O ZBIEŻNOŚCI TRZECH SZCZEGÓLNYCH ROZWINIĘĆ LICZBY π,

PODANYCH PRZEZ EULERA.

NAPISAŁ

EUGENIUSZ GRABOWSKI.

Euler w „Institutiones calculi differentialis“ (pars II, §§ 91 i 92) z rozkładu

$$\operatorname{arc\,tg}(x+h)=\operatorname{arc\,tg} x+\frac{h}{1}\sin\varphi\sin\varphi-\frac{h^2}{2}\sin^2\varphi\sin 2\varphi+\ldots, \tag{1}$$

gdzie $\varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}$, otrzymuje przy

$$h=-x,\qquad h=-\sqrt{1+x^2},\qquad h=-x-\frac{1}{x}$$

rozwinięcia odpowiednio:

$$\frac{\pi}{2}=\varphi+\frac{1}{1}\cos\varphi\sin\varphi+\frac{1}{2}\cos^2\varphi\sin 2\varphi+\ldots+\frac{1}{n}\cos^n\varphi\sin n\varphi+\ldots, \tag{2}$$

$$\frac{\pi}{2}=\frac{\varphi}{2}+\frac{1}{1}\sin\varphi+\frac{1}{2}\sin 2\varphi+\ldots+\frac{1}{n}\sin n\varphi+\ldots, \tag{3}$$

$$\frac{\pi}{2}=\frac{1}{1}\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}+\frac{1}{2}\frac{\sin 2\varphi}{\cos^2\varphi}+\ldots+\frac{1}{n}\frac{\sin n\varphi}{\cos^n\varphi}+\ldots. \tag{4}$$

Te rozwinięcia, jako zastosowania rozkładu (1), przytaczają Gregory w „Examples of the processes of the differential and integral calculus“ (chap. V.), Todhunter w „Treatise on the differential calculus“ (chap. VII), Bertrand w „Calcul différentiel“ (n° 301).

Euler zaznacza o szeregu (4), iż on przy $\varphi=45^0$ jest rozbieżny, Bertrand zaś w innym ustępie swego dzieła (n° 382) dowiódł zbieżności szeregu (3) dla wartości φ zawartych między 0 i 2π.

Zbadaniem zbieżności rozwinięć (2), (3) i (4) zajmowałem się w seminaryum matematycznem p. prof. M. A. Baranieckiego. Oto przebieg i wyniki tego dochodzenia.

1. Wyraz dopełniający rozwinięcia (1),

$$R_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{h}{\sqrt{1+(x+\theta h)^2}}\right)^n\cdot\sin\left(n\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x+\theta h}\right),$$

zdąża do zera w miarę n rosnącego nieograniczenie, kiedy

$$\frac{h^2}{1+(x+\theta h)^2}<1. \tag{5}$$

Warunek ten jest dopełniony zawsze, kiedy $h^2<1$. Prócz tego, A) jeżeli h i x są jednakowego znaku, to ułamek (5) ma największą wartość przy $\theta=0$, i warunek (5) jest dopełniony, kiedy $h^2<1+x^2$, tém bardziéj, że zawsze jest $\theta>0$; B) jeżeli zaś h i x są różnego znaku, to, a) kiedy $h^2<x^2$, ułamek (5) ma największą wartość przy $\theta=1$, a wtedy według (5) ma być $h^2<1+(x+h)^2$, czyli z uwagi, że $2hx<0$, ma być $4h^2x^2<(1+x^2)^2$ czyli $h^2<\frac{(1+x^2)^2}{4x^2}$; b) kiedy $h^2=x^2$, ułamek (5) ma wartość największą również przy $\theta=1$, a wtedy według (5) winno być $h^2<1$; c) kiedy nakoniec $h^2>x^2$, największa wartość ułamka (5) nie przypada ani przy $\theta=0$, ani téż przy $\theta=1$, tak iż nie możemy dojść tu do wniosku, odpowiadającego poprzednim przypadkom, i możemy stosować tylko powyżéj postawiony warunek: $h^2<1$.

