nach skupienia obok siebie tylko przy pewnéj oznaczonéj temperaturze. Z tego przykładu najlepiéj można się przekonać o jasności i dokładności metody Plancka. W ten sam zupełnie sposób rozwija on teoryą dysocyacyi i rozcieńczonych roztworów solnych.

Zastanawiając się nad pracami Plancka, nabywamy przekonania, że ważną ich zaletą jest nadzwyczajna prostota metody; prace te przyczyniły się w znacznym stopniu do tego, że pojęcie entropii i zasada zwiększania się jéj coraz głębiéj zaczynają przenikać przez cały obszar umiejętności fizycznych.

O ODBICIU I ZAŁAMANIU ŚWIATŁA.

TEORYA Sir WILLIAMA THOMSONA.

PRZEZ

WŁ. GOSIEWSKIEGO i WŁ. NATANSONA.

We wzorze na pracę, zużywaną na odkształcanie się jednostki objętości ośrodka izotropowego, występują dwa współczynniki, które wyrażają zasadnicze własności dynamiczne ośrodka. Jednym z pomiędzy nich opatrzone są wyrazy, odpowiadające zmianie objętości elementu; drugim — wyrazy, odpowiadające obracaniu się elementu. Za przykładem Greena, oznaczamy te współczynniki przez A i przez B.

Wiadomo, że wartości A i B są proporcyonalne odpowiednio do kwadratów prędkości rozchodzenia się w ośródku fali podłużnéj i fali poprzecznéj. Lecz w teoryach optycznych mamy do czynienia li tylko z falami poprzecznemi; od fal podłużnych należy się zatém uwolnić, zakładając, że A, a zatém i prędkość fali podłużnéj, jest niezmiernie małą; lub też, że jest niezmiernie wielką. Tymczasem, według Greena, założenie, że A jest niezmiernie małą, nie zapewnia ośrodkowi równowagi stałéj w jego stanie naturalnym, a zatém nie może być przyjęte. Nierówność

$$A > \frac{4}{3} B$$

jest, według Greena, warunkiem koniecznym i dostatecznym, ażeby ośrodek okazywał własność sprężystości doskonałéj. Nie pozostaje przeto nic innego, powiada Green, jak tylko przypuścić, iż współczynnik A jest nieskończenie wielkim. Lecz teorya Greena doprowadza do formuł, niezgodnych z doświadczeniem. Tym sposobem teorye, które zdawały się zadawalająco odpowiadać rzeczywistości (jak np. Cauchy'ego, który czynił A ujemną), były pozbawione podstawy dynamicznéj; uzasadniona zaś teorya Greena prowadziła do sprzeczności, których nie usunęły badania Greena, ani Haughtona (1853), ani Lorda Rayleigh (1871). W roku 1888-ym ogłoszona rozprawa Sir Williama Thomsona[1]) rzuca nowe światło na cały ten przedmiot. Sir William Thomson wykazuje, że warunek $A > \frac{4}{3} B$ nie jest koniecznym dla sprężystości doskonałéj ośrodka, *jeżeli ośrodek ten rozciąga się do nieskończoności, lub téż jest ograniczony powierzchnią niezmienną*. Wówczas warunki konieczne i dostateczne sprężystości doskonałéj wymagają tylko, ażeby A i B nie były ujemne. A zatém można przyjąć dla teoryi światła, że $A = 0$, nie zaś $A = \infty$.

W dalszym ciągu swéj pracy Sir W. Thomson wyznacza stosunek amplitudy drgania w fali padającéj do amplitudy w fali odbitéj; 1) w przypadku światła spolaryzowanego w płaszczyźnie prostopadłéj do płaszczyzny padania; 2) w przypadku światła spolaryzowanego w płaszczyźnie padania. Stąd, i w przypuszczeniu, iż $A = 0$, wynikają prawa Fresnela co do stosunku amplitud drgania w falach padającéj i odbitéj; prawa zaś Fresnela nie posiadały dotychczas właściwéj podstawy teoretycznéj. Niektóre dalsze wyniki czytelnik będzie mógł ocenić z saméj rozprawy, którą podajemy poniżéj w prawie dosłownym przekładzie, opatrując ją jedynie objaśniającemi uwagami w miejscach, które zdają się nastręczać trudności. Uwagi te pomieszczono w prostokątnych nawiasach ([ ])

1. Rozpocznijmy od przytoczenia znanego wzoru Greena[2]) na pracę W, którą należy wykonać na jednostkę objętości ciała sprężystego izotropowego, ażeby, wychodząc ze stanu równowagi naturalnéj, wprowadzić ciało w stan taki, iż dawny punkt (x, y, z) mieści się w miejscu $(x+u, y+v, z+w)$. Wielkości u, v, w są funkcyami x, y, z takiemi, iż pochodne du/dx, du/dy, ..., dw/dz są nieskończenie małe. Wzór Greena ma postać następującą:

$$W = \frac{1}{2}\left\{A\left[\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right)^2 + B\left[\left(\frac{dw}{dy}+\frac{dv}{dz}\right)^2+\left(\frac{du}{dz}+\frac{dw}{dx}\right)^2+\left(\frac{dv}{dx}+\frac{du}{dy}\right)^2\right]\right.\right.$$
$$\left. - 4B\left(\frac{dv}{dy}\frac{dw}{dz}+\frac{dw}{dz}\frac{du}{dx}+\frac{du}{dx}\frac{dv}{dy}\right)\right\} \tag{1}$$

[W rozdziale XVII-ym „Mechaniki teoretycznéj" J. N. Frankego czytelnik znajdzie dostateczne przygotowanie do otrzymania bez trudności wzoru Greena pod przytoczoną tu postacią. Wiadomo zresztą, że w każdym

[1]) Philosophical Magazine, Vol. XXVI, p. 414, 500. (1888).

