varepsilon=0} = \left(\frac{n\,(n-1)}{2\,\pi\,\bar{\varrho}^2}\cdot\frac{\cos\theta}{1-\cos\theta}\right)^{\frac{1}{2}} \partial\varepsilon\,,$$

Łatwo jest zauważyć, że $max.\ P$ rośnie, gdy kąt θ maleje, i że osiąga wartość największą przy $\theta=0$. Przyjmując zatém kąt θ równy nieskończenie małemu $\partial\theta$, t. j. zakładając

$$\cos\theta = 1 - \partial\theta^2/2,$$

dla prawdopodobieństwa (20) osiągniemy wartość największą, następującą:

$$\text{(22)} \qquad max.^2\,P = \frac{\sqrt{2}}{\partial\theta}\left(\frac{n-1}{(2\pi e\bar{\varrho}^2)^n}\right)^{\frac{1}{2}} \partial u_1\,\partial u_2 \ldots \partial u_n\,.$$

gdzie $max.^2\,P$ oznacza, że na P wzięte było dwa razy maximum: raz względem x, drugi raz względem a i cos θ.

Dla téj samej przyczyny osiągnie jednocześnie wartość największą prawdopodobieństwo $p_{\varepsilon=0}$ (21), która to wartość, na mocy wyniku § poprzedzającego, powinna się równać jedności. Będzie więc odpowiednio:

$$\text{(23)} \qquad max.\ p_{\varepsilon=0} = \left(\frac{n\,(n-1)}{2\,\pi\,\bar{\varrho}^2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{2}\,\partial\varepsilon}{\partial\theta} = 1.$$

A ponieważ w ten sposób wartość niewiadoméj najprawdopodobniejsza staje się prawdziwą, przeto układ błędów jest również prawdziwy t. j.

$$max.^2\,P = 1.$$

Stąd wynika twierdzenie następujące:

Dla zręcznego bezwzględnie dostrzegacza, który ma do czynienia z równie dokładném narzędziem, błędy są zdarzeniami maksymalnie zależnemi.

W twierdzeniu tém mamy nowe uzasadnienie myśli, wypowiedzianéj na końcu § 4, że zależność zdarzeń maksymalna następuje dopiero wtedy, gdy ich przyczyny pewne są usunięte; skoro bowiem wyborny dostrzegacz ma do czynienia z doskonałém narzędziem, to nie mamy powodu przypuszczać, że przyczyny pewne popełniania błędów jeszcze istnieją.

Tymczasem dotąd sądzono wprost przeciwnie, t. j. mniemano, jakoby wybornemu dostrzegaczowi, mającemu do czynienia z doskonałém narzędziem, odpowiadały błędy niezależne; co według równania (20) jest niemożliwe. Niezależność błędów możliwą więc jest tylko wówczas, gdy niezręczny dostrzegacz ma do czynienia z niedoskonałém narzędziem, t. j. gdy przyczyny pewne popełniania błędów istnieją.

W naturze jednak żaden z przypadków skrajnych wogóle się nie zdarza, ale przeciwnie, trafiają się zapewne najczęściéj przypadki pośrednie, jak względnie zręczni dostrzegacze i względnie doskonałe narzędzia. Stosownie do tego, najważniéjszym jest przypadek zależności błędów niejednostajnéj, któremu odpowiada warunek ogólny (15), § 9. Wartość najprawdopodobniejsza niewiadoméj nie jest już wtedy średnią arytmetyczną miar dostrzegalnych, ale posiada wyrażenie (13), zależne od n (n—1/2 stałych cos (μ,ν), zadość czyniących temuż warunkowi (15) i przywodzących $max.\ P$ (9) do największości.

Rozwijając warunek (15), otrzymujemy jedno równanie następujące:

$$\text{(24)} \qquad 2\,a\sum_\mu\sum_\nu(\bar{x}-x_\mu)\,(\bar{x}-x_\nu)\cos\,(\mu,\nu) = n,$$

i $n\,(n-1)/2$ równań, postaci:

icm©

$$(25) \qquad \frac{\partial k_n}{\partial \cos(\mu, \nu)} - 2\,a\,k_n\,(\bar{x} - x_\mu)\,(\bar{x} - x_\nu) = 0\,,$$

rozumiejąc przez $\bar{x}$ wyrażenie (13); są to równania w liczbie wystarczającéj do oznaczenia wartości a i wszystkich $\cos(\mu, \nu)$. Równania te mają wogóle wiele rozwiązań, ale z pomiędzy tych wielu należy wybrać jedno, które sprowadza *max.* P do największości bezwzględnéj.

Stąd widzimy, że rozwiązanie zadania Gaussa, w przypadku najogólniéjszym, przywodzi się do rozwiązania układu $1 + n(n-1)/2$ równań algebraicznych (24) i (25).

Warszawa, w maju 1891.

O DOWODZIE PRAWA GAUSS'A. [1]

PRZEZ

C. RUSJANA.

W Tomie II-im „Prac matematyczno-fizycznych" zamieszczony został artykuł p. Gosiewskiego o prawie Gaussa, dotyczącém błędów przypadkowych. Autor wyraża nadzieję, że podany przezeń dowód tego prawa jest zupełnie poprawny; mnie wydaje się on mylnym, tak ze względu na równanie zasadnicze, na którém się opiera, jako też ze względu na sposób, w jaki z równania tego wyprowadzone zostały wnioski.

Tok rozumowań autora jest taki:

Jeżeli $(x-a_1), (x-a_2), \ldots (x-a_n)$ są błędy dostrzeżenia niewiadoméj x, $\varphi_\mu\,(x-a_\mu)$ zaś prawdopodobieństwo błędu $x-a_\mu$, to

$$P = \varphi_1\,(x-a_1)\,.\,\varphi_2\,(x-a_2)\,, \ldots \varphi_n\,(x-a_n)$$

jest prawdopodobieństwem układu błędów: $(x-a_1), (x-a_2), \ldots (x-a_n)$, popełnionych przy n dostrzeżeniach. Dalej uważa autor, że P jest także prawdopodobieństwem osiągnięcia summy $(x-a_1) + (x-a_2) + \ldots + (x-a_n)$. Kładąc

$$n\varepsilon = (x-a_1) + (x-a_2) + \ldots + (x-a_n)\,,$$

znajduje, że

$$[\psi\,(\varepsilon)]^n$$

jest prawdopodobieństwem otrzymania summy $n\varepsilon$, jeżeli $\psi\,(\varepsilon)$ jest prawdopodobieństwem popełnienia błędu ε.

Według autora, równanie

[1]) Porówn. artykuł poprzedzający.