2. Rozwinięciu (2) odpowiada $h=-x$; według B,b, ma być $h^2<1$, czyli z uwagi, że $h^2=x^2$, zaś $\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\operatorname{arc\,cotg} x=\varphi$, ma być $\operatorname{cotg}^2\varphi<1$, a więc $\frac{4k+1}{4}\pi<\varphi<\frac{4k+3}{4}\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą lub zerem.

Rozwinięciu (3) odpowiada $h=-(1+x^2)^{\frac{1}{2}}$ czyli $h^2=1+x^2$; żaden z wyprowadzonych powyżéj warunków nie jest dopełniony, a zatém to zastosowanie rozkładu (1) nie jest uzasadnione dla żadnych wartości φ.

Rozwinięciu (4) odpowiada $h = -\left(x + \frac{1}{x}\right)$; h i x są różnego znaku, $h^2 > x^2$, $h^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 > 1$; a więc według B,c, także to zastosowanie rozkładu (1) nie jest uzasadnione dla żadnych wartości φ.

Należy przeto na innéj drodze szukać zbieżności rozwinięć (3) i (4), jakotéż zbieżności rozwinięcia (2) przy innych jeszcze wartościach φ.

3. Szereg

$$l\,(1-r\,e^{\varphi i}) = -\frac{1}{1}\,r\,e^{\varphi i} - \frac{1}{2}\,r^2\,e^{2\varphi i} - \frac{1}{3}\,r^3\,e^{3\varphi i} - \dots \qquad (6)$$

jest zbieżny, kiedy albo $r < 1$ albo też przy $r = 1$ $\varphi \gtrless 2\,k\,\pi$. Kładąc w (6) $-l\,(1 - r\,e^{\varphi i}) = X + i\,Y$, otrzymamy

$$X + i\,Y = \frac{1}{1}\,r\,e^{\varphi i} + \frac{1}{2}\,r^2\,e^{2\varphi i} + \frac{1}{3}\,r^3\,e^{3\varphi i} + \dots$$

$$= \frac{1}{1}\,r\cos\varphi + \frac{1}{2}\,r^2\cos 2\,\varphi + \dots + i\left(\frac{1}{1}\,r\sin\varphi + \frac{1}{2}\,r^2\sin 2\varphi + \dots\right),$$

skąd

$$Y = \frac{1}{1}\,r\sin\varphi + \frac{1}{2}\,r^2\sin 2\,\varphi + \dots, \quad \text{gdzie} \begin{cases} r < 1 \\ \text{przy } r = 1 \quad \varphi \gtrless 2k\pi. \end{cases} \qquad (7)$$

jest warunkiem zbieżności tego rozwinięcia Y. Zważmy, że

$$e^{-X-iY} = 1 - r\,e^{\varphi i} \quad \text{czyli} \quad e^{-X}(\cos Y - i\sin Y) = 1 - r\cos\varphi - i\,r\sin\varphi,$$

że więc

$$\left.\begin{aligned} e^{-X}\cos Y &= 1 - r\cos\varphi \\ e^{-X}\sin Y &= r\sin\varphi \end{aligned}\right\};$$

przeto

$$Y = \operatorname{arc\,tg}\frac{r\sin\varphi}{1 - r\cos\varphi}.$$

Wstawiając w (7) to wyrażenie Y, mamy

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{r\sin\varphi}{1 - r\cos\varphi} = \frac{1}{1}\,r\sin\varphi + \frac{1}{2}\,r^2\sin 2\,\varphi + \dots, \begin{cases} r < 1 \\ \text{przy } r = 1 \quad \varphi \gtrless 2k\pi. \end{cases} \qquad (8)$$

4. Kładąc w (8) $r = \cos\varphi$, skąd wynika $\cos\varphi \geq 0$ czyli $\frac{4\,k-1}{2}\,\pi \leq \varphi \leq \frac{4\,k+1}{2}\,\pi$, otrzymamy