[2]) Green's Collected Papers, p. 253

punkcie ciała istnieją trzy, wzajemnie do siebie prostopadłe kierunki, które mają następującą własność: jeśli schodzą się z niemi krawędzie elementu $dx\, dy\, dz$, wówczas element tylko w tych kierunkach doznaje wydłużeń, lub skróceń, stanowiących pierwiastki $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, równania

$$\omega^3 - L\,\omega^2 + M\,\omega - N = 0\,.$$

Oznaczamy tu:

$$L = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = \frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz},$$

$$M = \omega_2\,\omega_3 + \omega_3\,\omega_1 + \omega_1\,\omega_2 = \frac{dv}{dy}\frac{dw}{dz}+\frac{dw}{dz}\frac{du}{dx}+\frac{du}{dx}\frac{dv}{dy}$$
$$-\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}\right)^2+\left(\frac{dw}{dx}+\frac{du}{dz}\right)^2+\left(\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}\right)^2\right\},$$

$$N = \omega_1\,\omega_2\,\omega_3 = \frac{du}{dx}\frac{dv}{dy}\frac{dw}{dz}+\frac{1}{4}\left(\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}\right)\left(\frac{dw}{dx}+\frac{du}{dz}\right)\left(\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}\right)$$
$$-\frac{1}{4}\left\{\frac{du}{dx}\left(\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}\right)^2+\frac{dv}{dy}\left(\frac{dw}{dx}+\frac{du}{dz}\right)^2+\frac{dw}{dz}\left(\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}\right)^2\right\}.$$

Ponieważ L, M, N od położenia osi nie zależą, przeto W dla ciała izotropowego może być jedynie zależną od L, M, N; a ponieważ w tym przypadku W jest funkcyą jednorodną stopnia drugiego pochodnych du/dx, ... $(du/dy + dv/dx)$, przeto W może mieć postać

$$W = \frac{1}{2}\,(A\,L^2 - 4\,BM)$$

zgodnie z równaniem powyższém (1)]

2. Znajdźmy całkowitą pracę, potrzebną do wprawienia ciała w stan uważany. W tym celu powinniśmy utworzyć całkę $\iiint dx\,dy\,dz\; W$, rozciągając ją do całéj objętości naczynia sztywnego, w którém ciało jest zawarte. Uważajmy przedewszystkiém wiersz ostatni we wzorze (1) i całkujmy go dwa razy z kolei, zakładając, na granicy $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$. Otrzymamy

$$\iiint dx\,dy\,dz\left(\frac{dv}{dz}\frac{dw}{dy}+\frac{dw}{dx}\frac{du}{dz}+\frac{du}{dy}\frac{\partial v}{dx}\right) \tag{1a}$$

[Istotnie: weźmy np. wyraz $\iiint dx\,dy\,dz\,\frac{dv}{dy}\frac{dw}{dz}$. Całkując przez części, najprzód względem z, otrzymamy

$$\iint dx\, dy \Big| \frac{dv}{dy}\, w - \iiint dx\, dy\, dz\, \frac{d^2 v}{dy\, dz}\, w\,,$$

gdzie wyraz pierwszy rozciąga się do powierzchni ciała, a zatém równa się zeru, stosownie do założeń. Całkując wyraz drugi przez części względem y i opuszczając wyraz, rozciągający się do powierzchni, który znowuż i z téj samėj przyczyny, jest równy zeru, otrzymamy

$$\iiint dx\, dy\, dz\, \frac{dv}{dz}\frac{dw}{dy}\,,$$

i podobnież przerobimy pozostałe wyrazy.]

Mnożąc (1a) przez $-4B$ i dodając do pozostałych wyrazów w całce $\iiint dx\, dy\, dz\, W$, otrzymamy ostatecznie

$$W = \frac{1}{2}\iiint dx\, dy\, dz\, \Big\{ A\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right)^2 + B\left[\left(\frac{dw}{dy}-\frac{dv}{dz}\right)^2+\left(\frac{du}{dz}-\frac{dw}{dx}\right)^2+\left(\frac{dv}{dx}-\frac{du}{dy}\right)^2\right]\Big\} \tag{2}$$

Ze wzoru (2) wynika, że potrzeba pracy *dodatniéj* do wprowadzenia ciała w stan (u, v, w), jeżeli początkowo było w stanie równowagi naturalnéj; że przeto stan równowagi naturalnéj jest stanem równowagi trwałéj, jeżeli tylko A i B są dodatniemi (choćby bardzo małemi) wielkościami.

3. Jeżeli $A = 0$, jak będziemy zakładali, stosując wzory do zadania optycznego, wówczas *nie potrzeba* pracy mechanicznéj, ażeby wywołać nieskończenie małe *bezobrotowe* odkształcenie ciała [1]); na téj uwadze polega wytłomaczenie prędkości zero dla fali podłużnéj, które, jak zauważył Green, odpowiada wypadkowi $A = 0$. Dopóki jednak zagadnienia takie, jak o aberacyi światła, lub wogóle o ruchu ciał materyalnych w eterze świetlnym, nie są brane pod uwagę, dopóty można przypuszczać, że siły, proporcyonalne do trzecich potęg odkształceń, działają tak, iż czynią trwałym stan równowagi, który byłby obojętnym lub nietrwałym, gdyby żadne inne siły nie działały, jak te, które wprowadzono do wzorów (1) i (2); — t. j. jak siły, proporcyonalne do pierwszych potęg odkształceń. Jako drugie przybliżenie mielibyśmy zatém dla wypadku, gdy $A = 0$,

[1]) [We wzorze (2) należy odróżnić wyraz, mnożony przez B, który, jak widać bezpośrednio, odpowiada ruchowi obrotowemu elementu, od wyrazu, mnożonego przez A, który odpowiada rozszerzaniu się (lub kurczeniu się, wogóle zmianie objętości) elementu. Jeżeli więc odkształcenie jest bezobrotowém, wyraz, mnożony przez B, nie wchodzi.]

$$W = \frac{1}{2}\iiint dx\, dy\, dz \Big\{ B\left[\left(\frac{dw}{dy}-\frac{dv}{dz}\right)^2+\left(\frac{du}{dz}-\frac{dw}{dx}\right)^2+\left(\frac{dv}{dx}-\frac{du}{dy}\right)^2\right] + J_4 \Big\} \tag{3}$$

J_4 oznacza tu funkcyą jednorodną stopnia czwartego pochodnych $du/dx, \ldots, dw/dz$, izotropową względem (x, y, z); t. j. taką, że współczynniki, w niéj zachodzące, nie zależą od układu osi.

4. Równania ruchu w ciele sprężystém brzmią jak następuje: [1])

$$\left.\begin{aligned}
\zeta\,\frac{d^2u}{dt^2} &= \frac{dP}{dx} + \frac{dU}{dy} + \frac{dT}{dz} \\
\zeta\,\frac{d^2v}{dt^2} &= \frac{dU}{dx} + \frac{dQ}{dy} + \frac{dS}{dz} \\
\zeta\,\frac{d^2w}{dt^2} &= \frac{dT}{dx} + \frac{dS}{dy} + \frac{dR}{dz}
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Przez ζ oznaczono gęstość ciała; przez u, v, w, jak wyżéj, przemieszczenia; przez P, Q, R składowe prostopadłe natężenia (na jednostkę pola), przypadającego na ściany, prostopadłe do osi x, y, z; przez S, T, U składowe styczne natężenia według szematu następującego:

S jest natężeniem, równoległém do $\left\{ {Y \atop z} \right\}$,
przypadającém na ścianę, prostopadłą do $\left\{ {z \atop y} \right\}$;

T jest natężeniem, równoległém do $\left\{ {z \atop x} \right\}$,
przypadającém na ścianę, prostopadłą do $\left\{ {x \atop z} \right\}$;

U jest natężeniem, równoległém do ${x \atop y}$,
przypadającém na ścianę, prostopadłą do $\left\{ {y \atop x} \right\}$.

5. Oznaczajmy, jak wyżéj, przez A i B współczynniki we wzorze dla W; będziemy mieli dla ciała izotropowego

$$S = B\left(\frac{dw}{dy}+\frac{dv}{dz}\right);\quad T = B\left(\frac{du}{dz}+\frac{dw}{dx}\right);\quad U = B\left(\frac{dv}{dx}+\frac{du}{dy}\right) \tag{6}$$

$$P = A\delta - 2B\left(\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right);\quad Q = A\delta - 2B\left(\frac{dw}{dz}+\frac{du}{dx}\right);\quad R = A\delta - 2B\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}\right), \tag{7}$$

[1]) [Porównaj rozdział cytowany powyżéj w dziele J. N. Frankego.]

gdzie przyjęto oznaczenie

$$\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=\delta. \tag{8}$$

[P, Q, R, S, T, U — są odpowiednio pochodnemi częściowemi energii W (por. (1)) względem du/dx, dv/dy, dw/dz, $(dw/dy+dv/dz)$, $(du/dz+dw/dx)$, $(dv/dx+du/dy)$.]

Wprowadzając (6), (7) i (8) do (4) i pisząc dla skrócenia ∇^2 zamiast

$$\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{dy^2}+\frac{d^2}{dz^2}, \tag{11}$$

otrzymamy, jako równania ruchu:

$$\zeta\frac{d^2u}{dt^2}=(A-B)\frac{d\delta}{dx}+B\nabla^2u\,; \qquad \zeta\frac{d^2v}{dt^2}=(A-B)\frac{d\delta}{dy}+B\nabla^2v\,;$$

$$\zeta\frac{d^2w}{dt^2}=(A-B)\frac{d\delta}{dz}+B\nabla^2w \tag{9}$$

6. Różniczkując pierwsze z pomiędzy tych równań względem x, drugie względem y, trzecie względem z i dodając je do siebie, otrzymamy

$$\zeta\frac{d^2\delta}{dt^2}=A\nabla^2\delta \tag{12}$$

Symbolizujmy przez ∇^{-2} działanie odwrotne względem działania (11), tak iż $\nabla^{-2}\nabla^2x=x$; załóżmy zależności:

$$u'=u-\frac{d}{dx}\nabla^{-2}\delta\,; \quad v'=v-\frac{d}{dy}\nabla^{-2}\delta\,; \quad w'=w-\frac{d}{dz}\nabla^{-2}\delta\,, \tag{13}$$

które, nawiasowo mówiąc, wymagają, by

$$\frac{du'}{dx}+\frac{dv'}{dy}+\frac{dw'}{dz}=0. \tag{14}$$

Powracając do równań (9), znajdziemy

$$\zeta\frac{d^2u'}{dt^2}=B\nabla^2u'\,; \quad \zeta\frac{d^2v'}{dt^2}=B\nabla^2v'\,; \quad \zeta\frac{d^2w'}{dt^2}=B\nabla^2w' \tag{15}$$

Z równania (14) wynika, że przemieszczenia u', v', w' *są obrotowemi* i odpowiadają fali *poprzecznéj*, któréj prędkość, jak okazują równania (15), jest proporcyonalną do $\sqrt{B}$. Z równań zaś (13) wynika, że $u-u'$, $v-v'$, $w-w'$, jako zależne tylko od δ, są przemieszczeniami *bezobrotowemi* i odpowiadają fali *podłużnéj*, któréj prędkość, jak okazuje równanie (12), jest proporcyonalną do $\sqrt{A}$.