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{\cos\varphi\,\sin\varphi}{1-\cos^2\varphi} = \frac{1}{1}\cos\varphi\sin\varphi + \frac{1}{2}\cos^2\varphi\sin 2\,\varphi + \dots,$$

albo z uwagi, że

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{\cos\varphi\,\sin\varphi}{1-\cos^2\varphi} = \operatorname{arc\,tg}\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{cotg}\varphi) = \frac{\pi}{2} - \varphi,$$

rozwinięcie (2). Oczywiście nie może tu być jednocześnie $r = \cos\varphi = 1$ i $\varphi \gtrless 2\,k\,\pi$. A więc warunkiem zbieżności szeregu (2) jest $r < 1$ czyli $\cos\varphi < 1$ czyli $\varphi \gtrless 2\,k\,\pi$; a ponieważ jest tu $\frac{4\,k-1}{2}\,\pi \leq \varphi \leq \frac{4\,k+1}{2}\,\pi$, przeto widzimy, że rozwinięcie (2) ma miejsce także przy wartościach φ takich, iż albo $\frac{4\,k-1}{2}\,\pi \leq \varphi < 2\,k\,\pi$ albo też $2\,k\,\pi < \varphi \leq \frac{4\,k+1}{2}\,\pi$.

Kładąc w (8) $r = 1$, z uwagi, że

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi} = \operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2},$$

otrzymamy rozwinięcie (3) z warunkiem zbieżności: $\varphi \gtrless 2\,k\,\pi$.

Rozwinięcia (4) nie można wyprowadzić z (8); należałoby bowiem przyjąć $r = \frac{1}{\cos\varphi}$, co się sprzeciwia warunkom zbieżności szeregu (8).

5. W rozważaniu rozwinięcia (4) możemy się ograniczyć do wartości $\varphi \gtrless k\,\pi$, albowiem przy $\varphi = k\pi$ wszystkie jego wyrazy są równe zeru. Zważmy, że w szeregu

$$\frac{1}{\cos\varphi} + \frac{1}{2\cos^2\varphi} + \frac{1}{3\cos^3\varphi} + \dots \qquad (9)$$

stosunek wyrazu $(n+1)$-go do poprzedzającego jest

$$\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{\cos\varphi}.$$

Przy wartościach $\varphi \gtrless k\,\pi$ jest $\frac{1}{\cos\varphi} > 1$, tak iż poczynając od pewnego dostatecznie wielkiego n, wartość powyższego stosunku jest stale większa od jedności i wyrazy szeregu (9) stale rosną. Wskutek tego o wyrazie ogólnym szeregu (4)

$$\frac{1}{n \,.\, \cos^n \varphi} \cdot \sin n\varphi$$

nie możemy powiedzieć, żeby on malał w miarę n rosnącego nieograniczenie i nie może być mowy o poszukiwaniu zbieżności szeregu (4).

W Krakowie, 18 listopada 1891 roku.

ZAŁAMANIE ŚWIATŁA PRZEZ CIECZE.

WYNIKI DOŚWIADCZEŃ Z BENZOLEM.

PODAŁ

WIKTOR BIERNACKI.

1. Celem mych badań było sprawdzenie, o ile podawane za stałe funkcye współczynnika n załamania światła i ciężaru gatunkowego d danego ciała, zachowują stałe wartości przy zmianie temperatury. Do doświadczeń używałem benzolu z fabryki Kahlbauma w Berlinie; oznaczony za pomocą znanego przyrządu Beckmana punkt krzepnięcia używanego benzolu (5°, 5 C) pozwalał przypuszczać, że miałem do czynienia z materyałem dostatecznie czystym [1]). Współczynnik załamania światła oznaczałem, posługując się niedawno zbudowanym refraktometrem Pulfricha [1]), który, przed przystąpieniem do badań właściwych, dokładnie zbadałem i sprawdziłem. Ogólny rezultat szeregu mych badań dla promieni żółtych można przedstawić następującym wzorem, który daje zależność współczynnika załamania od temperatury:

$$n = 1.51498 - 0.0007992\, t + 0.000004395\, t^2 + 0.0000001527\, t^3, \qquad \text{(A)}$$

Wartości n podane w następującéj tablicy obliczyłem z tego wzoru.

t	n	$\frac{\Delta n}{\Delta t}$
1	1,51418	
		78
2	1,51340	
		78
3	1,51262	
		76

[1]) Klobukow. Zeitschr. für phys. Chemie Bd. 3 Str. 351.

[2]) Das Totalreflectometer und das Refractometer für Chemiker. Pulfrich Lipsk, 1890.