Składowe te $u-u'$, $v-v'$, $w-w'$, które oznaczymy przez u'', v'', w'', wyrażają się najogólniéj przez

$$u''=\frac{d\Psi}{dx}, \qquad v''=\frac{d\Psi}{dy}, \qquad w''=\frac{d\Psi}{dz}, \tag{16}$$

gdzie Ψ jest funkcyą, czyniącą zadość równaniu

$$\nabla^2\Psi=\delta. \tag{17}$$

Odbywając na równaniu (2) działanie, wskazane przez znak ∇^{-2}, znajdziemy

$$\zeta\frac{d^2\Psi}{dt^2}=A\nabla^2\Psi, \tag{18}$$

i widzimy ostatecznie, że najogólniejsze rozwiązanie równań ruchu nieskończenie małego jest zawarte w równaniach

$$u=u'+u'', \qquad v=v'+v'', \qquad w=w'+w'', \tag{19}$$

w których u', v', w' są wielkościami, czyniącemi zadość równaniom (14) i (15), zaś u'', v'', w'' — równaniom (16) i (18).

7. Rozważmy teraz zagadnienie o odbiciu i załamaniu fal pomiędzy dwiema częściami ciała sprężystego jednorodnego, stykającemi się ze sobą wzdłuż pewnéj płaszczyzny, i obdarzonemi rozmaitemi gęstościami ζ i ζ_1, rozmaitemi modułami sztywności B i B_1, wreszcie rozmaitemi wartościami A i A_1 modułu fali podłużnéj i fali poprzecznéj w jednym i w drugim ośrodku, mamy

$$\left.\begin{aligned} \alpha&=\sqrt{\frac{A}{\zeta}}, & \alpha_1&=\sqrt{\frac{A_1}{\zeta_1}}, \\ \beta&=\sqrt{\frac{B}{\zeta}}, & \beta_1&=\sqrt{\frac{B_1}{\zeta_1}}. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Dla krótkości mowy, przypuszczajmy, że płaszczyzna zetknięcia leży poziomo i nazywajmy powyższe dwa ciała sprężyste — górném i dolném. Bierzmy daléj OX pionowo w górę; OY poziomo na prawo; i niechaj promeiń pada ze strony prawéj, ukośnie, ku dołowi, tak iż, jeżeli i jest kątem padania, równanie dla czoła fali ma postać

$$x \cos i + y \sin i = \text{const.}$$

8. Uważajmy z początku wahania prostopadłe do płaszczyzny padania. Ponieważ ciało jest izotropowém, przeto na płaszczyźnie zetknięcia fale podłużne powstawać nie mogą. Tym sposobem powstaje jeden tylko promień odbity i jeden załamany; wszystkie wahania odbywają się prostopadle do płaszczyzny padania i wszystkie trzy fale są czysto-poprzecznemi falami. Fazy wszystkich trzech fal muszą również zgadzać się pomiędzy sobą w płaszczyźnie zetknięcia (t. j. przy $x = 0$). Jeżeli więc ruch falisty w ciele dolném wyrazimy przez

$$w = \sin(\omega t + l_1 x + m_1 y), \quad \text{gdzie } x \text{ jest ujemném, oraz} \tag{21}$$

$$l_1 = \frac{\omega \cos i_1}{\beta_1}, \quad m_1 = \frac{\omega \sin i_1}{\beta_1}, \tag{22}$$

gdzie i_1 jest kątem załamania, to dla ciała górnego miéć musimy

$$w = f \sin(\omega t + lx + my) + g \sin(\omega t - lx + my), \text{ gdzie } x \text{ dodatnie, zaś} \tag{23}$$

$$l = \frac{\omega \cos i}{\beta}, \quad m = \frac{\omega \sin i}{\beta}. \tag{24}$$

[W istocie: gdyby obie fale, padająca i odbita, zbliżały się do płaszczyzny zetknięcia, t. j. do płaszczyzny YZ, wówczas znaki współczynników przy y w (23) byłyby rozmaite, a przy x — jednakowe; że jednak fala odbita oddala się od płaszczyzny zetknięcia, przeto rzeczy mają się odwrotnie.]

Zgodność faz na całéj płaszczyźnie zetknięcia, t. j. dla wszelkich wartości y, przy $x = 0$, wymaga, by

$$m = m_1;$$

a zatém mamy, według (22) i (24)

$$\frac{\sin i}{\beta} = \frac{\sin i_1}{\beta_1}, \tag{25}$$

czyli „prawo załamania". Wspólnie z (22) i (24) daje ono

$$l = m \operatorname{cotg} i; \qquad l_1 = m \operatorname{cotg} i_1 \tag{26}$$

Pozostałe warunki ciągłości na płaszczyźnie zetknięcia dotyczą w i T; [1]) wynika z nich, według wzorów (6) dla T, (21) i (23),

$$f + g = 1 \quad \text{i} \quad Bl(f - g) = B_1 l_1; \tag{27}$$

skąd

$$f = \frac{Bl + B_1 l_1}{2\,Bl}; \qquad g = \frac{Bl - B_1 l_1}{2\,Bl} \tag{28}$$

$$\frac{g}{f} = \frac{Bl - B_1 l_1}{Bl + B_1 l_1} \tag{29}$$

Gdyby było $B = B_1$, równanie to przybrałoby postać

$$\frac{g}{f} = \frac{l - l_1}{l + l_1} = \frac{\operatorname{cotg} i - \operatorname{cotg} i_1}{\operatorname{cotg} i + \operatorname{cotg} i_1} = -\frac{\sin(i - i_1)}{\sin(i + i_1)}, \tag{30}$$

co jest „prawem wstaw" Fresnela.

[Porównaj „Mémoire sur la loi des modifications, que la réflexion imprime à la lumière polarisée", czytany przez Fresnela 7-go stycznia r. 1823 na posiedzeniu Akademii Nauk w Paryżu (*Oeuvres Complètes d'Aug. Fresnel*, I, 767.)]

9. W zawilszym nieco wypadku wahań, odbywających się w płaszczyźnie padania, musimy uwydatnić, że warunek ciągłości na płaszczyźnie zetknięcia dotyczy teraz dwóch składowych przemieszczeń u, v a nie jednéj w, jak poprzednio, i dwóch składowych natężenia P i U, zamiast jednéj poprzedniéj T. Mamy obecnie do czynienia z falami, zarówno podłużnemi, jak poprzecznemi; dzielimy przeto rozwiązanie równań ruchu zgodnie z (19); a jako dwuwymiarowe rozwiązanie dla (14) bierzemy

$$u' = \frac{d\phi}{dy} \qquad v' = -\frac{d\phi}{dx} \tag{31}$$

Mamy zatém

$$u = \frac{d\phi}{dy} + \frac{d\Psi}{dx}; \qquad v = -\frac{d\phi}{dx} + \frac{d\Psi}{dy}, \tag{32}$$

[1]) Wogóle w zadaniach, jak niniejsze, $u, v, w, P, Q, R, S, T, U$ uważa się za funkcye ciągłe współrzędnych x, y, z. W przypadku naszym ośrodek zrywa ciągłość na płaszczyźnie zetknięcia YZ; należy więc w równaniach (4) uwzględnić warunek, że u, v, w, P, U, T nie zrywają ciągłości, gdy przechodzimy nawskroś płaszczyznę YZ w kierunku osi X; w pozostałych kierunkach Y i Z, ciało jest z założenia jednorodne. W przypadku obecnym dwóm pierwszym równaniom (4) staje się zadosyć tożsamościowo; do równania ostatniego (4) wchodzą wielkości w i T, które, według uwagi powyższéj, nie zrywają swéj ciągłości na płaszczyźnie YZ.]

skąd, na mocy (6) i (7), wynika

$$\left.\begin{aligned} P &= 2B\frac{d^2\phi}{dx\,dy} + \left(-2B\frac{d^2}{dy^2} + A\,\nabla^2\right)\Psi \\ U &= B\left[\left(\frac{d^2}{dy^2} - \frac{d^2}{dx^2}\right)\phi + 2\,\frac{d^2\Psi}{dx\,dy}\right], \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Możemy teraz przedstawić dwie fale załamane w ciele dolném przez

$$\phi = \sin(\omega t + l_1 x + my)\,; \qquad \Psi = C_1 \sin(\omega t + \lambda_1 x + my) \tag{34}$$

a falę padającą (którą uważamy za poprzeczną) i dwie fale odbite w ciele górném przez

$$\left.\begin{aligned} \phi &= F\sin(\omega t + lx + my) + G\sin(\omega t - lx + my) \\ \Psi &= C\sin(\omega t - \lambda x + my) \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

[Dla ogólności bowiem zakładamy, że fala padająca poprzeczna wyrodzi jako odbite i załamane, fale i poprzeczne i podłużne. Z uwagi nadto, że na płaszczyźnie zetknięcia, t. j. dla $x = 0$, fazy wszystkich fal zgadzają się ze sobą dla każdéj wartości y, widzimy, że współczynniki przy y muszą być jednakowe.]

W równaniach (34) i (35) l, l_1 i m, czyniące (podobnież jak wprzódy) zadosyć równaniom (22) i (24), czynią niezależnie od tego zadosyć równaniom

$$\zeta\,\omega^2 = B\,(l^2 + m^2)\,; \qquad \zeta_1\,\omega^2 = B_1\,(l_1^2 + m^2)\,. \tag{36}$$

[które wynikają z równań (15) po wprowadzeniu do nich równań (31), (34) i (35), ze względu na funkcyą ϕ.]

Podobnież λ i λ_1 czynią zadosyć równaniom:

$$\zeta\,\omega^2 = A\,(\lambda^2 + m^2)\,; \qquad \zeta_1\,\omega^2 = A_1\,(\lambda_1^2 + m^2)\,, \tag{37}$$

[które wynikają z równania (18), po wprowadzeniu do niego równań (34) i (35) ze względu na funkcyą Ψ.]

Jeżeli przez j i j_1 oznaczymy kąty odbicia i załamania fal podłużnych, to mamy, podobnie do równań (25) i (26),

$$\frac{\sin j}{a} = \frac{\sin j_1}{a_1} = \frac{\sin i}{\beta}\,; \qquad \lambda = m\cot j\,; \qquad \lambda_1 = m\cot j_1 \tag{38}$$

10. Warunek ciągłości dla u, v, P i U na płaszczyźnie zetknięcia (zob. przypisek w § 8-ym) daje, na mocy równań (32), (33), (34) i (35), co następuje:

$$m\,(F + G) - \lambda\,C = m + \lambda_1\,C_1 \tag{39}$$

$$-\,l\,(F - G) + m\,C = -\,l_1 + m\,C_1 \tag{40}$$

$$-Blm(F-G) + [Bm^2 - \tfrac{1}{2}A(\lambda^2+m^2)[C_1 = -B_1 l_1 m + [B_1 m^2 - \tfrac{1}{2}A_1(\lambda_1^2+m^2)]C_1 \tag{41}$$

$$B\,\{(l^2 - m^2)\,(F+G) + 2\,\lambda\,m\,C\} = B_1\,(l_1^2 - m^2 - 2\lambda_1\,m\,C_1) \tag{42}$$

Rugując $(F + G)$ z (39) i (42), zaś $(F - G)$ z (40) i (41); otrzymamy dwa wzory dla C i C_1; wówczas (39) i (40) określają $(F + G)$ i $(F - G)$. Wzory, które otrzymamy, upraszczają się znakomicie, jeżeli w niniejszéj teoryi (eteru sprężystego) uczynimy toż samo założenie $B = B_1$, t. j. że moduły sztywności są jednakowe, które przyjął Green przez wzgląd na prostotę, a Lorentz i Rayleigh uznali za konieczne dla zgodności z doświadczeniem w teoryi eteru nieściśliwego. Sir W. Thomson przyjął je z początku, jako założenie upraszczające; wnet jednak okazało się, że jest ono niezbędném. Istotnie, uważajmy kulę, utworzoną z ciała sprężystego (A', B'), zanurzoną w nieskończenie rozciągłém ciele (A, B). Przypuśćmy, że powierzchnią kulistą zetknięcia rozprężyliśmy, powiększymy jéj promień z a do $a\,(1+e)$; obliczmy siłę, potrzebną do utrzymywania jéj w równowadze. Biorąc współrzędne od środka kuli, jako od początku, mamy

$$u = xe\,, \qquad v = ye\,, \qquad w = ze\,,$$

jako przemieszczenia składowe wewnątrz powierzchni. Z równań (7) znajdziemy, że natężenie (na jednostkę pola), z jakiém ciało wewnętrzne pociąga ku sobie powierzchnią kulistą, wynosi

$$3\,(A' - \tfrac{4}{3}\,B')\,e\,.$$

Mamy daléj

$$u = \frac{e\,a^3\,x}{r^3}\,, \quad v = \frac{e\,a^3\,y}{r^3}\,, \quad w = \frac{e\,a^3\,z}{r^3}\,,$$

jako składowe przemieszczenia na zewnątrz powierzchni zetknięcia, w każdém miejscu powierzchni kuli o promieniu r, współśrodkowéj z powierzchnią zetknięcia. [Przypadek analogiczny rozważa Lamé w XVI-éj lekcyi swéj „*Teoryi Sprężystości*". Według formuły (2), tamże przytoczonéj, przyrost U tego promienia wyraża się przez

$$U = cr + \frac{b}{r^2}\,,$$

gdzie c i b są stałemi, zależnemi od warunków zadania zewnętrznych, t. j. od natury ciała niezależnych. W obecnym przypadku U maleje przy wzrastaniu r i dla nieskończenie wielkich wartości promienia musi znikać; stąd $c = 0$.

Ażeby wyznaczyć stałą b, uważamy, że, dla $r = a$, mamy $U = ae$; skąd $b = a^3 e$; ostatecznie więc będzie

$$U = \frac{e\,a^3}{r^2} \tag{42a}$$

Oznaczając współrzędne dla końca promienia r przez x, y, z, znajdziemy oczywiście przytoczone dla u, v, w formuły.

Lecz U można otrzymać również, nie powołując się na wyniki Lamégo, w sposób następujący: Uważmy, że objętość powłoki, zawartéj między dwiema współśrodkowemi powierzchniami kulistemi o promieniach r i $r' > r$, wyraża się przez $4\pi\,(r'^3 - r^3)/3$; przyrost więc objętości téj powłoki będzie $4\pi\,(r'^2\,U' - r^2\,U)$. Stosunek tegoż do objętości saméj powłoki oznaczmy przez $3c$, skąd wynika

$$r'^2\,U' - r^2\,U = c\,(r'^3 - r^3).$$

Ponieważ ciało (A, B) odkształciło się jednostajnie, przeto c jest ilością stałą. Biorąc zatém r' nieskończenie blizkiém do r, otrzymamy równanie

$$d\,(r^2\,U) = c\,d\,(r^3)\,,$$

którego całką jest oczywiście

$$U = cr + \frac{b}{r^2}\,,$$

rozumiejąc przez b stałą dowolną.]

Znajdziemy teraz łatwo, że natężenie, z jakiém ciało zewnętrzne ciśnie na powierzchnią kulistą, wynosi $4\,Be$. [Istotnie, pierwsze z równań (7) napisać można pod postacią

$$P = (A - 2B)\,\delta + 2B\,\frac{du}{dx}.$$

Zważywszy, że w tym przypadku $\delta = 0$ i biorąc za oś x promień r, będziemy mieli $u = U$, a stąd

$$P = 2\,B\,\frac{dU}{dr}.$$

Podstawiając za U wartość jego (42a), i kładąc $r = a$, znajdziemy $P = -\,4\,Be$; a zatém $4\,Be$ oznacza natężenie, z jakiém ciało zewnętrzne ciśnie na powierzchnią kulistą zetknięcia.]

Suma ciśnienia skierowanego zzewnątrz na wewnątrz i ciągnienia zewnątrz na wewnątrz wynosi przeto:

$$3\,[A' + \tfrac{4}{3}\,(B - B')]\,e\,.$$

Dla równowagi trwałéj, lub co najmniéj nietrwałéj, potrzeba, ażeby $A' + \frac{4}{3}\,(B - B')$ było dodatniém, lub co najmniéj zerem. Jeżeli więc $A' = 0$, to potrzeba, ażeby $B \geqq B'$. Rozumując teraz podobnie dla kuli, utworzonéj z ciała (A, B) i zanurzonéj w ciele (A', B'), otrzymamy, że potrzeba, by $B' \geqq B$, jeżeli $A = 0$. A zatém dla trwałéj, lub nietrwałéj równowagi musimy mieć $B = B'$ przy $A = 0$ i $A' = 0$; czego dowieść należało.

[Że ten warunek jest nie tylko koniecznym, lecz i dostatecznym, wynika stąd, że B jest dodatne (§ 2).]

Powracając teraz do równań dla C, C_1, F i G, mamy z (40) i (41), przy $B = B_1$

$$A\,(\lambda^2 + m^2)\,C = A_1\,(\lambda_1^2 + m^2)\,C_1\,, \tag{43}$$

co, porównane z (37), daje

$$\zeta\,C = \zeta_1\,C_1 \tag{44}$$

Mamy daléj z równań (39) i (42) i z (37)-go

$$\frac{\lambda\,C + \lambda_1\,C_1}{m} = \frac{l_1^2 + l^2}{l^2 + m^2} = \frac{\zeta_1 - \zeta}{\zeta}\,; \tag{45}$$

skąd wynika

$$C = m\,\frac{\zeta_1\,(\zeta_1 - \zeta)}{\zeta\,(\zeta_1\,\lambda + \zeta\,\lambda_1)}\,; \qquad C_1 = m\,\frac{\zeta_1 - \zeta}{\zeta_1\,\lambda + \zeta\,\lambda_1}. \tag{46}$$

Podstawiając wreszcie (46) do (40) a (45) do (39), mamy

$$F - G = \frac{l_1}{l} + \frac{m^2\,(\zeta_1 - \zeta)^2}{l\,(\zeta_1\,\lambda + \zeta\,\lambda_1)\,\zeta} \tag{47}$$

$$F + G = \frac{\zeta_1}{\zeta} \tag{48}$$

Równania (46), (47), (48), wspólnie z (34), (35) i (32) dają rozwiązanie zupełne zagadnienia.

II. Należy zauważyć, że w (32) mamy składowe *trzech* fal w ciele górném i *dwóch* w dolném, których kierunki rozchodzenia się tworzą kąty i, j, i_1, j_1 z linią prostopadłą do płaszczyzny zetknięcia i których amplitudy są równe:

$$\left.\begin{array}{lll} \omega\,F/\beta & \ldots\ldots & \text{dla fali padającéj poprzecznéj} \\ \omega\,G/\beta & \ldots\ldots & \text{dla fali poprzecznéj odbitéj} \\ \omega\,C/a & \ldots\ldots & \text{dla fali podłużnéj odbitéj} \\ \omega\,1/\beta_1 & \ldots\ldots & \text{dla fali poprzecznéj załamanéj} \\ \omega\,C_1/a_1 & \ldots\ldots & \text{dla fali podłużnéj załamanéj} \end{array}\right\} \tag{49}$$

12. Sprawdźmy teraz, czy suma *sprawności* [1]) czterech fal odbitych i załamanych równa się sprawności fali padającéj. W tym celu uważajmy wiązki fal, przecinające płaszczyznę zetknięcia w kwadracie, którego dwa boki są prostopadłe, a dwa równoległe do płaszczyzny padania. Sprawność każdéj wiązki równa się podwójnéj energii cynetycznéj na długości fali, podzielonéj przez okres wspólny drgania; czyli podwójnéj energii cynetycznéj na jednostkę objętości, pomnożonéj przez pole przecięcia wiązki i przez prędkość rozchodzenia się. Podwójna zaś energia cynetyczna na jednostkę objętości równa się iloczynowi z gęstości ciała sprężystego przez połowę kwadratu największéj prędkości molarnéj [2]).

[Jakoż obliczmy sprawność wiązki np. padającéj. Zakładając $\omega(t_1 - t_0) = 2\pi$, t. j. przyjmując $(t_1 - t_0)$ za okres drgania, uważajmy całkę

$$\frac{1}{2(t_1-t_0)}\int_{t_0}^{t_1}\left[\left(\frac{du'}{dt}\right)^2+\left(\frac{dv'}{dt}\right)^2\right]dt$$

w któréj, uwzględniając (31) i (35), ograniczone do fali poprzecznéj padającéj, znajdziemy

$$\frac{\omega^2 F^2 (l^2+m^2)}{2(t_1-t_0)}\int_{t_0}^{t_1}\sin^2(\omega t + lx + my)\,dt = \frac{\omega^2 F^2 (l^2+m^2)}{4},$$

co, pomnożone przez ζ, daje energią cynetyczną na jednostkę objętości; według (36) i (20) mamy $l^2 + m^2 = \omega^2/\beta^2$. A wskutek tego energia cynetyczna, odpowiadająca jednostce objętości, będzie $\zeta F^2 \omega^4 / 4\beta^2$; lub, mówiąc z Thomsonem, podwójna energia wyniesie $\frac{1}{2}\zeta(\omega^2 F/\beta)^2$.]

Wreszcie pola przecięcia pięciu wiązek naszych wynoszą $\cos i$, $\cos j$, $\cos i_1$, $\cos j_1$. Tym sposobem sprawność wiązki padającéj np. wynosi

$$\frac{\zeta\,\omega^4 F^2 \cos i}{2\beta}, \quad \text{czyli, według (24)} \tag{50}$$

$$\tfrac{1}{2}\,\omega^3 \zeta F^2 l \tag{51}$$

Sprawność wszystkich z kolei wiązek wynosi $\frac{1}{2}\omega^3$, pomnożone przez

$$\zeta F^2 l \quad \ldots\ldots \quad \text{dla fali padającéj (poprzecznéj)} \tag{52}$$

$$\zeta G^2 l \quad \ldots\ldots \quad \text{dla fali poprzecznéj odbitéj} \tag{53}$$

---

[1]) *Sprawnością* (activity) nazywa się szybkość wykonywania pracy, lub stosunek pracy wykonanéj do czasu, zużytego na nią.

[2]) [Autor nazywa tu największą prędkością (molarną) iloczyn z amplitudy drgania przez ω; gdyż różniczkowanie przemieszczenia względem czasu wprowadza czynnik ω.]

$$\zeta_1 l_1 \quad \ldots\ldots \quad \text{dla fali poprzecznéj załamanéj} \tag{54}$$

$$\zeta C^2 \lambda \quad \ldots\ldots \quad \text{dla fali podłużnéj odbitéj} \tag{55}$$

$$\zeta_1 C_1^2 \lambda_1 \quad \ldots\ldots \quad \text{dla fali podłużnéj załamanéj} \tag{56}$$

13. Wyraz pierwszy powinien być równym sumie czterech pozostałych, czyli (odejmując od obu stron wyraz drugi) mieć powinniśmy

$$\zeta l (F+G)(F-G) = \zeta_1 l_1 + \zeta C^2 \lambda + \zeta_1 C_1^2 \lambda_1, \tag{57}$$

co istotnie, według równań (46), (47) i (48) ma miejsce. Z równania (46) otrzymujemy, pomiędzy innemi,

$$\zeta C^2 \lambda + \zeta_1 C_1^2 \lambda_1 = \frac{m^2 \zeta_1 (\zeta_1 - \zeta)^2}{\zeta(\zeta_1 \lambda + \zeta \lambda_1)}, \tag{58}$$

jako wzór na ilość energii, przenoszonéj w ciągu jednostki czasu przez obie fale podłużne, odbitą i załamaną. Co do wielkości, wchodzących do wyrazów (52) do (58), zauważyć należy, że według (24), (22) i (38) jest

$$l = \frac{\omega \cos i}{\beta}; \quad m = \frac{\omega \sin i}{\beta}; \quad l_1 = \frac{\omega}{\beta_1}\left(1 - \frac{\beta_1^2}{\beta^2}\sin^2 i\right)^{1/2}; \tag{59}$$

$$\lambda = \frac{\omega}{\alpha}\left(1 - \frac{\alpha^2}{\beta^2}\sin^2 i\right)^{1/2}; \quad \lambda_1 = \frac{\omega}{\alpha_1}\left(1 - \frac{\alpha_1^2}{\beta^2}\sin^2 i\right)^{1/2}; \tag{60}$$

wreszcie

$$\frac{\zeta}{\zeta_1} = \frac{\beta_1^2}{\beta^2} \tag{61}$$

14. Jeżeli α i α_1 są wielkościami małemi względem β, to można napisać przybliżenie

$$\lambda = \frac{\omega}{\alpha}; \quad \lambda_1 = \frac{\omega}{\alpha_1};$$

wyrazy zaś (58) i (52) przybierają wobec (47) i (48) wielkość przybliżoną

$$\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\zeta_1}{\zeta^2}\cdot\frac{(\zeta_1-\zeta)^2}{\zeta_1 + \zeta\,\dfrac{\alpha}{\alpha_1}}\cdot\frac{\zeta\omega}{\beta}\sin^2 i, \tag{62}$$

$$\frac{1}{4}\,\frac{\zeta\omega}{\beta}\left(\frac{\beta}{\beta_1}\cos i_1 + \frac{\beta_2}{\beta_1^2}\cos i\right)^2 \sec i. \tag{63}$$

Stąd wynika, że energia (62), unoszona przez fale podłużne, odbitą i załamaną, jest nieznaczną w porównaniu ze sprawnością (63) fali padającéj poprzecznéj; i to bez względu na kąt padania. Długość fali podłużnéj, w ciele górném np., równa się α/β razy długości fali poprzecznéj; gdy tymczasem, jak widać z równań (61), (46), (47), (48), amplitudy ($\omega C/\alpha$ i $\omega G/\beta$, np.) ich wahań są porównywalne. Jeżeli więc założymy, że α/β jest ułamkiem nieskończenie małym, wówczas [z uwagi, że amplituda drgania podłużnego jest mniejszą od długości fali podłużnéj,] musimy zakładać, że stosunek amplitudy fali padającéj do jéj długości fali jest nieskończenie małym w porównaniu do α/β, jeżeli wzory nasze mają się nadal stosować, t. j., jeżeli kolejne zagęszczenia i rozrzedzenia fali podłużnéj mają pozostać nieskończenie małemi.

Przypuśćmy wreszcie, że $A = 0$; skąd wynika $\alpha = 0$ i $\lambda = \infty$, oraz, z mocy wzorów (47) i (48):

$$\frac{G}{F} = \frac{\frac{\zeta_1}{\zeta} - \frac{l_1}{l}}{\frac{\zeta_1}{\zeta} + \frac{l_1}{l}} = \frac{\frac{\sin^2 i}{\sin^2 i_1} - \frac{\operatorname{cotg} i_1}{\operatorname{cotg} i}}{\frac{\sin^2 i}{\sin^2 i_1} + \frac{\operatorname{cotg} i_1}{\operatorname{cotg} i}} = \frac{tg\,(i - i_1)}{tg\,(i + i_1)}, \tag{64}$$

czyli „prawo stycznych“ Fresnela.

UCHWAŁY KONGRESU MIĘDZYNARODOWEGO BIBLIOGRAFII NAUK MATEMATYCZNYCH,

odbytego w Paryżu od 16-go do 19-go lipca 1889-go roku.

PODAŁ

S. DICKSTEIN.

Towarzystwo matematyczne francuskie (La Société mathématique de France) podjęło myśl wydania bibliografii powszechnéj nauk matematycznych i w tym celu wygotowało projekt repertoryum bibliograficznego, który rozesłało uczonym, interesującym się historyą i bibliografią matematyki. Wciągu lat 1886 i 1887 Towarzystwo otrzymało znaczną liczbę kartek do katalogu, mającego służyć do ułożenia bibliografii. W celu przedyskutowania projektu klasyfikacyi wiedzy matematycznéj i sposobów prowadzenia stałéj pracy bibliograficznéj postanowiono na czas wystawy powszechnéj w Paryżu w roku 1889 zwołać kongres międzynarodowy. Komitet organizacyjny kongresu składał się z następujących członków: Poincaré (prezes), Ch. Henry (wice-prezes), Humbert (sekretarz), Appell, Brisse, Darboux, Fouret, Gauthier-Villars, Haton de la Goupillière, de Jonquières, Lalanne, Ed. Lucas, d'Ocagne, Rouché i Tannery. Posiedzenia kongresu odbyły się 16, 17, 18 i 19 lipca roku 1889 w siedzibie Towarzystwa matematycznego francuskiego; naradom przewodniczył Poincaré; wice-prezesami byli pp.: Henry i Emil Weyr, obowiązki sekretarza pełnił Humbert.

Uchwały kongresu zawierają się w następujących 11 punktach.

1. Wydaném ma być repertoryum bibliograficzne nauk matematycznych, którego zadaniem jest oszczędzenie pracownikom długich i mozolnych poszu-